AMOSTRA GRATUITA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Probabilidade e Introdução à Teoria dos Grafos

Teoria e Questões de Competições

Capítulo 1

Princípios de Contagem

Estas são 57 páginas do livro, na íntegra: a teoria construída do zero, os exemplos de fixação e **todas as questões com resolução escrita por extenso**. Nenhum gabarito solto.

O sumário completo vem logo a seguir, para você ver o que há no restante do livro.

O livro completo

826 questões, todas resolvidas. Treze capítulos e um apêndice, do primeiro princípio de contagem à teoria dos grafos.

Questões do IME, do ITA, da OBM, da OBMEP, da Escola Naval, da AFA, da IMO, da AMC, do AIME, do HMMT e do Putnam.

Onde comprar

Clube de Autores — clubedeautores.com.br/livro/analise-combinatoria-2

UICLAP — loja.uiclap.com/titulo/ua212127

Amazon — amazon.com.br/stores/author/B0H99K15ZJ

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

SUMÁRIO

Prefácio **v**

1 Princípios de Contagem **1**
1. Introdução 1
2. Contagem por Força Bruta: Enumerar e Listar 1
3. O Princípio Aditivo (AP) 3
4. O Princípio Multiplicativo (MP) 4
5. Princípio da Bijeção 5
6. Princípio do Evento Complementar 5
7. Observações 7
Exemplos de Fixação 8
Questões 11
Respostas e Soluções 25

2 Arrumações e Escolhas Simples **58**
1. Definição 58
2. Permutações circulares 60
3. Complemento: Desarranjos (permutações caóticas) 61
Exemplos de Fixação 62
Questões 62
Respostas e Soluções 68

3 Combinações **83**
1. Combinações Simples 83
2. Propriedades dos Números Binomiais 87
3. Divisão em Grupos 89
4. Combinações e Subconjuntos na Geometria 91
Exemplos de Fixação 92
Questões 93
Respostas e Soluções 104

4 Arrumações e Escolhas com Repetição **137**
1. Permutação com Repetição . . . 137
2. Combinações com Repetição . . . 138
3. Distribuições . . . 140
4. Observações . . . 141
5. Permutações Circulares . . . 142
Exemplos de Fixação . . . 143
Questões . . . 144
Respostas e Soluções . . . 149

5 Binômio de Newton **166**
1. Princípios Fundamentais: o Fatorial de um Número Natural . . . 166
2. O Teorema Binomial . . . 167
3. O Polinômio de Leibniz . . . 169
4. O Filtro das Raízes da Unidade . . . 170
Questões . . . 171
EXERCÍCIOS ADICIONAIS: NÚMEROS BINOMIAIS . . . 179
Respostas e Soluções . . . 184

6 Probabilidade **223**
1. Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos . . . 223
2. A probabilidade de Laplace . . . 224
3. Os axiomas de Kolmogorov . . . 224
4. Probabilidade condicional e independência . . . 226
5. Probabilidade Total e Teorema de Bayes . . . 226
6. Valor Esperado: Resumo e Propriedades Básicas . . . 228
Questões . . . 229
Exemplos Clássicos do Curso . . . 230
Respostas e Soluções . . . 246

7 Triângulo de Pascal e Números Binomiais **286**
1. Números Binomiais e o Triângulo . . . 286
2. Teorema Binomial de Newton . . . 287
3. Propriedades Fundamentais . . . 289
4. Teorema das Linhas e Soma Alternada . . . 290
5. Teoremas das Colunas e das Diagonais . . . 291
6. Absorção, Euler e Lagrange . . . 293
7. Teorema de Lucas . . . 295
Questões . . . 296

Respostas e Soluções 303

8 Outros Métodos de Contagem 329
1. O Princípio da Inclusão–Exclusão 329
2. Os Lemas de Kaplansky 333
3. O Princípio de Dirichlet (Casa dos Pombos) 334
4. Os Números de Catalan 344
5. Invariantes e Monovariantes 347
Questões 349
Respostas e Soluções 371

9 Recorrências 425
1. O que é uma recorrência 425
2. Recorrências de Restrições e o Princípio da Reflexão 426
3. Técnicas de resolução 428
4. Recorrências Não Homogêneas 431
5. Três Problemas Clássicos: Hanói, Fibonacci e Josephus 433
6. Desafios Olímpicos 435
Questões 436
Respostas e Soluções 442

10 Partições de Inteiros 467
1. Partições Ordenadas e Não Ordenadas 467
2. A Função Geratriz de $p(n)$ 468
3. O Gráfico de Ferrers e a Conjugação 469
4. Recorrências para $p(n)$ 470
5. Estimativas 472
6. Partições e Permutações: Tipos de Ciclo 472
Questões 472
Respostas e Soluções 475

11 Teoria dos Grafos 482
1. Definições Básicas 482
2. Grafos Importantes 483
3. Árvores e Árvores Geradoras 484
4. Grafos Bipartidos 485
5. Caminhos e Ciclos Eulerianos 488
6. Caminhos e Ciclos Hamiltonianos 490
7. Coloração de Vértices e Número Cromático 492
8. Clique e Número de Independência 495

9. Grafos Planares 495
10. Crossing Number (Número de Cruzamentos) 496
11. Grafos de Cayley 497
12. Hipercubos e Grafos de Hamming 499
13. Grafos de Transposição e de Inserção 500
14. Os Principais Números de um Grafo 503
Questões 509
Respostas e Soluções 517

12 Grupos, Simetrias e o Lema de Burnside **540**
1. A Estrutura de Grupo 540
2. Notação e Propriedades Básicas de Permutações 541
3. Ações de Grupos, Órbitas e Estabilizadores 543
4. Simetrias Geométricas 544
5. Lema de Burnside 544
6. Enumeração de Pólya 546
Questões 546
Respostas e Soluções 549

13 Questões do IME, do ITA e da IMO **561**
Questões 561
Respostas e Soluções 569

A Funções Geradoras **593**
1. A Ideia Fundamental 593
2. Séries Formais e as Ferramentas Básicas 595
3. O Cálculo das Séries Formais 600
4. Equações com Restrições 602
5. Funções Geradoras e Recorrências 604
6. Equações Não Lineares: os Números de Catalan 607
7. Funções Geradoras Exponenciais 609
8. Duas Variáveis: Contando com um Parâmetro Extra 612
9. Aplicações Clássicas 613
10. Tabela-Resumo 616
Questões 617
Respostas e Soluções 620

B Origem das questões **631**

C Referências Bibliográficas **632**

1

PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

1. Introdução

Frequentemente, no nosso dia a dia, precisamos contar "eventos" tais como arrumação de objetos de certa maneira, particionar coisas sob uma certa condição, distribuições para certos fins etc.

O primeiro passo em qualquer problema de contagem é sempre o mesmo: enumerar, listar ou descrever explicitamente todos os casos possíveis. Esse processo, chamado **contagem por força bruta**, é a base de toda combinatória.

Neste capítulo, aprenderemos os **Princípios Aditivo e Multiplicativo** — as ferramentas fundamentais para contar sem enumerar tudo manualmente.

2. Contagem por Força Bruta: Enumerar e Listar

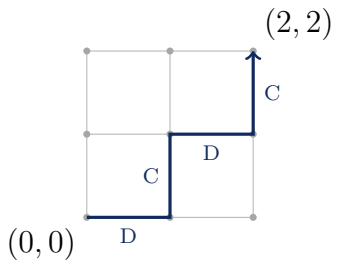
Primeiro princípio: em qualquer problema, comece listando explicitamente todos os casos. Depois procure por padrões.

Exemplo 1: Caminho Mínimo em Rede. Quantos caminhos de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ usando apenas movimentos Direita (D) e Cima (C)?

Todo caminho mínimo usa exatamente 2 passos D e 2 passos C, num total de 4 passos. Enumerar todos:

DDCC, DCDC, DCCD, CDDC, CDCD, CCDD.

Contando: **6 caminhos**. Cada caminho fica determinado pela escolha de *quais* 2 dos 4 passos são D — e, de fato, $\binom{4}{2} = 6$.



O caminho DCDC destacado na rede 2×2.

Explorando os casos pequenos, aparece o padrão:

rede	caminhos enumerados	total
1×1	DC, CD	$2 = \binom{2}{1}$
2×2	DDCC, DCDC, DCCD, CDDC, CDCD, CCDD	$6 = \binom{4}{2}$
3×3	DDDCCC, DDCDCC, ...	$20 = \binom{6}{3}$

Caminhos mínimos na rede $n \times n$: o padrão é $\binom{2n}{n}$.

Exemplo 2: Senhas de 2 Dígitos. Quantas senhas de 2 caracteres existem usando letras {A, B, C}?

Enumerar:

$$AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.$$

Contando: **9 senhas** (3^2).

Exemplo 3: Arranjos de Letras. Quantas formas de arranjar A, B, C?

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

Contando: **6 arranjos** ($3! = 6$).

Depois de enumerar pequenos casos, você vê o padrão e aprende a contar sem listar tudo.

3. O Princípio Aditivo (AP)

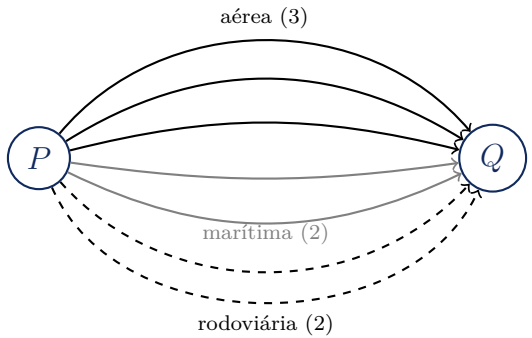
Suponha que existam n_1 maneiras para o evento E_1 ocorrer, n_2 maneiras para o evento E_2 ocorrer, ..., n_k maneiras para o evento E_k ocorrer, onde $k \geq 1$. Se estas maneiras para as ocorrências dos eventos distintos forem disjuntas duas a duas, então o número de maneiras nas quais pelo menos um dos eventos E_1, E_2, ..., E_k pode ocorrer é

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Quando usar AP: quando os casos são **mutuamente excludentes** (não podem ocorrer simultaneamente), usamos AP para contar o total.

Exemplo: De uma cidade P a uma cidade Q, podemos ir por via aérea (3 companhias), marítima (2) ou rodoviária (2). Qual é o número total de maneiras?

Resposta: $3 + 2 + 2 = 7$ (cada modo é disjunto dos outros).



As $3+2+2=7$ rotas de P a Q: os três grupos são disjuntos, e o total é a *soma*.

Uma forma equivalente do AP usando a terminologia dos conjuntos, onde $|X|$ representa o número de elementos do conjunto X, é a seguinte: sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

4. O Princípio Multiplicativo (MP)

Supondo que um evento E possa ser decomposto em r eventos ordenados $E_1, E_2, \ldots, E_r$ e que existam n_1 maneiras para o evento E_1 ocorrer, n_2 maneiras para o evento E_2 ocorrer, $\ldots$, n_r maneiras para o evento E_r ocorrer, então o número de maneiras do evento E ocorrer é dado por

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r = \prod_{i=1}^{r} n_i.$$

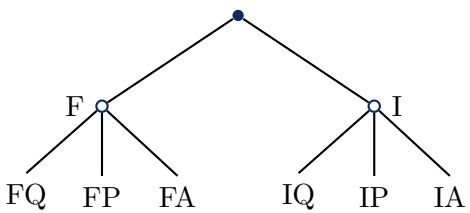
Quando usar MP: quando o problema pode ser **decomposto em etapas consecutivas**, onde cada etapa tem um certo número de escolhas, usamos MP para contar o total.

Exemplo: Para ir de A até D, devemos passar por B e C (nesta ordem). Há 2 caminhos de A a B, 5 de B a C, e 3 de C a D.

Resposta: $2 \times 5 \times 3 = 30$ (cada etapa é uma escolha independente).

Exemplo: a árvore de decisão. Uma lanchonete monta sanduíches escolhendo um pão (francês F ou integral I) **e** um recheio (queijo Q, presunto P ou atum A). Quantos sanduíches diferentes existem?

O processo de escolha pode ser visualizado numa *árvore de decisão*: da raiz saem 2 ramos (o pão) e de cada um deles saem 3 ramos (o recheio). Cada sanduíche corresponde a exatamente uma folha da árvore:



Árvore de decisão: 2 ramos, cada um com 3 prolongamentos, dão $2 \times 3 = 6$ folhas.

Resposta: $2 \times 3 = 6$ sanduíches. A árvore torna evidente o porquê da *multiplicação*: cada uma das n_1 escolhas da primeira etapa se ramifica em n_2 escolhas da segunda.

Em termos de conjuntos: se $\prod_{i=1}^{r} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ é o produto cartesiano dos conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_r$, então

$$\left|\prod_{i=1}^{r} A_i\right| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_r| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|.$$

5. Princípio da Bijeção

Uma **bijeção** entre dois conjuntos A e B é uma correspondência um-a-um: cada elemento de A corresponde a exatamente um elemento de B, e vice-versa. O **Princípio da Bijeção** estabelece que:

> **Princípio da Bijeção.** *Se existe uma bijeção entre os conjuntos A e B, então $|A| = |B|$.*

Justificativa: Uma bijeção é uma função que é simultaneamente injetora (elementos distintos de A vão para elementos distintos de B) e sobrejetora (todo elemento de B vem de algum elemento de A). Portanto, os elementos de A e B podem ser emparelhados em uma correspondência um-a-um.

Contagem por bijeção. Quando contar os elementos de um conjunto A é difícil, procuramos estabelecer uma bijeção entre A e um conjunto B que é mais fácil de contar.

Exemplo 1: Subconjuntos e sequências binárias. O número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é 2^n. Por quê? Estabeleça uma bijeção entre os subconjuntos e as sequências de n bits (0 ou 1): para cada subconjunto S, construa a sequência $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ onde $b_i = 1$ se $i \in S$ e $b_i = 0$ caso contrário. Essa correspondência é uma bijeção. Logo, o número de subconjuntos é igual ao número de sequências binárias, que é 2^n.

Exemplo 2: Combinações e sequências com números iguais. O número de subconjuntos de tamanho k em um conjunto de n elementos é $\binom{n}{k}$. Isso é equivalente a contar sequências com exatamente k uns e $n - k$ zeros: há uma bijeção natural entre os k-subconjuntos (os índices dos 1s) e tais sequências.

Exemplo 3: Caminhos no reticulado. O número de caminhos mínimos de $(0, 0)$ a (m, n) usando apenas passos à direita (D) e para cima (C) é $\binom{m+n}{m}$. A bijeção: cada caminho corresponde a uma sequência de $m + n$ passos com exatamente m Ds e n Cs — assim, contar caminhos é o mesmo que escolher quais m das $m + n$ posições receberão um D.

6. Princípio do Evento Complementar

Em muitos problemas de contagem, é mais fácil contar aquilo que **não queremos** e depois subtrair do total. Este é o **Princípio do Evento Complementar** (ou **Princípio da Contagem Complementar**):

Princípio do Evento Complementar. *Seja U um universo finito (conjunto de todas as configurações possíveis) e $A \subseteq U$ o conjunto de configurações desejadas. Se $\overline{A} = U \setminus A$ é o conjunto das configurações indesejadas, então*

$$|A| = |U| - |\overline{A}|.$$

Justificativa: Como A e $\overline{A}$ são disjuntos e $A \cup \overline{A} = U$, pelo Princípio Aditivo, $|A| + |\overline{A}| = |U|$. Isolando $|A|$, obtemos a fórmula acima.

Quando usar: Use o Princípio do Evento Complementar quando:

- Contar as configurações desejadas envolve muitos casos.
- Contar as configurações indesejadas é significativamente mais simples.
- A condição envolvida é uma negação ("pelo menos um", "nenhum", etc.).

Exemplo 1: Senhas com repetição. Quantas senhas de 4 dígitos (0000 a 9999) têm pelo menos um dígito repetido?

Contar diretamente: exatamente um par, dois pares, uma trinca, etc. — muitos casos!

Complementar: é mais fácil contar senhas com todos os dígitos distintos:

$$\text{Total de senhas} = 10^4 = 10\,000$$

$$\text{Senhas com todos distintos} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$$

$$\text{Senhas com pelo menos uma repetição} = 10\,000 - 5\,040 = 4\,960.$$

Exemplo 2: Distribuição com restrições. De quantos modos podemos distribuir 10 livros para 3 pessoas, de modo que nenhuma fique sem livros?

Complementar: conte as distribuições onde pelo menos uma pessoa fica sem livros.

$$\begin{aligned}
\text{Total (sem restrição)} &= 3^{10} = 59\,049 \\
\text{Pessoa 1 sem livros} &= 2^{10} = 1\,024 \\
\text{Pessoa 2 sem livros} &= 2^{10} = 1\,024 \\
\text{Pessoa 3 sem livros} &= 2^{10} = 1\,024 \\
\text{Pessoas 1 e 2 sem livros} &= 1^{10} = 1 \\
\text{(etc., por inclusão-exclusão)}&
\end{aligned}$$

Pela inclusão-exclusão: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3(1024) - 3(1) + 0 = 3\,069$.

Complementar: $59\,049 - 3\,069 = 55\,980$ distribuições válidas.

7. Observações

1. Como afirmações matemáticas, tanto o AP quanto o MP são triviais e por esta razão são frequentemente negligenciados por aqueles que começam a estudar combinatória, o que é uma pena, pois, na realidade, eles são fundamentais na resolução de problemas de contagem. Um dado problema de contagem, independente de quão complicado seja, pode sempre ser decomposto em subproblemas mais simples que podem ser contados usando AP e/ou MP.

2. As palavras "e" e "ou" indicam geralmente quando um ou outro princípio é mais apropriado para a resolução de um problema. A palavra "**e**" sugere o princípio multiplicativo (MP) e a palavra "**ou**" o princípio aditivo (AP).

3. Quando os conjuntos A e B não são disjuntos vale o **Princípio da Inclusão–Exclusão**:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

e, para três conjuntos, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

4. **Contagem complementar:** muitas vezes é mais fácil contar o que *não* queremos: se U é o universo, o número de configurações desejadas é $|U| - |\overline{A}|$, onde $\overline{A}$ é o conjunto das configurações indesejadas.

Exemplo: princípio aditivo com sobreposição. Quantos inteiros de 1 a 100 são divisíveis por 2 **ou** por 3?

Aqui os dois casos *não* são disjuntos: os múltiplos de 6 são divisíveis por 2 *e* por 3, e seriam contados duas vezes se apenas somássemos. Sejam A os múltiplos de 2 ($|A| = 50$) e B os múltiplos de 3 ($|B| = 33$); a interseção $A \cap B$ é formada pelos múltiplos de $\text{mmc}(2, 3) = 6$ ($|A \cap B| = 16$). Pela inclusão–exclusão,

$$|A \cup B| = 50 + 33 - 16 = 67.$$

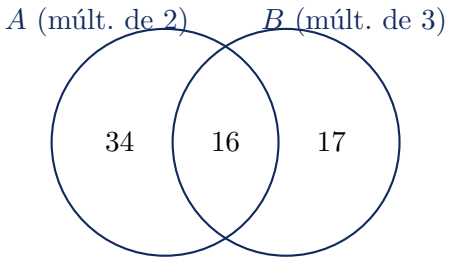


Diagrama de Venn: $34 + 16 + 17 = 67$ inteiros de 1 a 100 divisíveis por 2 ou por 3; a região central (16 múltiplos de 6) é somada uma única vez.

Exemplo: contagem complementar. Quantas senhas de 4 algarismos (de 0000 a 9999) possuem *pelo menos um* algarismo repetido?

Contar diretamente exigiria separar muitos casos (exatamente um par, dois pares, uma trinca, ...). É muito mais simples contar o complementar: o universo tem $10^4 = 10\,000$ senhas, e as senhas com todos os algarismos *distintos* são $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$. Logo, a resposta é

$$10\,000 - 5040 = 4960.$$

Exemplo: pequenos casos revelam o padrão. Quantos subconjuntos possui um conjunto com n elementos?

Examinemos primeiro os casos pequenos:

n	subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$	total
0	$\varnothing$	1
1	$\varnothing$, $\{1\}$	2
2	$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$	4
3	$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$	8

O padrão $1, 2, 4, 8, \ldots$ sugere 2^n — e o MP explica: para formar um subconjunto, decidimos, elemento por elemento, se ele entra ou não (2 opções para cada um dos n elementos), totalizando $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ subconjuntos.

Exemplos de Fixação

Questão 1.1

Da cidade A até a cidade B conduzem cinco caminhos, e de B até C, três. Quantos caminhos que passam por B conduzem de A até C?

Questão 1.2

Quantos são os pares (x, y) de números inteiros que satisfazem $x^2+y^2 = 25$? E quantos satisfazem $x^2 + y^2 = 2027$?

Questão 1.3

Ao cume de uma montanha conduzem cinco caminhos. De quantas maneiras um turista pode subir e descer? E com a condição de que a subida e a descida se deem por caminhos diferentes?

Questão 1.4

Numa granja há 20 ovelhas e 24 porcos. De quantos modos se pode escolher uma ovelha e um porco? Feita essa escolha, de quantas maneiras se pode escolher novamente uma ovelha e um porco?

Questão 1.5

De quantas formas se podem indicar, no tabuleiro de xadrez, duas casas, uma branca e uma preta? E se não houver restrição quanto às cores?

Questão 1.6

De quantas maneiras se podem escolher no tabuleiro de xadrez uma casa branca e uma preta que não estejam na mesma linha nem na mesma coluna?

Questão 1.7

Há 6 pares de luvas de tamanhos distintos. De quantas maneiras se podem escolher uma luva da mão esquerda e outra da direita de forma que sejam de tamanhos diferentes?

Questão 1.8

Numa livraria há 6 exemplares do romance *Rudin*, 3 de *Ninho de Fidalgos* e 4 de *Pais e Filhos*. Além disso, há 5 volumes contendo *Rudin* e *Ninho de Fidalgos* juntos e 7 contendo *Ninho de Fidalgos* e *Pais e Filhos*. De quantos modos se pode efetuar uma compra que contenha um exemplar de cada um dos três romances?

Questão 1.9

O mesmo problema, se além disso a livraria tem 3 volumes contendo *Rudin* e *Pais e Filhos*.

Questão 1.10

Numa cesta há 12 maçãs e 10 laranjas. Ivan toma uma maçã ou uma laranja; em seguida, Nadia escolhe uma maçã e uma laranja. Em que caso Nadia tem maior liberdade de escolha: quando Ivan toma uma maçã ou quando toma uma laranja?

Questão 1.11

Há três piões com 6, 8 e 10 faces, respectivamente. De quantas maneiras diferentes podem cair? E se soubermos que pelo menos dois deles caíram sobre a face marcada com o algarismo 1?

Questão 1.12

De quantas formas se pode confeccionar uma bandeira de três faixas horizontais de cores distintas, dispondo-se de tecido de 5 cores? E se uma das faixas deve ser vermelha?

Questão 1.13

Quantos dicionários é preciso editar para que se possam efetuar traduções diretas entre quaisquer dos cinco idiomas: espanhol, russo, inglês, francês e alemão?

Questão 1.14

Quantos dicionários será preciso acrescentar se o número de idiomas passar a 10?

Questão 1.15

De quantas maneiras se pode escolher, de um baralho completo de 52 cartas, uma carta de cada naipe? E com a condição de que não haja duas cartas de mesmo valor (dois reis, dois dez etc.)?

Questão 1.16

De quantos modos se pode escolher de um baralho de 52 cartas uma carta de cada naipe, de forma que as cartas dos naipes vermelhos e as dos naipes pretos formem pares de mesmo valor?

Questão 1.17

Os ingleses costumam dar vários nomes a seus filhos. De quantas formas se pode dar nome a uma criança, se o número total de nomes disponíveis é 300 e lhe são dados no máximo três nomes (distintos e em ordem)?

Questão 1.18

É preciso enviar 6 cartas urgentes. De quantas maneiras isso pode ser feito, se há três mensageiros disponíveis e cada carta pode ser entregue a qualquer um deles?

Questão 1.19

Numa estação ferroviária há m semáforos. Quantos sinais diferentes podem ser dados, se cada semáforo tem três estados: vermelho, amarelo e verde?

Questão 1.20

Em certo Estado não havia dois habitantes com a mesma quantidade de dentes. Qual pode ser a população máxima desse Estado, se o número máximo de dentes é 32?

Questão 1.21

As placas de automóvel são formadas por uma, duas ou três letras seguidas de quatro algarismos. Determine a quantidade total dessas placas, utilizando as 32 letras do alfabeto russo.

Questões

Questão 1.22

O saguão do prédio sede de uma multinacional possui quatro portas, uma em cada uma das direções Norte, Sul, Leste e Oeste. De quantas maneiras distintas uma pessoa dispõe para entrar e sair do prédio por uma dessas portas?

Questão 1.23

Dois dados, um vermelho e outro verde, são lançados. Quantos são os possíveis resultados distintos? Quantos são os possíveis resultados distintos se os dois dados devem apresentar resultados diferentes?

Questão 1.24

A ligação entre as cidades de Itapipoca e Peritoró pode ser feita por vias ferroviária, marítima, rodoviária e aérea. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode fazer a viagem Itapipoca–Peritoró–Itapipoca sem utilizar na volta o mesmo meio de transporte utilizado na ida?

Questão 1.25

Qual é, aproximadamente, o número de sequências distintas de caras e coroas que podemos obter ao lançarmos uma moeda 100 vezes? (Considere $2^{10} \approx 10^3$.)

Questão 1.26

Quantos são os números que podemos formar com todos os dígitos $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2$ e 3?

Questão 1.27

Dispondo das cores verde, amarelo, azul e branco, de quantos modos distintos podemos pintar 7 casas enfileiradas de modo que cada casa seja pintada de uma só cor e duas casas vizinhas não sejam pintadas com a mesma cor?

Questão 1.28

As antigas placas para automóveis, formadas por duas letras seguidas de quatro algarismos, foram substituídas por placas com três letras seguidas de quatro algarismos. Utilizando um alfabeto de 26 letras e supondo que qualquer sequência de letras e algarismos seja permitida, quantos veículos a mais podem ser emplacados?

Questão 1.29

Dispondo de 5 livros diferentes de Matemática, 6 livros diferentes de Física e 8 livros diferentes de Química, de quantas maneiras podemos escolher um par (não ordenado) de livros que não sejam da mesma matéria?

Questão 1.30

Seis livros distintos de Matemática serão arrumados em fila numa estante. De quantos modos isto pode ser feito se dois determinados livros não devem ficar lado a lado?

Questão 1.31

Quantas coleções não vazias e distintas podem ser formadas a partir de cinco maçãs idênticas e oito laranjas também idênticas?

Questão 1.32

Quantos são os divisores positivos de 64800? Destes, quantos são pares? E múltiplos de 30?

Questão 1.33

Existem quatro estradas ligando a cidade A à cidade B, três estradas ligando a cidade B à cidade C e duas estradas ligando A diretamente a C. Considere as afirmações:

1. Existem ao todo 14 rotas distintas ligando a cidade A à cidade C.
2. Existem 196 rotas distintas para se ir e voltar de A até C.
3. Existem 144 rotas distintas para se ir e voltar de A até C visitando B nos dois trajetos.
4. Existem 122 rotas distintas para se ir e voltar de A até C sem utilizar qualquer estrada duas vezes.

Quais sentenças são verdadeiras? Justifique.

Questão 1.34

Dez pessoas — A, B, C, D, E, F, G, H, I e J — participam da fundação de um clube de Matemática. A primeira tarefa é escolher um Presidente, um Secretário e um Tesoureiro, dentre as pessoas deste grupo, sem acúmulo de cargos. De quantos modos distintos pode ser feita a escolha se A se recusa a ser o Presidente e B se recusa a ser o Secretário?

Questão 1.35

Ao escrevermos todos os números inteiros de 1 até 2222, quantas vezes escrevemos o algarismo zero?

Questão 1.36

Escrevem-se os números de 1 a 8888. Quantas vezes o algarismo 8 é escrito?

Questão 1.37

Quantos são os números pares compreendidos entre 20000 e 70000 que possuem algarismos distintos?

Questão 1.38

Dispondo de 5 cores distintas, de quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

Questão 1.39

De um baralho comum de 52 cartas, extraem-se sucessivamente e **sem reposição** duas cartas. De quantos modos isto pode ser feito se:

a) a primeira carta é uma dama e a segunda não é um rei?

b) a primeira carta é uma dama e a segunda não é de espadas?

c) a primeira carta é de espadas e a segunda não é uma dama?

Questão 1.40

Um vagão de metrô possui 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar respeitando-se as preferências?

Questão 1.41

Um curso de línguas oferece aulas de Inglês, Espanhol e Francês, cada língua com duas aulas semanais em dias distintos, escolhidos dentre segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira, havendo exatamente duas aulas por dia. De quantos modos distintos podemos fazer o horário semanal?

Questão 1.42

Com relação aos números de cinco algarismos do sistema de numeração decimal, pergunta-se:

a) quantos são?

b) quantos são ímpares e de algarismos distintos?

c) quantos são pares e de algarismos distintos?

d) quantos apresentam exatamente um algarismo igual a 3?

e) quantos permanecem os mesmos quando a ordem dos seus algarismos é invertida (por exemplo, 16261)?

Questão 1.43

Define-se como anagrama qualquer sequência de letras do alfabeto latino. Com as letras a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l (12 letras), quantos anagramas de 7 letras podem ser feitos se:

a) é permitida a repetição de letras?

b) não é permitida a repetição de letras?

c) a letra **e** figura no anagrama e não há repetição de letras?

d) a letra **e** figura no anagrama e pode haver repetição de letras?

e) o anagrama é um palíndromo, isto é, não se altera quando lido de trás para a frente (com repetição permitida)?

Questão 1.44

Os números 14647, 10085 e 12531 possuem algo em comum: cada um deles possui cinco algarismos, começa com 1 e possui exatamente dois algarismos iguais. Quantos números deste tipo existem?

Questão 1.45

De quantos modos podemos organizar a tabela da 1ª rodada de um campeonato de futebol com 12 clubes?

Questão 1.46

Um baralho comum é constituído de quatro naipes (copas, espadas, ouros e paus), cada naipe com treze cartas distintas, num total de $4 \times 13 = 52$ cartas. Escolhem-se sucessivamente e **com reposição** 4 cartas.

a) De quantos modos isto pode ser feito de modo que pelo menos uma carta seja repetida?

b) De quantos modos, de modo que a quarta carta seja a única repetida?

c) De quantos modos, de modo que a quarta carta seja repetida, mas não seja a única repetição?

Questão 1.47

Escrevem-se números de cinco dígitos (inclusive os começados por zero) em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo, e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9 (e vice-versa), um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

Questão 1.48 **(IME 1990)**

Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias, de mão dupla, ligam as duas estradas principais, como "degraus" entre elas. Quantos caminhos sem autointerseções existem de A até B? (Um caminho sem autointerseção é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.)

Questão 1.49

No plano cartesiano, um peão se move de acordo com a seguinte regra: estando no ponto (x, y) pode ir para $(x+1, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x-1, y+1)$ ou $(x-1, y-1)$. Se o peão parte do ponto $(0, 0)$, quantas posições distintas ele poderá ocupar após seus n primeiros movimentos?

Questão 1.50

Quantos números de 4 algarismos têm todos os algarismos distintos?

Questão 1.51

No padrão Mercosul, uma placa tem 3 letras, 1 algarismo, 1 letra e 2 algarismos, nessa ordem (letras de um alfabeto de 26). Quantas placas são possíveis?

Questão 1.52

Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Questão 1.53 **(EN 2007)**

Um tapete de oito faixas deve ser pintado com as cores azul, preta e branca. A quantidade de maneiras de se pintar este tapete de modo que duas faixas consecutivas não sejam da mesma cor é: (A) 256 (B) 384 (C) 520 (D) 6561 (E) 8574

Questão 1.54 (OBM 2009)

Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542, pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

Questão 1.55 (IME 1979)

Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. De quantas maneiras diferentes todas as 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive?

Questão 1.56

Durante uma Copa do Mundo disputada por 24 países, as tampinhas de um refrigerante traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º Brasil, 2º Nigéria, 3º Holanda). Se em cada tampinha os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

Questão 1.57 (IME 1992)

Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

Questão 1.58

O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f\colon A \to B$? Quantas são as funções injetoras?

Questão 1.59

Em uma sala há 15 aparelhos distintos de ar-condicionado. Para manter o ar fresco, pelo menos um dos aparelhos deve estar ligado o tempo todo. De quantas maneiras é possível manter a sala fresca?

Questão 1.60 (AMC — adaptada)

O conjunto A possui 512 subconjuntos. Quantos elementos tem o conjunto A? E de quantas formas é possível iluminar uma sala que possui 6 lâmpadas independentes?

Questão 1.61 **(AMC — adaptada)**

Quantos inteiros de 1 a 9999 possuem pelo menos um algarismo igual a zero?

Questão 1.62 **(ITA 2003)**

O número de divisores de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

Questão 1.63

a) De quantos modos é possível colocar uma torre negra e uma torre branca em um tabuleiro de xadrez de maneira que elas não se ataquem? b) Qual seria a resposta com duas torres brancas iguais?

Questão 1.64

Quantos embrulhos não vazios é possível formar com cinco livros de matemática, três de física e dois de química, sendo iguais os livros de uma mesma matéria?

Questão 1.65

Quantas coleções não vazias de letras podem ser formadas com n letras A, n letras B, n letras C e n letras D?

Questão 1.66 **(EN 2010)**

No sistema decimal, a quantidade de números ímpares positivos menores que 1000, com todos os algarismos distintos, é: (A) 360 (B) 365 (C) 405 (D) 454 (E) 500

Questão 1.67 **(AMC — adaptada)**

Quantos números naturais de quatro algarismos distintos não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade?

Questão 1.68 **(OBM 2007)**

Um número de quatro dígitos é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números perobas existem?

Questão 1.69 **(OBM 2010)**

Cada uma das oito casas de um retângulo de duas linhas e quatro colunas é pintada de uma entre três cores. Uma coluna é chamada de *corte* se as suas duas casas são da mesma cor. De quantas maneiras é possível pintar o retângulo de modo que haja exatamente um corte?

Questão 1.70

De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente, e sem reposição, três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

Questão 1.71

Quantos números inteiros positivos com três algarismos distintos são múltiplos de 5 e têm soma dos algarismos ímpar?

Questão 1.72 (AFA 2016)

Uma caixa contém 10 bolas: 3 amarelas numeradas de 1 a 3, 3 verdes numeradas de 1 a 3 e 4 bolas de outras cores, todas distintas e sem numeração. De quantas formas distintas é possível enfileirar essas 10 bolas de modo que bolas de mesmo número fiquem juntas?

Questão 1.73 (OBM 1998)

De quantos modos se podem colocar numa tabela de duas linhas e três colunas duas letras A, duas letras B e duas letras C, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna?

Questão 1.74 (HMMT — adaptada)

De quantos modos podemos escolher, num tabuleiro 5×5, três casas de modo que não haja duas casas escolhidas na mesma linha nem na mesma coluna?

Questão 1.75 (OBM 2012)

Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes; dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? (Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas.)

Questão 1.76 (OBMEP 2019)

Um tabuleiro preenchido com as letras A, B, C e D é *bacana* se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado 2×2 do tabuleiro. Quantos tabuleiros bacanas 2×8 existem?

Questão 1.77 (OBMEP 2018)

Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 \times 0 = 0$. a) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6? b) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

Questão 1.78 (OBM 2013)

Determine o número de quádruplas ordenadas de inteiros positivos (x, y, z, w) que satisfazem $x \cdot y \cdot z \cdot w = 2013$.

Questão 1.79 (USC High School Math Contest 1993 — Carolina do Sul)

Denotando por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor do que ou igual a x (por exemplo, $\lfloor 2{,}769 \rfloor = 2$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$), calcule

$$\lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \lfloor \log_2 4 \rfloor + \cdots + \lfloor \log_2 99 \rfloor + \lfloor \log_2 100 \rfloor.$$

Questão 1.80 (OMERJ 2023)

O país da OMERJlândia é composto por duas ilhas A e B. É uma tradição que os habitantes da ilha A enviem presentes para os habitantes da ilha B no dia da OMERJ. Pela tradição, cada pessoa da ilha B recebe no máximo um presente e cada pessoa da ilha A envia no máximo um presente. Infelizmente, nem todos os habitantes da ilha A gostam de enviar presentes. Em 2023, 2/3 dos habitantes da ilha A enviaram presentes, enquanto 3/5 dos habitantes da ilha B receberam presentes. Qual fração da população total da OMERJlândia recebeu presentes?

Questão 1.81

Encontre o número de triplas ordenadas de conjuntos (A, B, C) tais que $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 2013\}$ e $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Questão 1.82

Determine o número de funções $f\colon \{1, 2, \ldots, 1999\} \to \{2000, 2001, 2002, 2003\}$ tais que $f(1) + f(2) + \cdots + f(1999)$ é ímpar.

Questão 1.83

Determine o número de funções $f : \{1, 2, \ldots, 1999\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ satisfazendo a condição de que $f(1) + f(2) + \cdots + f(1999)$ seja ímpar.

Questão 1.84 (Duke Math Meet — adaptada)

Quantos números naturais de cinco dígitos são múltiplos de 3 e têm 6 como um de seus dígitos?

Questão 1.85

Encontre a quantidade de números de dois dígitos $\overline{ab}$ que são divisíveis por ambos os seus dígitos.

Questão 1.86

Quantos são os números de cinco dígitos que são múltiplos de 3 e possuem 6 como um de seus dígitos?

Questão 1.87 (OBM 2000)

Quantos números de três algarismos possuem um algarismo que é a média aritmética dos outros dois?

Questão 1.88 (AIME 1992)

Para quantos pares de inteiros consecutivos no conjunto $\{1000, 1001, \ldots, 2000\}$ a operação de "vai um" não acontece quando somamos os dois números?

Questão 1.89 (Duke Math Meet 2020 — Carolina do Norte)

Uma "palavra duke" é uma palavra de 10 letras, formada apenas com letras do conjunto $\{D, U, K, E\}$, que contém o bloco consecutivo DUKE. Quantas palavras duke existem?

Questão 1.90 (OBM 2012)

Uma formiga deve caminhar ao longo das linhas de um quadriculado 5×5, do vértice A (canto inferior esquerdo) até o vértice B (canto superior direito), deslocando-se apenas um quadradinho para a direita ou para cima. Sabendo que a formiga não pode passar pelos vértices do quadradinho central (pintado de preto), determine o número de caminhos diferentes que a formiga pode percorrer.

Questão 1.91 **(OMERJ 2025 (Nível 3, Questão 6))**

Para cada número inteiro $n > 1$ queremos colorir os números $2, 3, \ldots, n$ com k cores de modo que se $a, b, c \in \{2, \ldots, n\}$ e $a \cdot b = c$, então a, b e c não podem ser os três da mesma cor. Denote por a_n o menor k para o qual isso é possível.

(a) Calcule a_{45}.

(b) Calcule a_{2025}.

Nota: é permitido $a = b$: se $a^2 \leq n$, então a e a^2 não podem ter ambos a mesma cor.

Questão 1.92

Quantos são os pares (a, b) de inteiros positivos com $\text{mmc}(a, b) = 1800$? E quantos são se a ordem do par não importar?

Questão 1.93

Três conjuntos A, B e C contidos num universo U repartem U em até oito regiões — uma para cada maneira de pertencer ou não a cada um dos três. Quantas dessas regiões podem ser não vazias em cada caso?

(a) $A \subseteq B \subseteq C$;

(b) A, B e C dois a dois disjuntos;

(c) $A \cap B \cap C = \varnothing$ e $A \cup B \cup C = U$;

(d) no caso *(c)*, com $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, de quantos modos podem ser escolhidos A, B e C?

Questão 1.94

Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

Questão 1.95

Quantos são os números de até 4 dígitos que não possuem o zero?

Questão 1.96

De quantas maneiras podemos escrever 360 como produto de três inteiros positivos, se a ordem dos fatores importa? E se não importar?

Questão 1.97 **(IME 2026)**

Uma relação binária R sobre um conjunto S é dita *antissimétrica* se e somente se, para quaisquer x e y elementos de S, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$. Determine o número de relações binárias antissimétricas existentes sobre um conjunto com n elementos.

Questão 1.98 **(IME 2020)**

Os modelos de placas de identificação de automóveis adotados no Brasil estão sendo atualizados: o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras, um algarismo, uma letra e dois algarismos). Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais; por exemplo, a sequência "20" aparece em IME2020 e em BRA5P20, e a sequência "A12" aparece em BRA1234 e em IME4A12. Considere a placa do modelo antigo IME2019 e seja P o conjunto das placas do modelo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P. Considere o alfabeto com 26 letras.

Questão 1.99 **(IME 2005)**

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico conforme a figura. Um ladrão observa de longe e percebe que a senha utilizada possui 4 dígitos, que o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha e que o segundo e o terceiro encontram-se na linha imediatamente superior. Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Questão 1.100 **(IME 1996)**

É dado um tabuleiro quadrado 4×4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são: andar um quadrado para a direita, para baixo ou na diagonal (para baixo e para a direita). De quantas maneiras isto é possível?

Questão 1.101 **(IME 1984)**

Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Questão 1.102 **(IME 1980)**

Um barco tem 8 lugares, numerados como no diagrama, e dispõe-se de 8 remadores (A a H) com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar; o remador C só pode sentar no lado par; os remadores D, E, F, G e H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

1	3	5	7
2	4	6	8

Questão 1.103 **(ITA 2021)**

Um relógio digital mostra o horário no formato $H{:}M{:}S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H, M, S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

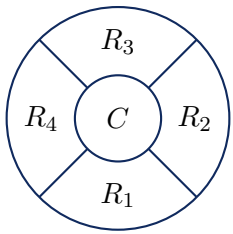
Questão 1.104 **(IME 2027)**

Considere os conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Quantas funções injetivas $f : X \to Y$ existem tais que, para dois elementos previamente fixados x_i e $x_j \in X$, $|f(x_i) - f(x_j)| \neq 1$?

(A) 4800 (B) 5040 (C) 5880 (D) 6480 (E) 6720

Questão 1.105

A figura mostra um mapa com cinco regiões: a região central C e as regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 ao redor dela, cada uma fazendo fronteira com a central e com as duas vizinhas. Dispõe-se de 4 cores. De quantos modos esse mapa pode ser pintado de maneira que duas regiões com fronteira comum recebam cores diferentes? Não é obrigatório usar todas as cores, e cada região recebe uma única cor.



Questão 1.106

Considere as funções $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, definidas no seu domínio natural, em que $a, b, c, d \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $ad - bc \neq 0$. Duas quádruplas (a, b, c, d) que definem a mesma lei correspondem à mesma função. Determine o número de funções distintas desse tipo cujo gráfico é simétrico em relação à reta $y = x$.

Questão 1.107

Considere os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Se Y' é um subconjunto de Y com três elementos, quantas são as funções $f\colon X \to Y'$ sobrejetoras?

b) Quantas funções $f\colon X \to Y$, não necessariamente injetoras, existem tais que $|f(i) - f(j)| \neq 1$ para quaisquer $i, j \in X$?

Respostas e Soluções

Questão 1.1 A viagem se decompõe em duas etapas: primeiro escolhemos um dos 5 caminhos de A até B **e**, em seguida, um dos 3 caminhos de B até C. Para cada escolha da primeira etapa há 3 possibilidades para a segunda; pelo MP: $5 \times 3 = 15$.

Resposta: 15 caminhos.

— Questão 1.2 **Para 25.** Como $x^2 \le 25$, basta testar $x \in \{0, \pm1, \dots, \pm5\}$ e ver quando $25 - x^2$ é quadrado perfeito. Isso só acontece para $x^2 \in \{0, 9, 16, 25\}$, o que dá as decomposições $25 = 0 + 25 = 9 + 16 = 16 + 9 = 25 + 0$. Cada uma produz os pares com todos os sinais possíveis:

$$(\pm5, 0), \quad (0, \pm5), \quad (\pm3, \pm4), \quad (\pm4, \pm3),$$

isto é, $2 + 2 + 4 + 4 = 12$ pares. Geometricamente, são os 12 pontos de coordenadas inteiras sobre a circunferência de raio 5.

Para 2027. Aqui não adianta procurar: não há nenhum. Todo quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4, pois $(2k)^2 = 4k^2$ e $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$. Somando dois quadrados, os restos possíveis são $0+0$, $0+1$, $1+0$ e $1+1$, ou seja, x^2+y^2 deixa resto 0, 1 ou 2 — *nunca* 3. E $2027 = 4 \cdot 506 + 3$ deixa resto 3.

Resposta: 12 pares para 25; nenhum para 2027.

— Questão 1.3 Subir e descer livremente: $5 \times 5 = 25$. Por caminhos diferentes: $5 \times 4 = 20$.

Resposta: 25 maneiras; 20 com caminhos distintos.

— Questão 1.4 Primeira escolha: $20 \times 24 = 480$. Após retirar uma ovelha e um porco: $19 \times 23 = 437$.

Resposta: 480; depois, 437.

— Questão 1.5 O tabuleiro tem 32 casas brancas e 32 pretas: $32 \times 32 = 1024$. Sem restrição de cor, escolhem-se duas casas distintas (ordenadamente, uma "primeira" e uma "segunda"): $64 \times 63 = 4032$.

Resposta: 1024; sem restrição, 4032.

— Questão 1.6 Escolhida a casa branca (32 modos), sua linha contém 4 casas pretas e sua coluna outras 4; restam $32 - 8 = 24$ casas pretas permitidas: $32 \times 24 = 768$.

Resposta: 768 maneiras.

— Questão 1.7 Luva esquerda: 6 modos; luva direita de tamanho diferente: 5 modos: $6 \times 5 = 30$.

Resposta: 30 maneiras.

— **Questão 1.8** Separamos por tipo de compra (AP), usando o MP em cada caso: três volumes avulsos: $6\times3\times4 = 72$; o volume duplo (R+N) e um *Pais e Filhos*: $5 \times 4 = 20$; o volume duplo (N+P) e um *Rudin*: $7 \times 6 = 42$. Total: $72 + 20 + 42 = 134$.

Resposta: 134 modos.

— **Questão 1.9** Acrescenta-se o caso: volume duplo (R+P) e um *Ninho de Fidalgos*: $3 \times 3 = 9$. Total: $134 + 9 = 143$.

Resposta: 143 modos.

— **Questão 1.10** Se Ivan toma uma maçã, restam 11 maçãs e 10 laranjas: Nadia escolhe de $11\times10 = 110$ modos. Se Ivan toma uma laranja: $12\times9 = 108$ modos.

Resposta: Quando Ivan toma uma maçã (110 contra 108).

— **Questão 1.11** Sem restrição: $6 \times 8 \times 10 = 480$. Com pelo menos dois "1": contamos por pares que mostram 1, deixando o terceiro livre: 1^o e 2^o: $1 \times 1 \times 10 = 10$; 1^o e 3^o: $1 \times 8 \times 1 = 8$; 2^o e 3^o: $6 \times 1 \times 1 = 6$. A soma $10 + 8 + 6 = 24$ conta o caso "três 1" três vezes (uma em cada parcela); descontamos duas: $24 - 2 = 22$.

Resposta: 480 maneiras; 22 com pelo menos dois "1".

— **Questão 1.12** As faixas são ordenadas (superior, média, inferior): $5\times4\times3 = 60$. Com uma faixa vermelha: escolhe-se a posição do vermelho (3 modos) e as outras duas faixas com as 4 cores restantes: $4 \times 3 = 12$: $3 \times 12 = 36$.

Resposta: 60 bandeiras; 36 com faixa vermelha.

— **Questão 1.13** Um dicionário traduz *de* um idioma *para* outro; para traduções diretas em ambos os sentidos são necessários dois dicionários por par de idiomas (por exemplo, russo–francês e francês–russo). Assim, precisamos de um dicionário para cada *par ordenado* de idiomas distintos:

o idioma de origem pode ser escolhido de 5 modos e, para cada origem, o idioma de destino de 4 modos. Pelo MP:

$$5 \times 4 = 20.$$

Resposta: 20 dicionários.

Questão 1.14 Com 10 idiomas: $10 \times 9 = 90$. Acréscimo: $90 - 20 = 70$.

Resposta: 70 dicionários.

Questão 1.15 Uma carta de cada um dos 4 naipes: $13^4 = 28\,561$. Sem valores repetidos: o primeiro naipe tem 13 opções, o segundo 12 (exclui o valor já usado), o terceiro 11 e o quarto 10: $13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17\,160$.

Resposta: 28 561; sem valores repetidos, 17 160.

Questão 1.16 Escolhe-se o valor comum das duas cartas vermelhas (copas e ouros): 13 modos; e o valor comum das duas pretas (espadas e paus): 13 modos: $13 \times 13 = 169$.

Resposta: 169 modos.

Questão 1.17 Um nome: 300 modos; dois nomes ordenados: $300 \times 299 = 89\,700$; três: $300 \times 299 \times 298 = 26\,730\,600$. Pelo AP:

$$300 + 89\,700 + 26\,730\,600 = 26\,820\,600.$$

Resposta: 26 820 600 formas.

Questão 1.18 Decompomos a entrega em 6 etapas: para a 1ª carta, escolhemos um dos 3 mensageiros; para a 2ª carta, novamente um dos 3 (o mesmo mensageiro pode levar várias cartas); e assim por diante, até a 6ª carta. Pelo MP:

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{6 \text{ fatores}} = 3^6 = 729.$$

Atenção ao papel de cada número: é "para cada *carta*, um mensageiro" (base 3, expoente 6), e não o contrário — 6^3 contaria outra coisa.

Resposta: 729 maneiras.

Questão 1.19 Um "sinal" da estação é a configuração conjunta dos m semáforos. Examinemos os casos pequenos: com $m = 1$ semáforo há 3 sinais (vermelho, amarelo, verde); com $m = 2$, cada um dos 3 estados do primeiro combina-se com os 3 do segundo: $3 \times 3 = 9$ sinais. Em geral, cada semáforo é uma etapa com 3 opções, independentes entre si; pelo MP,

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{m \text{ fatores}} = 3^m.$$

Resposta: 3^m sinais.

Questão 1.20 As quantidades possíveis de dentes são $0, 1, 2, \ldots, 32$: são 33 valores; cada habitante deve ter um valor diferente.

Resposta: 33 habitantes.

Questão 1.21 Partes literais: $32 + 32^2 + 32^3 = 32 + 1024 + 32\,768 = 33\,824$. Cada uma combina-se com 10^4 sequências de algarismos:

$$33\,824 \times 10^4 = 338\,240\,000.$$

Resposta: 338 240 000 placas.

Questão 1.22 A pessoa pode entrar por qualquer uma das 4 portas **e** sair por qualquer uma das 4 portas. Pelo MP: $4 \times 4 = 16$.

Resposta: 16 maneiras.

Questão 1.23 Cada dado tem 6 faces; pelo MP: $6 \times 6 = 36$ resultados. Se os resultados devem ser diferentes, o segundo dado tem apenas 5 opções: $6 \times 5 = 30$.

Resposta: 36 resultados; 30 com faces diferentes.

Questão 1.24 Para a ida há 4 escolhas de meio de transporte; para a volta, qualquer meio exceto o da ida: 3 escolhas. Pelo MP: $4 \times 3 = 12$.

Resposta: 12 maneiras.

Questão 1.25 Cada lançamento tem 2 resultados possíveis; pelo MP o total é

$$2^{100} = \left(2^{10}\right)^{10} \approx \left(10^{3}\right)^{10} = 10^{30}.$$

Resposta: Cerca de 10^{30} sequências.

Questão 1.26 São números de 9 algarismos com sete 1's, um 2 e um 3. Basta escolher a posição do 2 (9 modos) e a posição do 3 (8 modos restantes); as demais posições recebem 1:

$$9 \times 8 = 72.$$

Resposta: 72 números.

Questão 1.27 A primeira casa pode receber qualquer uma das 4 cores. Cada casa seguinte pode receber qualquer cor exceto a da casa anterior: 3 opções. Pelo MP:

$$4 \times 3^{6} = 4 \times 729 = 2916.$$

Resposta: 2916 modos.

Questão 1.28 Sistema novo: $26^3 \times 10^4$ placas; sistema antigo: $26^2 \times 10^4$ placas. A diferença é

$$26^3 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10^4 = 26^2 \cdot 10^4(26 - 1) = 676 \cdot 25 \cdot 10^4 = 169\,000\,000.$$

Resposta: 169 milhões de veículos a mais.

Questão 1.29 Um par Matemática–Física pode ser escolhido de $5 \times 6 = 30$ modos; um par Matemática–Química, de $5 \times 8 = 40$ modos; um par Física–Química, de $6 \times 8 = 48$ modos. Pelo AP:

$$30 + 40 + 48 = 118.$$

Resposta: 118 pares.

Questão 1.30 Total de arrumações: $6! = 720$. Arrumações com os dois livros juntos: tratando o par como um bloco, $5! \times 2! = 240$. Logo,

$$720 - 240 = 480.$$

Resposta: 480 modos.

Questão 1.31 Como as maçãs são idênticas entre si e as laranjas são idênticas entre si, uma coleção fica determinada apenas pelas quantidades de maçãs (0 a 5: 6 opções) e de laranjas (0 a 8: 9 opções). Pelo MP: $6 \times 9 = 54$ coleções. Excluindo a coleção vazia: $54 - 1 = 53$.

Resposta: 53 coleções.

Questão 1.32 Fatorando: $64800 = 648 \times 100 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2$.

Todo divisor tem a forma $2^a 3^b 5^c$ com $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 2$. Pelo MP: $(5+1)(4+1)(2+1) = 90$ divisores.

Pares: $a \ge 1$, logo $5 \times 5 \times 3 = 75$.

Múltiplos de 30: como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, precisamos de $a \ge 1$, $b \ge 1$, $c \ge 1$: $5 \times 4 \times 2 = 40$.

Resposta: 90 divisores; 75 pares; 40 múltiplos de 30.

Questão 1.33 **(1)** De A a C via B: $4 \times 3 = 12$ rotas; diretamente: 2 rotas. Pelo AP: $12 + 2 = 14$. **Verdadeira.**

(2) Ida: 14 opções; volta: 14 opções. Pelo MP: $14^2 = 196$. **Verdadeira.**

(3) Ida via B: 12; volta via B: 12. Total $12 \times 12 = 144$. **Verdadeira.**

(4) Contamos ida e volta sem repetir estrada. *Ida via B* (12 modos): volta via B sem repetir estradas: $2 \times 3 = 6$ modos (restam 2 estradas $C-B$ e 3 estradas $B-A$); volta direta: 2 modos. Subtotal: $12 \times (6+2) = 96$. *Ida direta* (2 modos): volta direta sem repetir: 1 modo; volta via B: 12 modos. Subtotal: $2 \times (1 + 12) = 26$. Total: $96 + 26 = 122$. **Verdadeira.**

Resposta: Todas as quatro sentenças são verdadeiras.

Questão 1.34 Sem restrições: $10 \times 9 \times 8 = 720$ escolhas. Seja X o conjunto das escolhas com A na presidência ($9 \times 8 = 72$) e Y com B na secretaria ($9 \times 8 = 72$); escolhas com A presidente *e* B secretário: $|X \cap Y| =$

8. Por inclusão–exclusão, as escolhas proibidas somam $72 + 72 - 8 = 136$, restando

$$720 - 136 = 584.$$

Resposta: 584 modos.

Questão 1.35 Contamos o zero em cada posição.

Unidades: $10, 20, \ldots, 2220$: $\dfrac{2220 - 10}{10} + 1 = 222$ zeros.

Dezenas: números da forma $\overline{*0*}$ com centenas 1 a 9 (90 números de 100–999), 1000–1999 (100 números) e 2000–2222 (2000–2009, 2100–2109, 2200–2209: 30 números): $90 + 100 + 30 = 220$ zeros.

Centenas: 1000–1099 e 2000–2099: $100 + 100 = 200$ zeros.

Total: $222 + 220 + 200 = 642$.

Resposta: 642 vezes.

Questão 1.36 *Unidades* $(8, 18, \ldots, 8888)$: $\dfrac{8888 - 8}{10} + 1 = 889$.

Dezenas: blocos 80–89, 180–189, ...; até 8888 há $88 \times 10 + 9 = 889$ ocorrências (8880–8888 contribui com 9).

Centenas: 800–899, 1800–1899, ...: $8 \times 100 + 89 = 889$ ocorrências (8800–8888 contribui com 89).

Milhares: 8000–8888: 889 ocorrências.

Total: $889 \times 4 = 3556$.

Resposta: 3556 vezes.

Questão 1.37 Números $\overline{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5}$ com $d_1 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, d_5 par e todos os algarismos distintos.

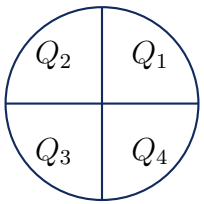
Caso 1: d_1 par ($d_1 \in \{2, 4, 6\}$, 3 modos): d_5 par e $d_5 \neq d_1$: 4 modos; d_2, d_3, d_4 escolhidos entre os 8 algarismos restantes: $8 \times 7 \times 6 = 336$. Subtotal: $3 \times 4 \times 336 = 4032$.

Caso 2: d_1 ímpar ($d_1 \in \{3, 5\}$, 2 modos): d_5 par: 5 modos; d_2, d_3, d_4: 336. Subtotal: $2 \times 5 \times 336 = 3360$.

Total: $4032 + 3360 = 7392$.

Resposta: 7392 números.

Questão 1.38 Os 4 quadrantes formam um ciclo $Q_1Q_2Q_3Q_4$, em que cada um faz fronteira com o anterior e o seguinte (quadrantes opostos se tocam apenas no centro, e podem ter a mesma cor).



Q_1 faz fronteira com Q_2 e Q_4; os pares opostos (Q_1, Q_3) e (Q_2, Q_4) não têm fronteira comum.

Colorimos Q_1 (5 modos) e Q_2 (4 modos). Separamos em casos conforme Q_3:

Q_3 com cor diferente de Q_1: 3 modos; então $Q_4 \neq Q_3$ e $Q_4 \neq Q_1$: 3 modos. Subtotal: $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$.

Q_3 com a mesma cor de Q_1: 1 modo; então Q_4 só precisa diferir dessa cor: 4 modos. Subtotal: $5 \times 4 \times 1 \times 4 = 80$.

Total: $180 + 80 = 260$.

Resposta: 260 modos.

Questão 1.39 **a)** Primeira carta: 4 damas. Segunda: das 51 restantes, excluem-se os 4 reis: 47 opções. Total: $4 \times 47 = 188$.

b) *Caso 1:* a primeira é a dama de espadas (1 modo); a segunda não pode ser de espadas: $51-12 = 39$ opções. Subtotal: 39. *Caso 2:* a primeira é dama de outro naipe (3 modos); a segunda não pode ser de espadas: $51 - 13 = 38$ opções. Subtotal: $3 \times 38 = 114$. Total: $39 + 114 = 153$.

c) *Caso 1:* a primeira é a dama de espadas (1 modo); a segunda não pode ser dama: $51 - 3 = 48$ opções. Subtotal: 48. *Caso 2:* a primeira é outra carta de espadas (12 modos); a segunda não pode ser dama: $51-4 = 47$ opções. Subtotal: $12 \times 47 = 564$. Total: $48 + 564 = 612$.

Resposta: a) 188; b) 153; c) 612 modos.

Questão 1.40 Os 4 que preferem frente escolhem, ordenadamente, 4 dos 5 bancos de frente: $5\times4\times3\times2 = 120$ modos. Os 3 que preferem costas: $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos. Restam 3 passageiros para os 3 bancos restantes (1 de frente e 2 de costas): $3! = 6$ modos. Pelo MP:

$$120 \times 60 \times 6 = 43\,200.$$

Resposta: 43 200 modos.

Questão 1.41 São 6 aulas para 3 dias × 2 horários = 6 posições. Cada língua ocupa um par de dias distintos. Para que cada dia receba exatamente 2 aulas, as três línguas devem ocupar os três pares de dias distintos {seg, qua}, {seg, sex}, {qua, sex}: a atribuição dos pares às línguas pode ser feita de 3! = 6 modos. Em cada dia, as duas aulas (de línguas diferentes) podem ser ordenadas nos dois horários de 2 modos: $2^3 = 8$. Pelo MP:

$$6 \times 8 = 48.$$

Resposta: 48 modos.

Questão 1.42 **a)** De 10000 a 99999: $9 \times 10^4 = 90\,000$ números.

b) O algarismo das unidades deve ser ímpar: 5 opções. O primeiro algarismo: não pode ser 0 nem igual à unidade: 8 opções. Os três algarismos centrais: $8 \times 7 \times 6 = 336$ arrumações com os dígitos restantes. Total: $5 \times 8 \times 336 = 13\,440$.

c) Caso unidade = 0: primeiro algarismo com 9 opções e centrais $8 \times 7 \times 6 = 336$: $9 \times 336 = 3024$. Caso unidade $\in \{2, 4, 6, 8\}$ (4 opções): primeiro algarismo com 8 opções (não pode ser 0 nem a unidade) e centrais 336: $4 \times 8 \times 336 = 10\,752$. Total: $3024 + 10\,752 = 13\,776$.

d) (Não se exige algarismos distintos.) Se o 3 ocupa a primeira posição, as demais quatro posições não podem conter 3: $9^4 = 6561$. Se o 3 ocupa uma das outras 4 posições, o primeiro algarismo tem 8 opções (nem 0 nem 3) e as três posições restantes 9^3 opções cada conjunto: $4 \times 8 \times 9^3 = 4 \times 8 \times 729 = 23\,328$. Total: $6561 + 23\,328 = 29\,889$.

e) O número é um palíndromo $\overline{abcba}$: $a \neq 0$ com 9 opções, b e c livres com 10 opções cada: $9 \times 10 \times 10 = 900$.

Resposta: a) 90000; b) 13440; c) 13776; d) 29889; e) 900.

Questão 1.43 **a)** Cada uma das 7 posições tem 12 opções: $12^7 = 35\,831\,808$.

b) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,991\,680$.

c) Escolhe-se a posição da letra e: 7 modos; as demais 6 posições são preenchidas com 6 das 11 letras restantes, sem repetição: $11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 332\,640$. Total: $7 \times 332\,640 = 2\,328\,480$.

d) Contagem complementar: total com repetição menos anagramas sem a letra e:

$$12^7 - 11^7 = 35\,831\,808 - 19\,487\,171 = 16\,344\,637.$$

e) Num palíndromo de 7 letras, as posições 5, 6 e 7 são espelho das posições 3, 2 e 1; ficam livres as posições 1 a 4: $12^4 = 20\,736$.

Resposta: a) $12^7 = 35\,831\,808$; b) $3\,991\,680$; c) $2\,328\,480$; d) $16\,344\,637$; e) $20\,736$.

Questão 1.44 Números $\overline{1d_2d_3d_4d_5}$ com exatamente um par de algarismos iguais.

Caso 1: o algarismo repetido é o 1. Escolhe-se a posição do segundo 1 entre as 4 restantes: 4 modos. As outras 3 posições recebem algarismos distintos, diferentes de 1: escolhem-se 3 valores dentre 9 ($\binom{9}{3} = 84$) e arrumam-se ($3! = 6$): $84 \times 6 = 504$. Subtotal: $4 \times 504 = 2016$.

Caso 2: o algarismo repetido não é o 1. Escolhe-se o algarismo: 9 modos; as duas posições que ele ocupa: $\binom{4}{2} = 6$ modos; as duas posições restantes recebem algarismos distintos, diferentes de 1 e do repetido: $8 \times 7 = 56$ modos. Subtotal: $9 \times 6 \times 56 = 3024$.

Total: $2016 + 3024 = 5040$.

Resposta: 5040 números.

Questão 1.45 Na primeira rodada os 12 clubes formam 6 partidas. Escolhendo os pares sucessivamente:

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 66 \cdot 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 7\,484\,400.$$

Como a ordem em que os 6 pares foram escolhidos não importa, dividimos por $6! = 720$:

$$\frac{7\,484\,400}{720} = 10\,395.$$

Resposta: 10 395 modos (se a ordem das partidas na tabela importar, $10\,395 \times 720 = 7\,484\,400$ modos).

Questão 1.46 **a)** Complementar: total − (todas diferentes):

$$52^4 - 52 \times 51 \times 50 \times 49 = 7\,311\,616 - 6\,497\,400 = 814\,216.$$

b) As três primeiras são todas diferentes e a quarta coincide com exatamente uma delas: escolhem-se as três primeiras ($52 \times 51 \times 50$ modos) e qual delas é repetida na quarta posição (3 modos):

$$3 \times 52 \times 51 \times 50 = 397\,800.$$

c) A quarta carta repete alguma anterior, e há outra repetição entre as três primeiras. Casos, segundo os valores das 4 cartas:

Dois pares $(2+2)$: escolhem-se os dois valores, $\binom{52}{2}$ modos; qual deles ocupa a quarta posição, 2 modos; a posição, entre as três primeiras, da carta igual à quarta, 3 modos: $\binom{52}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 7956$.

Trinca $(3+1)$: escolhe-se o valor repetido (52), as duas posições entre as três primeiras que coincidem com a quarta ($\binom{3}{2} = 3$) e a carta distinta (51): $52 \cdot 3 \cdot 51 = 7956$.

Quadra: todas iguais: 52 modos.

Total: $7956 + 7956 + 52 = 15\,964$.

Resposta: a) 814 216; b) 397 800; c) 15 964 modos.

Questão 1.47 Há $10^5 = 100\,000$ números. Um cartão pode ser "aproveitado" de cabeça para baixo quando todos os seus dígitos pertencem a $\{0, 1, 8, 6, 9\}$: são $5^5 = 3125$ números desse tipo. Dentre eles, alguns coincidem com a própria leitura invertida: para isso é preciso que d_5, d_4, d_3 sejam as inversões de d_1, d_2, d_3; escolhem-se livremente d_1, d_2 (5 modos cada) e d_3 autoinvertível ($\{0, 1, 8\}$: 3 modos): $5 \times 5 \times 3 = 75$ números.

Assim, $3125 - 75 = 3050$ números agrupam-se em pares representáveis por um mesmo cartão: economizam-se $3050/2 = 1525$ cartões. Número mínimo:

$$100\,000 - 1525 = 98\,475.$$

Resposta: 98 475 cartões.

Questão 1.48 Um caminho sem autointerseção deve avançar sempre de A para B: se voltasse, para retomar o avanço teria de reutilizar um trecho já percorrido. Assim, o caminho fica determinado por: (i) a estrada principal em que se inicia (2 modos); (ii) o subconjunto das estradas secundárias utilizadas para trocar de estrada principal (cada troca usa uma estrada secundária, e qualquer subconjunto das 10 determina um caminho válido): 2^{10} modos. Pelo MP:

$$2 \times 2^{10} = 2048.$$

Resposta: 2048 caminhos.

Questão 1.49 Examinemos primeiro os casos pequenos. Para $n = 1$, o peão está em um dos 4 pontos $(\pm 1, \pm 1)$. Para $n = 2$, cada coordenada pode ter variado de -2, 0 ou $+2$, e verificamos que todos os 9 pontos com $x, y \in \{-2, 0, 2\}$ são atingíveis.

n	posições possíveis	total
1	$(\pm 1, \pm 1)$	$4 = 2^2$
2	$x, y \in \{-2, 0, 2\}$	$9 = 3^2$
3	$x, y \in \{-3, -1, 1, 3\}$	$16 = 4^2$

O padrão $2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ sugere $(n+1)^2$. Provemos: a cada movimento, tanto x quanto y variam de ± 1. Logo, após n movimentos, x e y têm ambos a mesma paridade de n, com $|x| \leq n$ e $|y| \leq n$. Reciprocamente, todo ponto (x, y) com $x \equiv y \equiv n \pmod 2$, $|x| \leq n$, $|y| \leq n$ é atingível: as variações de x e de y podem ser escolhidas de forma independente (os quatro movimentos realizam todas as combinações de sinais).

Os valores possíveis de x são $-n, -n+2, \ldots, n-2, n$: são $n+1$ valores; o mesmo para y. Pelo MP:

$$(n+1) \times (n+1) = (n+1)^2.$$

Resposta: $(n+1)^2$ posições.

Questão 1.50 O primeiro algarismo não pode ser 0 (9 opções); os seguintes apenas devem ser novos: $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.

Resposta: 4536 números.

Questão 1.51 Pelo Princípio Multiplicativo: $26^3 \times 10 \times 26 \times 10^2 = 26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$.

Resposta: 456976000 placas.

Questão 1.52 Primeira listra: 3 cores; cada listra seguinte: qualquer cor exceto a da anterior: 2 opções. Pelo MP: $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$.

Resposta: 24 modos.

Questão 1.53 A primeira faixa admite 3 cores; cada faixa seguinte, qualquer cor exceto a da anterior: 2 opções. Pelo MP:

$$3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384.$$

Resposta: Alternativa (B): 384.

Questão 1.54 Centena maior que 3: $\{4, \ldots, 9\}$, 6 opções; dezena maior que 1: $\{2, \ldots, 9\}$, 8 opções; unidade maior que 4: $\{5, \ldots, 9\}$, 5 opções. Pelo MP: $6 \times 8 \times 5 = 240$.

Resposta: 240 números.

Questão 1.55 Uma "maneira de desembarcar" fica completamente descrita dizendo em qual parada desce cada uma das 7 pessoas. Decompomos, então, o evento em 7 etapas: a 1ª pessoa escolhe uma das 4 paradas; a 2ª pessoa também escolhe uma das 4 paradas (várias pessoas podem descer na mesma parada); e assim por diante até a 7ª pessoa. As escolhas são independentes, e pelo MP:

$$\underbrace{4 \times 4 \times \cdots \times 4}_{7 \text{ fatores}} = 4^7 = 16\,384.$$

Note que quem "escolhe" é a pessoa (7 etapas) e o que se escolhe é a parada (4 opções): a resposta é 4^7, e não 7^4.

Resposta: 16 384 maneiras.

Questão 1.56 A ordem importa (são posições distintas do pódio):

$$24 \times 23 \times 22 = 12\,144.$$

Resposta: 12 144 tampinhas.

Questão 1.57 Primeiro algarismo: 1 a 6 (6 opções); segundo: qualquer dos 7 exceto o primeiro (6); terceiro: 5. Pelo MP: $6 \times 6 \times 5 = 180$.

Resposta: 180 números.

Questão 1.58 Cada elemento de A escolhe livremente sua imagem: $7^4 = 2401$ funções. Injetoras: as imagens são distintas: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Resposta: 2401 funções; 840 injetoras.

Questão 1.59 Cada aparelho pode estar ligado ou desligado: 2^{15} configurações; exclui-se a configuração com todos desligados:

$$2^{15} - 1 = 32\,767.$$

Resposta: 32 767 maneiras.

Questão 1.60 Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos (cada elemento entra ou não entra: MP). De $2^n = 512 = 2^9$ vem $n = 9$.

Para as lâmpadas: cada uma pode estar ligada ou desligada, $2^6 = 64$ configurações; para a sala estar *iluminada*, exclui-se a configuração com todas apagadas: $64 - 1 = 63$.

Resposta: 9 elementos; 63 formas.

Questão 1.61 Contagem complementar: contamos os que *não* têm zero. Com 1 algarismo: 9; com 2: $9^2 = 81$; com 3: $9^3 = 729$; com 4: $9^4 = 6561$. Total sem zero: $9 + 81 + 729 + 6561 = 7380$. Logo, com pelo menos um zero:

$$9999 - 7380 = 2619.$$

Resposta: 2619 números.

Questão 1.62 Fatorando: $17\,640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$. Um divisor $2^a 3^b 5^c 7^d$ é múltiplo de 3 quando $b \geq 1$:

$$4 \times 2 \times 2 \times 3 = 48.$$

Resposta: 48 divisores.

Questão 1.63 **a)** A primeira torre ocupa qualquer das 64 casas; a segunda não pode ficar na mesma linha nem na mesma coluna: $64-15 = 49$ casas. Total: $64 \times 49 = 3136$.

b) Torres indistinguíveis: cada posição foi contada duas vezes: $3136/2 = 1568$.

Resposta: a) 3136; b) 1568 modos.

Questão 1.64 Quantidades: matemática de 0 a 5 (6 opções), física de 0 a 3 (4), química de 0 a 2 (3): $6 \times 4 \times 3 = 72$; excluindo o embrulho vazio: $72 - 1 = 71$.

Resposta: 71 embrulhos.

Questão 1.65 Uma coleção fica determinada pelas quantidades de cada letra, de 0 a n: $(n+1)^4$ possibilidades, menos a coleção vazia:

$$(n+1)^4 - 1.$$

Resposta: $(n+1)^4 - 1$ coleções.

Questão 1.66 *Um algarismo:* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: 5 números.

Dois algarismos: unidade ímpar (5 modos); dezena não nula e diferente da unidade (8): $5 \times 8 = 40$.

Três algarismos: unidade ímpar (5); centena não nula e $\neq$ unidade (8); dezena diferente das duas (8): $5 \times 8 \times 8 = 320$.

Total: $5 + 40 + 320 = 365$.

Resposta: Alternativa (B): 365.

Questão 1.67 As paridades devem alternar: padrão PIPI (par, ímpar, par, ímpar) ou padrão IPIP. Pares: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$; ímpares: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

PIPI: 1º algarismo par e não nulo: 4 modos; 2º ímpar: 5; 3º par $\neq$ 1º: 4; 4º ímpar $\neq$ 2º: 4. Subtotal: $4 \times 5 \times 4 \times 4 = 320$.

IPIP: $5 \times 5 \times 4 \times 4 = 400$.

Total: $320 + 400 = 720$.

Resposta: 720 números.

Questão 1.68 Contagem complementar: número total de 4 dígitos: 9000. Não perobas são os de paridades alternadas: padrão ÍMPAR-PAR-ÍMPAR-PAR: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$; padrão PAR-ÍMPAR-PAR-ÍMPAR

(primeiro dígito par não nulo): $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$. Total alternante: 1125. Perobas:

$$9000 - 1125 = 7875.$$

Resposta: 7875 números.

Questão 1.69 Escolhe-se a coluna do corte: 4 modos; sua cor: 3 modos. Cada uma das outras 3 colunas deve ter casas de cores diferentes: $3 \times 2 = 6$ modos por coluna. Pelo MP:

$$4 \times 3 \times 6^3 = 4 \times 3 \times 216 = 2592.$$

Resposta: 2592 maneiras.

Questão 1.70 Separamos em casos conforme a primeira carta:

1ª é o rei de copas (1 modo): restam 3 reis para a segunda; a terceira exclui as 4 damas dentre as 50 restantes: 46. Subtotal: $1 \times 3 \times 46 = 138$.

1ª é a dama de copas (1 modo): segunda: 4 reis; terceira: excluem-se as 3 damas restantes: 47. Subtotal: $1 \times 4 \times 47 = 188$.

1ª é outra carta de copas (11 modos): segunda: 4 reis; terceira: excluem-se as 4 damas: 46. Subtotal: $11 \times 4 \times 46 = 2024$.

Total: $138 + 188 + 2024 = 2350$.

Resposta: 2350 extrações.

Questão 1.71 O algarismo das unidades é 0 ou 5.

Unidades $= 0$*:* o número é $\overline{ab0}$; como os algarismos são distintos e a é o algarismo inicial, temos $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$ com $a \neq b$. A soma $a + b$ deve ser ímpar: um dos dois é par e o outro ímpar (e nesse caso $a \neq b$ é automático). a ímpar (5 opções) e b par não nulo (4): 20; a par (4) e b ímpar (5): 20. Subtotal: 40.

Unidades $= 5$*:* número $\overline{ab5}$, $a \neq 0$, $a, b \neq 5$, $a \neq b$; soma $a + b + 5$ ímpar $\Rightarrow a + b$ par: mesmos pares de paridade. Ambos ímpares ($\neq 5$): $4 \times 3 = 12$; ambos pares (b pode ser 0): $4 \times 4 = 16$. Subtotal: 28.

Total: $40 + 28 = 68$.

Resposta: 68 números.

Questão 1.72 Os pares (amarela i, verde i), $i = 1, 2, 3$, formam blocos; cada bloco admite 2 ordens internas. Enfileiram-se 7 objetos (3 blocos + 4 bolas avulsas): 7! modos. Total:

$$7! \times 2^3 = 5040 \times 8 = 40\,320.$$

Resposta: 40 320 formas.

Questão 1.73 Cada coluna recebe um par de letras distintas; como cada letra aparece duas vezes, os três pares devem ser $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, atribuídos às colunas de $3! = 6$ modos. Em cada coluna, as duas letras ordenam-se de 2 modos: $2^3 = 8$. Total: $6 \times 8 = 48$.

Resposta: 48 modos.

Questão 1.74 Escolhem-se as 3 linhas ($\binom{5}{3} = 10$ modos) e as 3 colunas ($\binom{5}{3} = 10$ modos) que conterão as casas; em seguida, associa-se cada linha escolhida a uma coluna escolhida (uma bijeção): $3! = 6$ modos. Pelo MP:

$$10 \times 10 \times 6 = 600.$$

Resposta: 600 modos.

Questão 1.75 Para cada cor há 10 lâmpadas (uma por círculo), e as escolhas das quatro cores são independentes. Por cor, qualquer subconjunto não vazio das suas 10 lâmpadas pode estar aceso: $2^{10} - 1$ modos. Total:

$$\left(2^{10} - 1\right)^4.$$

Resposta: $(2^{10} - 1)^4$ modos.

Questão 1.76 Preenchemos o tabuleiro coluna a coluna, da esquerda para a direita. As duas primeiras colunas formam o primeiro quadrado 2×2, que deve conter as quatro letras: são $4! = 24$ preenchimentos possíveis.

Agora observe a etapa de acréscimo de uma nova coluna: junto com a coluna anterior ela forma um novo quadrado 2×2, que também deve conter as quatro letras. Como a coluna anterior já usa duas letras distintas, a

nova coluna deve conter *exatamente as duas letras que faltam* — e só resta escolher em qual ordem (em cima/embaixo): 2 maneiras. Essa escolha, automaticamente, também garante a condição, e nada mais é exigido.

Das 8 colunas, as duas primeiras usam $4! = 24$ modos e cada uma das 6 colunas seguintes dá 2 opções. Pelo MP:

$$4! \times 2^6 = 24 \times 64 = 1536.$$

Resposta: 1536 tabuleiros.

Questão 1.77 a) Seja $abc6$ interessante: $a \cdot b \cdot c = 6$. Pelo menos um dos algarismos é 1 (pois $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 6$). Se apenas um é 1, os outros são 2 e 3: permutando, $3! = 6$ possibilidades. Se dois são 1, o outro é 6: basta escolher sua posição, 3 possibilidades. Total: $6 + 3 = 9$.

b) Seja $abcd0$ interessante: basta que $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$, isto é, que algum de b, c, d seja 0 (note que $a \neq 0$). Contamos o complementar: os números de cinco algarismos terminados em 0 são $9 \times 10^3 = 9000$; os não interessantes são os com $b, c, d \neq 0$: $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$. Logo, $9000 - 6561 = 2439$.

Resposta: a) 9; b) 2439.

Questão 1.78 Fatorando, $2013 = 3 \times 11 \times 61$, produto de três primos distintos. Em uma quádrupla (x, y, z, w) com $x \cdot y \cdot z \cdot w = 2013$, cada uma das entradas é um divisor de 2013 e cada fator primo deve aparecer, com expoente 1, em *exatamente uma* das quatro entradas (se aparecesse em duas, o produto teria aquele primo ao quadrado; se em nenhuma, faltaria o primo).

Assim, construir a quádrupla equivale a decidir o destino de cada primo: o fator 3 vai para x, y, z ou w (4 opções); o fator 11, idem (4 opções); o fator 61, idem (4 opções). As três decisões são independentes e determinam a quádrupla (as entradas que não recebem primo algum valem 1). Pelo MP: $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$. Por exemplo, a escolha "$3 \to y$, $11 \to y$, $61 \to w$" produz $(1, 33, 1, 61)$.

Resposta: 64 quádruplas.

Questão 1.79 $\lfloor \log_2 n \rfloor = m$ exatamente quando $2^m \leq n < 2^{m+1}$.

Contamos por blocos:

$$\begin{aligned}
n = 2, 3 &\quad\Rightarrow\quad 2 \text{ termos iguais a } 1;\\
n = 4, \dots, 7 &\quad\Rightarrow\quad 4 \text{ termos iguais a } 2;\\
n = 8, \dots, 15 &\quad\Rightarrow\quad 8 \text{ termos iguais a } 3;\\
n = 16, \dots, 31 &\quad\Rightarrow\quad 16 \text{ termos iguais a } 4;\\
n = 32, \dots, 63 &\quad\Rightarrow\quad 32 \text{ termos iguais a } 5;\\
n = 64, \dots, 100 &\quad\Rightarrow\quad 37 \text{ termos iguais a } 6.
\end{aligned}$$

Logo a soma vale $2(1) + 4(2) + 8(3) + 16(4) + 32(5) + 37(6) = 2 + 8 + 24 + 64 + 160 + 222 = 480$.

Resposta: 480.

Questão 1.80 Sejam a e b as populações das ilhas A e B. Cada presente sai de exatamente uma pessoa de A e chega a exatamente uma pessoa de B; contando os presentes dos dois lados,

$$\frac{2}{3}\,a = \frac{3}{5}\,b \quad\Longrightarrow\quad b = \frac{10}{9}\,a.$$

A população total é $a + b = \frac{19}{9}a$, e receberam presentes $\frac{3}{5}b = \frac{2}{3}a$ pessoas. A fração pedida é

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{19}{9}a} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{19} = \frac{6}{19}.$$

(Exemplo concreto: $a = 9$ e $b = 10$ — 6 enviam, 6 recebem, população 19.)

Resposta: $\dfrac{6}{19}$ da população total.

Questão 1.81 Examinemos primeiro o caso pequeno em que o universo é $\{1\}$: o elemento 1 deve pertencer a pelo menos um dos conjuntos A, B, C (para que a união seja $\{1\}$), mas não aos três simultaneamente (para que a interseção seja vazia). Das $2^3 = 8$ combinações de pertinência — indicadas por um vetor $(\in A?, \in B?, \in C?)$ — excluem-se (N, N, N) e (S, S, S): restam 6 triplas.

O argumento se repete para cada elemento: escolher (A, B, C) equivale a escolher, para *cada* $i \in \{1, \dots, 2013\}$, uma das $2^3 = 8$ combinações de pertinência; a condição $A \cup B \cup C = \{1, \dots, 2013\}$ proíbe "a nenhum" e a condição $A \cap B \cap C = \varnothing$ proíbe "a todos". Cada elemento tem, portanto,

$8-2=6$ opções, e as escolhas dos 2013 elementos são independentes. Pelo MP: 6^{2013}.

Resposta: 6^{2013} triplas.

Questão 1.82 No contradomínio há dois valores pares (2000, 2002) e dois ímpares (2001, 2003). A paridade da soma depende só da quantidade de argumentos com imagem ímpar. Fixadas as imagens de $1,\ldots,1998$ (livres: 4^{1998} modos), a paridade da soma é decidida pela imagem de 1999: exatamente 2 das 4 opções tornam a soma ímpar. Total:

$$4^{1998}\times 2=2^{3997}.$$

Resposta: 2^{3997} funções.

Questão 1.83 Escolhemos livremente $f(1),\ldots,f(1998)$: são 4^{1998} maneiras. Se a soma parcial é par, $f(1999)\in\{1,3\}$; se é ímpar, $f(1999)\in\{2,4\}$. Em qualquer caso há exatamente 2 escolhas finais:

$$4^{1998}\times 2=2^{3997}.$$

Resposta: 2^{3997} funções.

Questão 1.84 Múltiplos de 3 com cinco dígitos: $\left\lfloor\frac{99999}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{9999}{3}\right\rfloor=33\,333-3333=30\,000$.

Retiramos os múltiplos de 3 *sem* o dígito 6. Números de cinco dígitos sem o 6: primeiro dígito em $\{1,\ldots,9\}\setminus\{6\}$ (8 opções), demais em $\{0,\ldots,9\}\setminus\{6\}$ (9 opções): $8\times 9^4=52\,488$. Como os restos módulo 3 se distribuem igualmente nesse conjunto (os 9 dígitos disponíveis para cada posição livre cobrem todos os restos igualmente), exatamente $52\,488/3=17\,496$ deles são múltiplos de 3.

Logo, a resposta é $30\,000-17\,496=12\,504$.

Resposta: 12 504 números.

Questão 1.85 Queremos $a,b\geq 1$ com $a\mid 10a+b$ e $b\mid 10a+b$, ou seja, $a\mid b$ e $b\mid 10a$. Se b é ímpar e $b\neq 5$: $b\mid a$, logo $a=b$ — os números $11,33,77,99$ (4 casos). Se $b=5$: $a\mid 5$, logo $a\in\{1,5\}$ — os números $15,55$

(2 casos). Se b é par, $b = 2b'$ com $b' \leq 4$: obtém-se $b = a$ ou $b = 2a$ — os números $22, 44, 66, 88, 12, 24, 36, 48$ (8 casos). Total: $4 + 2 + 8 = 14$.

Resposta: 14 números.

Questão 1.86 Há 30 000 múltiplos de 3 com cinco dígitos (de 10002 a 99999). Contamos os que *não* têm dígito 6: o primeiro dígito tem 8 opções (nem 0 nem 6), o segundo, terceiro e quarto têm 9 opções cada; escolhidos esses quatro, o último dígito deve completar um múltiplo de 3 e ser diferente de 6 — em qualquer caso restam exatamente 3 opções (por exemplo, resto 0: $\{0, 3, 9\}$). São $8 \times 9^3 \times 3 = 17\,496$. Logo, a resposta é $30\,000 - 17\,496 = 12\,504$.

Resposta: 12504 números.

Questão 1.87 Um algarismo é média dos outros dois exatamente quando os três algarismos podem ser ordenados em progressão aritmética $\{b - d,\ b,\ b + d\}$.

Caso $d = 0$: algarismos iguais: $111, 222, \ldots, 999$: 9 números.

Caso $d \geq 1$: para cada d, o termo central b percorre $d \leq b \leq 9 - d$: são $10 - 2d$ valores. Cada conjunto $\{b-d, b, b+d\}$ tem 3 algarismos distintos e gera $3! = 6$ arranjos; quando $b = d$ (e somente então) o conjunto contém o 0, e devemos descontar os 2 arranjos que começam por zero. Organizando os casos numa tabela:

d	valores de b	conjuntos	números
1	$1, \ldots, 8$	8	$8 \cdot 6 - 2 = 46$
2	$2, \ldots, 7$	6	$6 \cdot 6 - 2 = 34$
3	$3, \ldots, 6$	4	$4 \cdot 6 - 2 = 22$
4	$4, 5$	2	$2 \cdot 6 - 2 = 10$

Somando: $46 + 34 + 22 + 10 = 112$.

Total: $112 + 9 = 121$.

Resposta: 121 números.

Questão 1.88 Examinemos primeiro quando ocorre "vai um": ao somar dois números coluna a coluna, a coluna dos dígitos d e d' gera transporte exatamente quando $d + d' \geq 10$. Somamos $n = \overline{1abc}$ com $n + 1$.

Caso $c < 9$: então $n+1 = \overline{1ab(c{+}1)}$, e as colunas somam $c+(c+1)$, $b+b$, $a+a$ e $1+1$. Não há vai um se e só se $2c+1 \le 9$, $2b \le 9$ e $2a \le 9$, isto é, $a, b, c \in \{0,1,2,3,4\}$: $5^3 = 125$ casos.

Caso $c = 9$ e $b < 9$: então $n+1 = \overline{1a(b{+}1)0}$, e as colunas somam $9+0$, $b+(b+1)$, $a+a$: sem vai um se e só se $a, b \in \{0,\dots,4\}$: $5 \times 5 = 25$ casos.

Caso $c = b = 9$ e $a < 9$: então $n+1 = \overline{1(a{+}1)00}$, com colunas $9+0$, $9+0$, $a+(a+1)$: sem vai um se e só se $a \in \{0,\dots,4\}$: 5 casos.

Caso $a = b = c = 9$: o par é $1999 + 2000$, com colunas $9+0$, $9+0$, $9+0$, $1+2$: não gera vai um — mais 1 caso.

Total: $125 + 25 + 5 + 1 = 156$.

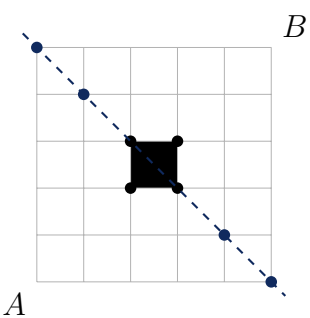
Resposta: 156 pares.

Questão 1.89 O bloco DUKE pode começar nas posições $1, 2, \dots, 7$. Para cada posição, as 6 letras restantes são livres: $7 \times 4^6 = 28\,672$ contagens. Porém, palavras com *duas* ocorrências (disjuntas) do bloco foram contadas duas vezes. Duas ocorrências começando em $i < j$ exigem $j \ge i{+}4$: os pares possíveis são $(1,5), (1,6), (1,7), (2,6), (2,7), (3,7)$ — 6 pares — e em cada caso restam 2 letras livres: $6 \times 4^2 = 96$. (Três ocorrências são impossíveis em 10 letras.) Por inclusão–exclusão:

$$7 \cdot 4^6 - 6 \cdot 4^2 = 28\,672 - 96 = 28\,576.$$

Resposta: 28 576 palavras.

Questão 1.90 Coloquemos $A = (0,0)$ e $B = (5,5)$; o quadradinho central tem vértices $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$ e $(3,3)$, todos proibidos.



A antidiagonal $x + y = 5$ (tracejada) e seus 6 pontos: os 2 do quadrado preto são proibidos; os 4 pontos permitidos estão destacados.

Como cada passo aumenta $x + y$ em 1, todo caminho de A a B passa por *exatamente um* ponto da antidiagonal $x+y = 5$, cujos pontos são $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$ e $(5, 0)$. Os pontos $(2, 3)$ e $(3, 2)$ são vértices do quadrado preto: proibidos. Isso separa os caminhos em 4 casos disjuntos (AP), e em cada caso multiplicamos os trechos (MP):

Por $(1, 4)$*:* de A a $(1, 4)$ há $\binom{5}{1} = 5$ caminhos, e nenhum deles encosta no quadrado preto (pois $x \leq 1$ ao longo do trecho); de $(1, 4)$ a B há $\binom{5}{1} = 5$ caminhos, também seguros (pois $y \geq 4$). Subtotal: $5 \times 5 = 25$.

Por $(4, 1)$*:* simétrico, $5 \times 5 = 25$.

Por $(0, 5)$*:* só o caminho que sobe tudo e depois vai para a direita: $1 \times 1 = 1$. *Por* $(5, 0)$*:* simétrico, 1.

Total: $25 + 25 + 1 + 1 = 52$. (Conferência: sem restrição seriam $\binom{10}{5} = 252$ caminhos.)

Resposta: 52 caminhos.

— Questão 1.91 A estratégia é (i) estabelecer uma cota inferior para a_n (mostrar que k cores *não bastam*), e (ii) exibir uma coloração com k cores (mostrar que k cores *bastam*). Quando (i) e (ii) coincidem, encontramos o mínimo.

Cota inferior: $a_n \geq 3$ para $n \geq 32$.

Lema. Se $n \geq 32$, não conseguimos colorir $\{2, \ldots, n\}$ com apenas 2 cores respeitando a regra.

Prova. Suponha que exista uma 2-coloração válida. Consideramos os cinco números $2, 4, 8, 16, 32$, todos presentes em $\{2, \ldots, n\}$ quando $n \geq 32$. Digamos que 2 tem cor X.

Produto	Raciocínio	Conclusão
$2 \cdot 2 = 4$	Se 4 fosse X, a tríade $(2, 2, 4)$ seria monocromática	4 tem cor Y
$4 \cdot 4 = 16$	Se 16 fosse Y, a tríade $(4, 4, 16)$ seria monocromática	16 tem cor X
$2 \cdot 8 = 16$	Como 2 e 16 são X, a tríade $(2, 8, 16)$ não pode ter 8 em X	8 tem cor Y
$4 \cdot 8 = 32$	Como 4 e 8 são Y, a tríade $(4, 8, 32)$ não pode ter 32 em Y	32 tem cor X
$2 \cdot 16 = 32$	Mas agora $2, 16, 32$ têm todos cor X	Contradição!

Logo, 2 cores não bastam quando $n \geq 32$. Assim $a_{45} \geq 3$ e $a_{2025} \geq 3$. ■

Item (a): $a_{45} = 3$, colorindo por intervalos.

Exibimos uma coloração com 3 cores: pinte cada número $x \in \{2, \ldots, 45\}$ conforme o intervalo:

$$\text{cor 1: } [2, 3] \qquad \text{cor 2: } [4, 15] \qquad \text{cor 3: } [16, 45].$$

Verificamos que nenhuma tríade (a, b, ab) com $a \cdot b = ab \leq 45$ fica monocromática:

- Se $a, b \in [2, 3]$: então $ab \geq 2 \cdot 2 = 4 > 3$, logo ab não está em $[2, 3]$.
- Se $a, b \in [4, 15]$: então $ab \geq 4 \cdot 4 = 16 > 15$, logo ab não está em $[4, 15]$.
- Se $a, b \in [16, 45]$: então $ab \geq 16 \cdot 16 = 256 > 45$, logo ab não pertence a $\{2, \ldots, 45\}$.

Em todos os casos, (a, b, ab) usa cores diferentes (ou ab nem existe no intervalo). Portanto, 3 cores bastam. Combinando com a cota inferior, $\boxed{a_{45} = 3}$.

Item (b): $a_{2025} = 3$, colorindo por blocos de potências de 2.

Para $n = 2025$, intervalos simples como em (a) não funcionam: começando em $[2, 3]$, $[4, 15]$, chegamos a no máximo $[16, 255]$, que não cobre 2025. A ideia é reutilizar cores em blocos não consecutivos.

Para cada $x \in [2, 2025]$, defina $e(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$, o expoente do "bloco diádico" de x. Assim $2^{e(x)} \le x < 2^{e(x)+1}$. Por exemplo:

x	$[2,3]$	$[4,7]$	$[8,15]$	$[16,31]$	$[32,63]$	$\cdots$	$[1024,2047]$
$e(x)$	1	2	3	4	5	$\cdots$	10

Propriedade-chave: se $e(a) = e$ e $e(b) = f$, então $e(ab) \in \{e+f, e+f+1\}$ (pois $2^{e+f} \le ab < 2^{e+f+2}$).

Particionamos os expoentes $\{1, 2, \ldots, 10\}$ em três classes:

$$A = \{1, 4, 10\}, \quad B = \{2, 3, 9\}, \quad C = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Colorimos x com a cor da classe de $e(x)$. A coloração é:

$$\text{cor 1: } [2,4) \cup [16,32) \cup [1024,2025],$$
$$\text{cor 2: } [4,16) \cup [512,1024), \qquad \text{cor 3: } [32,512).$$

Verificação: para que uma tríade (a, b, ab) fosse monocromática, precisaríamos que todos três pertençam à mesma classe de expoentes. Mas isso exigiria $e, f, e+f \in$ mesma classe (ou ambos $\in$ mesma classe). Conferindo manualmente: nenhuma classe tem essa propriedade (por exemplo, $1+4 = 5 \notin A$, $2+3 = 5 \notin B$, etc.). Logo não existe tríade monocromática, e 3 cores bastam até $n = 2047$.

Combinando com a cota inferior, $\boxed{a_{2025} = 3}$.

Resposta: (a) $a_{45} = 3$; (b) $a_{2025} = 3$.

— Questão 1.92 Como $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, escreva $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$ e $b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$. O mínimo múltiplo comum toma, em cada primo, o maior dos dois expoentes, de modo que a condição $\operatorname{mmc}(a, b) = 1800$ se separa em três condições independentes:

$$\max(x_1, x_2) = 3, \qquad \max(y_1, y_2) = 2, \qquad \max(z_1, z_2) = 2.$$

Conte os pares que realizam $\max(u, v) = e$ com $0 \le u, v \le e$: ou $u = e$ e v é livre ($e + 1$ modos), ou $v = e$ e $u < e$ (e modos), num total de $2e + 1$. Pelo princípio multiplicativo,

$$(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 2 + 1)(2 \cdot 2 + 1) = 7 \cdot 5 \cdot 5 = 175.$$

Para a ordem não importar, note que $a = b$ obriga $a = b = 1800$, um único par. Os outros 174 pares ordenados vêm aos pares, (a, b) e (b, a), logo dão 87 conjuntos, e o total é $87 + 1 = 88$.

Resposta: 175 pares ordenados; 88 se a ordem não importa.

Questão 1.93 Identifique cada região com uma terna (a, b, c) de zeros e uns, onde o primeiro dígito diz se os elementos daquela região pertencem a A, o segundo se pertencem a B e o terceiro se pertencem a C. São $2^3 = 8$ ternas, e cada condição do enunciado proíbe algumas delas.

(a) Pertencer a A obriga a pertencer a B, e pertencer a B obriga a pertencer a C: sobram as ternas com $a \leq b \leq c$, que são 000, 001, 011 e 111. São **4** regiões — as quatro "camadas" da cadeia.

(b) Nenhum elemento está em dois dos conjuntos ao mesmo tempo: sobram as ternas com no máximo um dígito 1, isto é, 000, 100, 010 e 001. São **4** regiões.

(c) A interseção vazia proíbe 111 e a união total proíbe 000; nenhuma outra terna é atingida. Sobram **6** regiões.

(d) Cada um dos n elementos de U escolhe livremente uma das 6 regiões permitidas, e escolhas diferentes dão ternas (A, B, C) diferentes. Pelo princípio multiplicativo, 6^n.

Resposta: (a) 4; (b) 4; (c) 6; (d) 6^n.

Questão 1.94 Os dígitos permitidos são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$: são 8. Cada uma das três posições recebe qualquer um deles, com repetição permitida, logo $8^3 = 512$.

Resposta: 512 sócios.

Questão 1.95 Separe pela quantidade de dígitos. Com k dígitos, cada posição tem 9 opções (de 1 a 9), o que dá 9^k números. Logo

$$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9 + 81 + 729 + 6561 = 7380.$$

Resposta: 7380 números.

Questão 1.96 Escrever $360 = abc$ é distribuir os fatores primos entre as três casas. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, cada fator é da forma $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$, e o que precisamos é repartir os três fatores 2, os dois fatores 3 e o único fator 5 em três parcelas ordenadas:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 2, \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 1,$$

com os expoentes inteiros não negativos. Cada equação é uma distribuição independente das outras, e o princípio multiplicativo junta as três:

$$\binom{3+2}{2}\cdot\binom{2+2}{2}\cdot\binom{1+2}{2}=10\cdot 6\cdot 3=180.$$

Para a ordem não importar, note que nenhuma tripla tem os três fatores iguais, pois 360 não é cubo perfeito. Das 180 triplas ordenadas, as que têm exatamente dois fatores iguais vêm de $360=a\cdot a\cdot c$, isto é, $a^2\mid 360$ com $a>1$ ou $a=1$: os valores $a\in\{1,2,3,6\}$ dão $c=360,90,40,10$, quatro triplas não ordenadas, cada uma contada 3 vezes na lista ordenada. Sobram $180-12=168$ triplas ordenadas com os três fatores distintos, contadas $3!=6$ vezes cada, o que dá $168/6=28$. No total, $28+4=32$.

Resposta: 180 maneiras com a ordem importando, 32 sem.

Questão 1.97 Uma relação é um subconjunto de $S\times S$, e a condição trata cada par não ordenado separadamente.

Para $x=y$: o par (x,x) nunca viola a condição, logo cada um dos n pares da diagonal pode entrar ou não: 2^n possibilidades.

Para $x\neq y$: o par não ordenado $\{x,y\}$ admite três situações — nenhum dos pares ordenados, só (x,y), só (y,x) —, pois ter os dois violaria a antissimetria. São $\binom{n}{2}$ pares não ordenados, cada um com 3 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo,

$$2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}=2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

(Para $n=2$: $4\cdot 3=12$, que se confere listando as 12 relações antissimétricas entre as 16 relações possíveis.)

Resposta: $2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Questão 1.98 As sequências de três caracteres consecutivos de IME2019 são

$$\text{IME},\quad \text{ME2},\quad \text{E20},\quad 201,\quad 019.$$

No modelo novo, o padrão de posições é L L L D L D D (L = letra, D = algarismo), de modo que as janelas de três caracteres consecutivos têm os padrões

$$\underbrace{\text{LLL}}_{1\text{–}3},\quad \underbrace{\text{LLD}}_{2\text{–}4},\quad \underbrace{\text{LDL}}_{3\text{–}5},\quad \underbrace{\text{DLD}}_{4\text{–}6},\quad \underbrace{\text{LDD}}_{5\text{–}7}.$$

Logo 201 e 019 são impossíveis (não há três algarismos consecutivos), e cada uma das outras três cabe em uma única janela:

$$A:\ \text{IME em 1–3}, \qquad B:\ \text{ME2 em 2–4}, \qquad C:\ \text{E20 em 5–7}.$$

Contando os casos livres,

$$|A| = 10 \cdot 26 \cdot 10^2 = 26\,000, \qquad |B| = 26 \cdot 26 \cdot 10^2 = 67\,600,$$
$$|C| = 26^3 \cdot 10 = 175\,760, \qquad |A \cap B| = 26 \cdot 10^2 = 2\,600,$$
$$|A \cap C| = 10, \qquad |B \cap C| = 26,$$

e $|A \cap B \cap C| = 1$. Pelo princípio da inclusão–exclusão,

$$|P| = 26\,000 + 67\,600 + 175\,760 - 2\,600 - 10 - 26 + 1 = 266\,725.$$

Resposta: 266 725 placas.

Questão 1.99 As linhas do teclado são $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$ e $\{0\}$. Se o primeiro e o último dígitos estão numa linha, o segundo e o terceiro estão na linha de cima, o que deixa três casos:

- primeiro e último em $\{4,5,6\}$, segundo e terceiro em $\{1,2,3\}$: $3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3 = 81$ senhas;
- primeiro e último em $\{7,8,9\}$, segundo e terceiro em $\{4,5,6\}$: também 81 senhas;
- primeiro e último iguais a 0, segundo e terceiro em $\{7,8,9\}$: $1{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}1 = 9$ senhas.

No total, $81+81+9 = 171$. (Os dígitos podem repetir-se: nada no enunciado os obriga a serem distintos.)

Resposta: 171 senhas.

Questão 1.100 Seja $N(i,j)$ o número de caminhos até a casa da linha i e coluna j, contadas a partir da casa inicial. Vale

$$N(i,j) = N(i-1,j) + N(i,j-1) + N(i-1,j-1),$$

pois a casa (i,j) é alcançada vindo de cima, da esquerda ou da diagonal, e $N(i,0) = N(0,j) = 1$. Preenchendo o tabuleiro:

1	1	1	1
1	3	5	7
1	5	13	25
1	7	25	63

A casa inferior direita recebe 63. (Esses são os números de Delannoy: $1, 3, 13, 63, \ldots$)

Resposta: 63 maneiras.

Questão 1.101 São $5! = 120$ números. Por simetria, cada algarismo ocupa cada uma das cinco posições em $4! = 24$ dos números. Logo, em cada posição, a soma dos algarismos que ali aparecem é

$$24\,(1+2+3+4+5) = 24 \cdot 15 = 360.$$

Somando as contribuições das cinco posições,

$$360\,(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \cdot 11\,111 = 3\,999\,960.$$

Resposta: 3 999 960.

Questão 1.102 O lado ímpar tem os lugares $1, 3, 5, 7$ e o lado par, os lugares $2, 4, 6, 8$ — quatro de cada.

Sente primeiro os remadores com restrição. Para A e B no lado ímpar há $4 \cdot 3 = 12$ modos; para C no lado par há 4 modos. Restam 5 remadores para os 5 lugares ainda vazios, em $5! = 120$ ordens. Pelo princípio multiplicativo,

$$12 \cdot 4 \cdot 120 = 5\,760.$$

Resposta: 5 760 configurações.

Questão 1.103 A condição é $M - H = S - M = r$ com $r > 0$, isto é, $M = H + r$ e $S = H + 2r$, com $1 \le H \le 12$ e $M, S \le 59$.

Fixado H, a restrição que pesa é $S = H + 2r \le 59$, ou seja $r \le \frac{59-H}{2}$; como $M = H + r \le 59$ é consequência disso, o número de valores de r é $\left\lfloor \frac{59-H}{2} \right\rfloor$. Somando de $H = 1$ a $H = 12$:

$$29 + 28 + 28 + 27 + 27 + 26 + 26 + 25 + 25 + 24 + 24 + 23 = 312.$$

Como o relógio é de 12 horas, cada leitura ocorre duas vezes por dia: $2 \cdot 312 = 624$.

Resposta: 624 vezes.

Questão 1.104 Contar o complementar é mais curto: em vez das funções que evitam valores vizinhos, contamos as que colocam $f(x_i)$ e $f(x_j)$ em valores consecutivos.

1. Sem restrição, uma função injetiva de X em Y é uma escolha ordenada de 5 valores distintos entre 8:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720.$$

2. Agora as proibidas, aquelas com $|f(x_i) - f(x_j)| = 1$. O par ordenado $\big(f(x_i), f(x_j)\big)$ tem de ser $(t, t+1)$ ou $(t+1, t)$ com $1 \le t \le 7$, o que dá $2 \times 7 = 14$ possibilidades.

3. Fixados esses dois valores, sobram 6 valores em Y para os outros três elementos de X, injetivamente: $6 \times 5 \times 4 = 120$.

4. Logo há $14 \times 120 = 1\,680$ funções proibidas, e

$$6\,720 - 1\,680 = 5\,040.$$

Resposta: 5 040 funções — alternativa (B).

Questão 1.105

1. Pinte primeiro a região central: 4 escolhas.

2. Fixada a cor de C, as quatro regiões externas só podem usar as outras 3 cores, e formam um ciclo: R_1 é vizinha de R_2, que é vizinha de R_3, que é vizinha de R_4, que é vizinha de R_1.

3. Conte as pinturas do ciclo de quatro regiões com 3 cores. Pinte R_1 (3 modos) e R_2 (2 modos). Para R_3 há dois casos: se R_3 recebe a cor de R_1 (1 modo), então R_4 só precisa diferir de R_3 e de R_1 — que têm a mesma cor —, e há 2 escolhas; se R_3 recebe a terceira cor (1 modo), R_4 deve diferir de R_3 e de R_1, restando 1 escolha.

4. Logo o ciclo admite $3 \times 2 \times (1 \times 2 + 1 \times 1) = 6 \times 3 = 18$ pinturas.

5. Total: $4 \times 18 = 72$.

Em geral, um ciclo com m regiões e k cores admite $(k-1)^m + (-1)^m(k-1)$ pinturas; com $m = 4$ e $k = 3$ isso dá $16 + 2 = 18$.

Resposta: 72 modos.

Questão 1.106

1. Um gráfico é simétrico em relação à reta $y = x$ exatamente quando a função coincide com a sua inversa, isto é, quando $f(f(x)) = x$ para todo x do domínio.

2. Calculando a composta,

$$f(f(x)) = \frac{a \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + d} = \frac{(a^2+bc)\,x + b(a+d)}{c(a+d)\,x + (bc+d^2)}.$$

3. Essa expressão é igual a x para todo x quando $b(a+d) = 0$, $c(a+d) = 0$ e $a^2 + bc = bc + d^2$, ou seja, $a^2 = d^2$. Há dois casos: $a + d = 0$, ou $b = c = 0$ com $a = d$ — e esse segundo caso é a função identidade.

4. Resta contar as funções com $d = -a$. Duas quádruplas proporcionais dão a mesma função, de modo que cada função é representada uma única vez pela sua quádrupla *primitiva* — a de máximo divisor comum 1 —, tomada a menos de sinal. Separamos pelos valores de a, exigindo $a^2 + bc \neq 0$:

   - $a = 0$: então $f(x) = \dfrac{b}{cx}$ com $b, c \neq 0$, e a função depende só da razão $b/c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}\}$ — 6 funções;
   - $a = 1$: b e c livres em $\{-2, \ldots, 2\}$, exceto $bc = -1$, que anula o determinante — $25 - 2 = 23$ funções;
   - $a = 2$: de novo 25 pares, menos os 2 com $bc = -4$; e é preciso descartar os que têm b e c ambos pares, pois aí a quádrupla não é primitiva — sobram $23 - 7 = 16$ funções.

5. Somando e acrescentando a identidade:

$$6 + 23 + 16 + 1 = 46.$$

As mais simples da lista são $f(x) = x$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = -1/x$, $f(x) = 2/x$ e $f(x) = -x$; a condição $a+d = 0$ diz que todas as outras são da forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$.

Resposta: 46 funções.

Questão 1.107

1. Item a). São as funções de um conjunto de 5 elementos sobre um de 3. Por inclusão–exclusão,

$$3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5 = 243 - 96 + 3 = 150.$$

2. Item b). A condição não envolve os índices: ela diz que o *conjunto imagem* não pode conter dois inteiros consecutivos.

3. Conte por tamanho da imagem. Um subconjunto $A \subseteq Y$ com t elementos e sem dois consecutivos pode ser escolhido de $\binom{8-t+1}{t}$ modos, e as funções de X sobre A são as sobrejetoras de 5 elementos em t.

4. Para $t = 1, 2, 3, 4$ — não cabem 5 elementos não consecutivos em Y com imagem de tamanho 5, pois $\binom{4}{5} = 0$ — temos

$$\binom{8}{1}\cdot 1 + \binom{7}{2}\cdot 30 + \binom{6}{3}\cdot 150 + \binom{5}{4}\cdot 240 = 8 + 630 + 3000 + 1200 = 4\,838,$$

usando que as sobrejetoras de 5 em t são 1, 30, 150 e 240 para $t = 1, 2, 3, 4$.

Resposta: a) 150 funções; b) 4 838 funções.