AMOSTRA GRATUITA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Probabilidade e Introdução à Teoria dos Grafos

Teoria e Questões de Competições

Capítulo 5

Binômio de Newton

Estas são 57 páginas do livro, na íntegra: a teoria construída do zero, os exemplos de fixação e **todas as questões com resolução escrita por extenso**. Nenhum gabarito solto.

O sumário completo vem logo a seguir, para você ver o que há no restante do livro.

O livro completo

826 questões, todas resolvidas. Treze capítulos e um apêndice, do primeiro princípio de contagem à teoria dos grafos.

Questões do IME, do ITA, da OBM, da OBMEP, da Escola Naval, da AFA, da IMO, da AMC, do AIME, do HMMT e do Putnam.

Onde comprar

Clube de Autores — clubedeautores.com.br/livro/analise-combinatoria-2

UICLAP — loja.uiclap.com/titulo/ua212127

Amazon — amazon.com.br/stores/author/B0H99K15ZJ

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

SUMÁRIO

Prefácio **v**

1 Princípios de Contagem **1**
1. Introdução 1
2. Contagem por Força Bruta: Enumerar e Listar 1
3. O Princípio Aditivo (AP) 3
4. O Princípio Multiplicativo (MP) 4
5. Princípio da Bijeção 5
6. Princípio do Evento Complementar 5
7. Observações 7
Exemplos de Fixação 8
Questões 11
Respostas e Soluções 25

2 Arrumações e Escolhas Simples **58**
1. Definição 58
2. Permutações circulares 60
3. Complemento: Desarranjos (permutações caóticas) 61
Exemplos de Fixação 62
Questões 62
Respostas e Soluções 68

3 Combinações **83**
1. Combinações Simples 83
2. Propriedades dos Números Binomiais 87
3. Divisão em Grupos 89
4. Combinações e Subconjuntos na Geometria 91
Exemplos de Fixação 92
Questões 93
Respostas e Soluções 104

4 Arrumações e Escolhas com Repetição **137**
1. Permutação com Repetição . . . 137
2. Combinações com Repetição . . . 138
3. Distribuições . . . 140
4. Observações . . . 141
5. Permutações Circulares . . . 142
Exemplos de Fixação . . . 143
Questões . . . 144
Respostas e Soluções . . . 149

5 Binômio de Newton **166**
1. Princípios Fundamentais: o Fatorial de um Número Natural . . . 166
2. O Teorema Binomial . . . 167
3. O Polinômio de Leibniz . . . 169
4. O Filtro das Raízes da Unidade . . . 170
Questões . . . 171
EXERCÍCIOS ADICIONAIS: NÚMEROS BINOMIAIS . . . 179
Respostas e Soluções . . . 184

6 Probabilidade **223**
1. Experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos . . . 223
2. A probabilidade de Laplace . . . 224
3. Os axiomas de Kolmogorov . . . 224
4. Probabilidade condicional e independência . . . 226
5. Probabilidade Total e Teorema de Bayes . . . 226
6. Valor Esperado: Resumo e Propriedades Básicas . . . 228
Questões . . . 229
Exemplos Clássicos do Curso . . . 230
Respostas e Soluções . . . 246

7 Triângulo de Pascal e Números Binomiais **286**
1. Números Binomiais e o Triângulo . . . 286
2. Teorema Binomial de Newton . . . 287
3. Propriedades Fundamentais . . . 289
4. Teorema das Linhas e Soma Alternada . . . 290
5. Teoremas das Colunas e das Diagonais . . . 291
6. Absorção, Euler e Lagrange . . . 293
7. Teorema de Lucas . . . 295
Questões . . . 296

Respostas e Soluções 303

8 Outros Métodos de Contagem 329
1. O Princípio da Inclusão–Exclusão 329
2. Os Lemas de Kaplansky 333
3. O Princípio de Dirichlet (Casa dos Pombos) 334
4. Os Números de Catalan 344
5. Invariantes e Monovariantes 347
Questões 349
Respostas e Soluções 371

9 Recorrências 425
1. O que é uma recorrência 425
2. Recorrências de Restrições e o Princípio da Reflexão 426
3. Técnicas de resolução 428
4. Recorrências Não Homogêneas 431
5. Três Problemas Clássicos: Hanói, Fibonacci e Josephus 433
6. Desafios Olímpicos 435
Questões 436
Respostas e Soluções 442

10 Partições de Inteiros 467
1. Partições Ordenadas e Não Ordenadas 467
2. A Função Geratriz de $p(n)$ 468
3. O Gráfico de Ferrers e a Conjugação 469
4. Recorrências para $p(n)$ 470
5. Estimativas 472
6. Partições e Permutações: Tipos de Ciclo 472
Questões 472
Respostas e Soluções 475

11 Teoria dos Grafos 482
1. Definições Básicas 482
2. Grafos Importantes 483
3. Árvores e Árvores Geradoras 484
4. Grafos Bipartidos 485
5. Caminhos e Ciclos Eulerianos 488
6. Caminhos e Ciclos Hamiltonianos 490
7. Coloração de Vértices e Número Cromático 492
8. Clique e Número de Independência 495

9. Grafos Planares 495
10. Crossing Number (Número de Cruzamentos) 496
11. Grafos de Cayley 497
12. Hipercubos e Grafos de Hamming 499
13. Grafos de Transposição e de Inserção 500
14. Os Principais Números de um Grafo 503
Questões 509
Respostas e Soluções 517

12 Grupos, Simetrias e o Lema de Burnside **540**
1. A Estrutura de Grupo 540
2. Notação e Propriedades Básicas de Permutações 541
3. Ações de Grupos, Órbitas e Estabilizadores 543
4. Simetrias Geométricas 544
5. Lema de Burnside 544
6. Enumeração de Pólya 546
Questões 546
Respostas e Soluções 549

13 Questões do IME, do ITA e da IMO **561**
Questões 561
Respostas e Soluções 569

A Funções Geradoras **593**
1. A Ideia Fundamental 593
2. Séries Formais e as Ferramentas Básicas 595
3. O Cálculo das Séries Formais 600
4. Equações com Restrições 602
5. Funções Geradoras e Recorrências 604
6. Equações Não Lineares: os Números de Catalan 607
7. Funções Geradoras Exponenciais 609
8. Duas Variáveis: Contando com um Parâmetro Extra 612
9. Aplicações Clássicas 613
10. Tabela-Resumo 616
Questões 617
Respostas e Soluções 620

B Origem das questões **631**

C Referências Bibliográficas **632**

5

BINÔMIO DE NEWTON

1. Princípios Fundamentais: o Fatorial de um Número Natural

O método de definição indutiva. Seja $\mathbb{N}_n$ o subconjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbb{N}$, consistindo dos n primeiros números naturais não nulos. Se desejássemos que um computador imprimisse a coleção dos elementos de $\mathbb{N}_{1989}$, teríamos que lhe dizer exatamente o que fazer quando chegasse aos pontinhos. Por outro lado, se definíssemos $\mathbb{N}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, por

$$\mathbb{N}_1 = \{1\}, \qquad \mathbb{N}_{n+1} = \mathbb{N}_n \cup \{n+1\},$$

supondo que o computador possa distinguir símbolos e lembrá-los, as equações acima permitem-lhe calcular $\mathbb{N}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que as relações acima definem $\mathbb{N}_n$ *indutivamente*, ou são uma *definição indutiva* de $\mathbb{N}_n$. Quando a substituição dos pontinhos é algo rotineiro para seres humanos, frequentemente os pontinhos são usados em lugar da definição indutiva que se espera que o leitor dê. O uso dos pontinhos torna as fórmulas mais fáceis de serem compreendidas — mas só para leitores humanos; em trabalhos mais avançados, a definição formal por indução tem que ser dada.

Definição. Definimos o **fatorial** de um número natural n, tradicionalmente denotado por $n!$, como o número definido indutivamente por:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!\,.$$

Decorre imediatamente da definição que $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ e então tem-se que $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$; $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$; $8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40\,320$ etc.

Coeficientes binomiais. Dados os naturais n e k, sendo $n \geq k$, chama-se **coeficiente binomial** n sobre k, e indica-se $\binom{n}{k}$, o número definido por

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{se } 1 \leq k \leq n.$$

Por analogia com as frações, n é chamado *numerador* do coeficiente binomial e k é o *denominador*; algumas vezes dizemos também que k é a *classe* do número binomial "n sobre k". Decorre imediatamente da definição que, para $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1},$$

onde o numerador da fração contém k fatores.

Valem $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, a simetria $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e a relação de Stifel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, que gera o triângulo de Pascal: cada entrada é a soma das duas imediatamente acima dela.

			1			$(a+b)^0$
		1		1		$(a+b)^1$
	1		2		1	$(a+b)^2$
1		3		3		1 $(a+b)^3$
1	**4**		**6**		**4**	**1** $(a+b)^4$
1	5	10		10	5	1 $(a+b)^5$

O triângulo de Pascal: a linha n traz os coeficientes $\binom{n}{k}$ do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Em destaque, a linha $n = 4$, detalhada na tabela da próxima seção.

2. O Teorema Binomial

Binômio de Newton. *Para quaisquer a, b e n natural,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Prova combinatória. Ao expandirmos o produto $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ (n fatores), cada parcela resulta da escolha, em cada fator, de a ou de b.

As parcelas iguais a $a^{n-k}b^k$ correspondem às escolhas de b em exatamente k dos n fatores: há $\binom{n}{k}$ delas. ■

O **termo geral** da expansão de $(a+b)^n$, na ordem usual, é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{\,n-k}\, b^{\,k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Para fixar as ideias, a tabela abaixo exibe, termo a termo, o desenvolvimento de $(a+b)^4$:

k	$\binom{4}{k}$	$a^{4-k}b^k$	termo T_{k+1}
0	1	a^4	a^4
1	4	a^3b	$4a^3b$
2	6	a^2b^2	$6a^2b^2$
3	4	ab^3	$4ab^3$
4	1	b^4	b^4

Os coeficientes $1, 4, 6, 4, 1$ são exatamente a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal.

Somando a coluna da direita: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exemplo: procurando o termo independente. Determinemos o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^9$. O termo geral é

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} x^{\,9-k} \left(x^{-2}\right)^k = \binom{9}{k} x^{\,9-3k},$$

e basta acompanhar o expoente $9 - 3k$ enquanto k cresce:

k	0	1	2	3	4
expoente $9-3k$	9	6	3	0	-3

O expoente cai de 3 em 3 e anula-se em $k = 3$.

O termo independente é, portanto, $T_4 = \binom{9}{3} = 84$. Esse "rastreamento do expoente" em uma tabelinha evita erros de conta e será usado várias vezes nas questões.

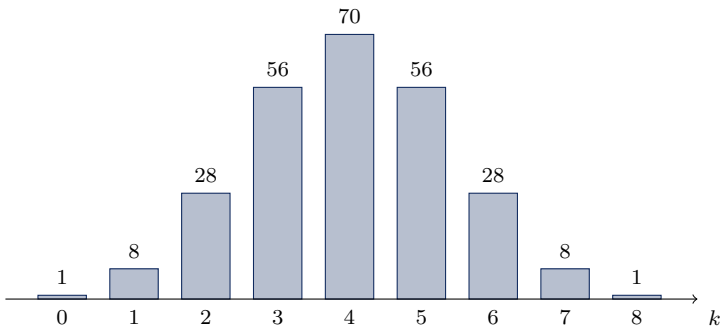
Consequências úteis (fazendo $a = b = 1$ e $a = 1$, $b = -1$):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1).$$

Exemplo: soma dos coeficientes. A soma dos coeficientes de um polinômio $p(x)$ é simplesmente $p(1)$ — ao fazer $x = 1$, cada termo reduz-se

ao seu coeficiente. Assim, a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x-1)^6$ é $(3\cdot 1-1)^6 = 2^6 = 64$; e, num polinômio em duas variáveis como $(2x+5y)^7$, fazemos $x=y=1$: $(2+5)^7 = 7^7$.

O gráfico abaixo mostra os coeficientes $\binom{8}{k}$ da linha $n=8$: eles crescem até o centro e decrescem simetricamente — comportamento que usaremos nas questões sobre o *maior termo* de um desenvolvimento.



Os coeficientes binomiais $\binom{8}{k}$: máximo no centro ($k=4$) e simetria $\binom{8}{k} = \binom{8}{8-k}$.

3. O Polinômio de Leibniz

O binômio de Newton generaliza-se para uma soma com qualquer número de parcelas.

Polinômio de Leibniz (Teorema Multinomial). *Para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_k$ e n natural,*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_k!}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k},$$

onde a soma percorre todas as soluções inteiras não negativas de $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$.

Prova combinatória. Ao expandirmos o produto de n fatores $(x_1 + \cdots + x_k)$, cada parcela resulta da escolha de um x_i em cada fator. As parcelas iguais a $x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}$ correspondem às maneiras de decidir em quais fatores escolhemos cada x_i — uma permutação com repetição: $\dfrac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}$ delas. ■

O coeficiente $\dfrac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}$ é chamado **coeficiente multinomial**. Duas observações úteis:

(i) o número de termos do desenvolvimento é o número de soluções de $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$, isto é, $\binom{n+k-1}{k-1}$;

(ii) fazendo $x_1 = \cdots = x_k = 1$, a soma de todos os coeficientes multinomiais é k^n.

Exemplo: um desenvolvimento multinomial. Considere $(x+y+z)^4$. O número de termos, após a redução dos semelhantes, é o número de soluções não negativas de $\alpha+\beta+\gamma = 4$, isto é, $\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$; a soma de todos os coeficientes é $3^4 = 81$. Um coeficiente específico, como o de x^2yz, vale

$$\frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12,$$

que é o número de anagramas da palavra $xxyz$: o multinomial conta de quantas maneiras distribuímos os 4 fatores entre as letras.

Questão 5.1

Determine o coeficiente de $x^2y^3z^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^7$.

Questão 5.2

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^5$.

Questão 5.3

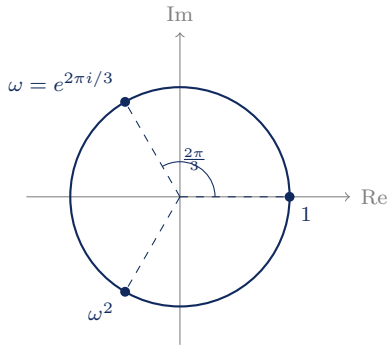
No desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x} + 1\right)^6$, determine o termo independente de x.

Questão 5.4 (ITA — adaptada)

Quantos termos tem o desenvolvimento de $(x+y+z+w)^{10}$, após a redução dos termos semelhantes? Qual é a soma de todos os seus coeficientes?

4. O Filtro das Raízes da Unidade

Vimos que $x = 1$ soma *todos* os coeficientes de um polinômio e que $x = -1$ separa os de índice par dos de índice ímpar. Para somar coeficientes "de r em r" (por exemplo, $a_0 + a_3 + a_6 + \cdots$), usamos as **raízes r-ésimas da unidade**, os r números complexos $\omega^j = e^{2\pi i j/r}$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, que satisfazem $\omega^r = 1$ e ficam igualmente espaçados sobre o círculo unitário.



As três raízes cúbicas da unidade, vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário. Vale $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Filtro das raízes da unidade. *Sejam $f(x) = \sum_k a_k x^k$ um polinômio e $\omega = e^{2\pi i/r}$. Então*

$$\sum_{r \mid k} a_k = \frac{1}{r}\left[f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + \cdots + f(\omega^{r-1})\right].$$

Prova. Para cada k, a soma $\sum_{j=0}^{r-1} \omega^{jk}$ é uma progressão geométrica de razão ω^k: vale r quando $r \mid k$ (todas as parcelas são 1) e vale $\dfrac{\omega^{rk}-1}{\omega^k - 1} = 0$ caso contrário. Somando $f(\omega^j) = \sum_k a_k \omega^{jk}$ sobre j, sobrevivem apenas os a_k com $r \mid k$, cada um multiplicado por r. ∎

Exemplo: somando de 3 em 3. Calculemos $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6}$ com $f(x) = (1+x)^6$ e $r = 3$. Temos $f(1) = 2^6 = 64$ e, como $1 + \omega = -\omega^2$ (pois $1 + \omega + \omega^2 = 0$),

$$f(\omega) = (1+\omega)^6 = (-\omega^2)^6 = \omega^{12} = 1,$$
$$f(\omega^2) = (1+\omega^2)^6 = (-\omega)^6 = 1.$$

Logo a soma vale $\dfrac{64 + 1 + 1}{3} = 22$ — conferindo diretamente: $1 + 20 + 1 = 22$. ✓

Questões

Questão 5.5

Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x - 3y)^9$.

Questão 5.6

Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$.

Questão 5.7

No desenvolvimento de $(1 + x)^n$, os coeficientes dos termos de ordens 5, 6 e 7 estão em progressão aritmética. Determine os possíveis valores de n.

Questão 5.8

Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

Questão 5.9

Determine o maior termo do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{30}$, isto é, o maior valor de $t_k = \binom{30}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{30-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$.

Questão 5.10 (HMMT — adaptada)

Determine o coeficiente de x^{50} no desenvolvimento de $(1 + x)^{1000} + x(1 + x)^{999} + x^2(1 + x)^{998} + \cdots + x^{1000}$.

Questão 5.11 (AIME 1983)

Qual é o maior fator primo de dois dígitos do número inteiro $\binom{200}{100}$?

Questão 5.12 (AMC — adaptada)

Quantos coeficientes ímpares tem o desenvolvimento de $(1 + x)^{2024}$?

Questão 5.13

Simplifique $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

Questão 5.14

Expresse cada um dos produtos como quociente de dois fatoriais: a) $9 \cdot 8 \cdot 7$; b) $(n-3)(n-4)(n-5)$.

Questão 5.15 (IME 2013)

O coeficiente de x^2y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é: (A) 3150 (B) 6300 (C) 75600 (D) 81900 (E) 151200

Questão 5.16

Simplifique $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Questão 5.17

Por quantos zeros termina o resultado de 1000!?

Questão 5.18 (IME 2012)

Seja F o conjunto cujos elementos são os valores de $n!$, onde n é um número natural não nulo. Se G é o subconjunto de F que não contém elementos que são múltiplos de 27 209, determine o número de elementos do conjunto G. (A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 22 (E) 25

Questão 5.19

Sendo $n \geq 2$, qual dos números é maior: $(n!)^2$ ou $(n^2)!$?

Questão 5.20

A solução da equação $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$ é: (A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Questão 5.21

O valor de n tal que $\dfrac{n! + 3(n-2)!}{n! - 3(n-2)!} = \dfrac{31}{29}$ é: (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

Questão 5.22

O algarismo das unidades do número $N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99!$ é igual a: (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Questão 5.23

O algarismo das dezenas do número $N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 1999!$ é igual a: (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Questão 5.24

Determine o maior inteiro positivo k que divide $\dfrac{n^2(n^2-1)}{2}$ para todo inteiro n.

Questão 5.25

O número de divisores positivos do número $N = 97^5 + 5\cdot 97^4 + 10\cdot 97^3 + 10\cdot 97^2 + 5\cdot 97 + 1$ é igual a: (A) 100 (B) 98 (C) 66 (D) 60 (E) 30

Questão 5.26

O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1-12x^5)^{21}(1+x)^{10}$ é igual a: (A) 0 (B) 10 (C) -12 (D) 21 (E) 252

Questão 5.27

Seja N o menor inteiro positivo tal que $\dfrac{12N}{12!}$ é inteiro. Calcule N e a soma dos seus algarismos.

Questão 5.28

Sabendo que $15! = 130767A368000$, o valor do algarismo A é igual a: (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Questão 5.29

O menor inteiro entre 100 e 999 que é igual à soma dos fatoriais de seus algarismos possui soma de seus algarismos igual a: (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Questão 5.30

O número de zeros com que termina o número 10000! é igual a: (A) 2491 (B) 2493 (C) 2495 (D) 2497 (E) 2499

Questão 5.31

O valor de $112296^2 - 79896^2$ é igual a: (A) 11! (B) 12! (C) 13! (D) 14! (E) 15!

Questão 5.32

No desenvolvimento de $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)^{100}$, qual é o maior termo? (Dê a sua ordem, isto é, o valor de k no termo geral T_{k+1}.) (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

Questão 5.33

Para quantos valores inteiros positivos de n, $n!$ termina com exatamente 25 zeros? (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Questão 5.34

O número de números primos maiores que $n! + 1$ e menores que $n! + n$ é: (A) 0 (B) $n - 1$ (C) 1 (D) n (E) $\frac{n-1}{2}$

Questão 5.35

O número de pares de inteiros positivos (m, n) para os quais $1! + 2! + 3! + \cdots + n! = m^2$ é igual a: (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Questão 5.36

Determine o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento de $(2x - 3)^4 \cdot (x + 2)^5$.

Questão 5.37

O coeficiente de x^{28} no desenvolvimento de $(x + 2)^{20} \cdot (x^2 - 1)^5$ é igual a: (A) 751 (B) 752 (C) 753 (D) 754 (E) 755

Questão 5.38

Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2x}\right)^3$.

Questão 5.39

Determine o maior termo do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{100}$.

Questão 5.40

Quando 30! é desenvolvido, ele termina com exatamente 7 zeros. O algarismo que precede imediatamente estes zeros é igual a: (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Questão 5.41

O menor valor possível de um natural n tal que $n!$ termina com 1987 zeros é igual a: (A) 7920 (B) 7940 (C) 7960 (D) 7980 (E) 8000

Questão 5.42

O maior inteiro k tal que 5^k divide $(3)_{10}(10!) + (12)_5(5!) + (4)_7(7!)$ é igual a: (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Questão 5.43

Seja N o inteiro obtido ao eliminarmos todos os zeros do final do número 26!. O maior inteiro k tal que 12^k seja um divisor de N é igual a: (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Questão 5.44

O menor inteiro positivo que divide 16! mas não divide 14! é igual a: (A) 4096 (B) 729 (C) 343 (D) 143 (E) 125

Questão 5.45

Sejam a e b inteiros positivos com $a > b+1$. Mostre que existe um inteiro $M > 1$ tal que $a^n - b^n$ é divisível por M para todo inteiro positivo n, determinando M em função de a e b.

Questão 5.46

Prove, por indução matemática, que para todo inteiro $n \geq 1$ o número

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

é divisível por 9.

Questão 5.47

Dados n objetos distintos, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um número ímpar de objetos?

Questão 5.48

O menor inteiro maior que $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ é: (A) 972 (B) 971 (C) 970 (D) 969 (E) 968

Questão 5.49

Determine a parte inteira de $(4+\sqrt{15})^5$.

Questão 5.50

O algarismo das unidades do número $(15+\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}$ é: (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 9

Questão 5.51

Sobre o valor de $|(2+\sqrt{3})^n|$ para todo natural n podemos afirmar que: (A) é sempre par (B) é par se n o for (C) é sempre ímpar (D) é múltiplo de 3 (E) é ímpar se n o for

Questão 5.52

Os mil primeiros algarismos após a vírgula na representação decimal de $(6+\sqrt{35})^{1980}$ são todos iguais a: (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Questão 5.53

Demonstre que

$$\frac{1}{1!\cdot 9!}+\frac{1}{3!\cdot 7!}+\frac{1}{5!\cdot 5!}+\frac{1}{7!\cdot 3!}+\frac{1}{9!\cdot 1!}=\frac{2^9}{10!}$$

e simplifique a fração.

Questão 5.54

Sabendo que $\frac{1}{2!\cdot 17!}+\frac{1}{3!\cdot 16!}+\frac{1}{4!\cdot 15!}+\cdots+\frac{1}{9!\cdot 10!}=\frac{N}{1!\cdot 18!}$, o valor do maior inteiro menor que $\frac{N}{100}$ é igual a: (A) 131 (B) 133 (C) 135 (D) 137 (E) 139

Questão 5.55

O mínimo múltiplo comum dos números $(10!)\cdot(18!)$ e $(12!)\cdot(17!)$ pode ser colocado sob a forma $\frac{(a!)(b!)}{c!}$ onde a e b são números de dois algarismos e c é um número de um algarismo. O valor de $a+b+c$ é igual a: (A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

Questão 5.56

Seja $z(n)$ o número de zeros em que termina $n!$. Mostre que, para todo valor $m\geq 1$ efetivamente assumido por z, a equação $z(n)=m$ tem exatamente cinco soluções inteiras positivas, e determine o menor valor de m que *não* é assumido.

Questão 5.57

Os números naturais X e Y tais que os quatro últimos algarismos de $X!+Y!$ são 1990 são tais que: (A) ambos são ímpares (B) ambos são pares (C) um é par, outro é ímpar (D) são múltiplos de 3 (E) não existem

Questão 5.58

Dado um alfabeto com 3 letras a, b, c, encontre o número de palavras com n letras que apresentam a letra a um número par de vezes.

Questão 5.59

De $3n+1$ objetos, n são indistinguíveis e os demais são distintos. Mostre que se pode escolher n objetos dentre eles de 2^{2n} maneiras.

Questão 5.60

Seja $(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$. Se $S = a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$, então S é igual a: (A) $2n$ (B) $2n+1$ (C) $\dfrac{3^n}{2}$ (D) $\dfrac{3^n-1}{2}$ (E) $\dfrac{3^n+1}{2}$

Questão 5.61

Considere as seguintes afirmativas sobre números binomiais e potências: (1) O número 101^{50} é menor que $100^{50}+99^{50}$. (2) Nenhum número inteiro da forma 4^n+1 é divisível por 3. (3) Todo número da forma 89^n+1 é divisível por 18. (4) O número $99^{60}-51^{51}$ é divisível por 4.

O número de afirmativas verdadeiras é igual a: (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Questão 5.62

Seja $a_n = 6^n+8^n$. O resto da divisão de a_{97} por 49 é igual a: (A) 14 (B) 21 (C) 35 (D) 42 (E) 48

Questão 5.63

Colocando-se os números $p = 1000!$, $q = 400!\cdot 400!\cdot 200!$, $r = 500!\cdot 500!$, $s = 600!\cdot 300!\cdot 100!$ e $t = 700!\cdot 300!$ em ordem crescente obtemos: (A) $p<q<r<s<t$ (B) $p<s<r<t<q$ (C) $q<r<s<t<p$ (D) $q<s<r<t<p$ (E) $q<s<t<r<p$

Questão 5.64

Considere as afirmativas:

1. O número $\binom{1000}{500}$ é múltiplo de 7.
2. O número 999! é maior que 500^{999}.
3. O número 2000^{2000} é menor que $(2000!)^2$.

Assinale: (A) Se somente a primeira for verdadeira (B) Se somente a segunda (C) Se somente a terceira (D) Se todas (E) Se nenhuma

Questão 5.65

Se a e b são inteiros com $20 < a < b < 40$ e $N = [a! + (a+1)! + (a+2)!][b! + (b+1)! + (b+2)!]$, a soma dos valores de a para os quais N é um quadrado perfeito é igual a: (A) 51 (B) 53 (C) 55 (D) 57 (E) 59

Questão 5.66

Calcule

$$\binom{2020}{0} + \binom{2020}{4} + \binom{2020}{8} + \cdots + \binom{2020}{2020}.$$

Questão 5.67

Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2025\}$ cuja soma dos elementos é divisível por 5.

Questão 5.68 (Bulgária TST 2006 / BMO 2019)

Seja p um primo ímpar. Encontre o número de subconjuntos B de $A = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tais que a soma dos elementos de B é divisível por p (o subconjunto vazio conta).

Questão 5.69

Quantos subconjuntos de 100 elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2000\}$ têm soma dos elementos múltipla de 5?

EXERCÍCIOS ADICIONAIS: NÚMEROS BINOMIAIS

Questão 5.70 **(ITA 1996)**

Dadas as afirmações:

(I) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

(II) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

(III) Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

(A) todas são verdadeiras

(B) apenas (I) e (II) são verdadeiras

(C) apenas (I) é verdadeira

(D) apenas (II) é verdadeira

(E) apenas (II) e (III) são verdadeiras

Questão 5.71

Calcule

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7}$$

usando o teorema das linhas e a simetria dos números binomiais, sem avaliar os cinco coeficientes um a um.

Questão 5.72

Dado r natural com $r \geq 2$, prove que

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{r}{r-1}.$$

Questão 5.73 **(ITA 1995)**

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, calcule

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \binom{4n}{6} + \cdots + (-1)^{2n}\binom{4n}{4n}.$$

Questão 5.74

Seja n um inteiro positivo ímpar com $n > 1$. Prove que a sequência de números binomiais

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

contém uma quantidade par de números ímpares. (Para $n = 1$ o enunciado falha: o único elemento $\binom{1}{0} = 1$ é ímpar.)

Questão 5.75 **(IME 1981)**

Prove que, se m e n são inteiros positivos, então

$$\binom{2m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2.$$

Questão 5.76 **(IME 2006)**

Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:

$$S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots + \binom{n}{3\lfloor n/3 \rfloor}$$

$$S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que $\lfloor r \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.

Questão 5.77 **(IME 2021)**

Seja o polinômio $1 - y + y^2 - y^3 + \cdots - y^{19} + y^{20}$, que pode ser escrito na forma $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{20} x^{20}$, onde $x = y + 1$ e os α_i são constantes reais. Calcule o valor numérico de α_3.

Questão 5.78 (IME 2021)

Determine a soma dos coeficientes de x^3 na expansão de $(1+x)^4 \cdot (2-x^2)^5$.

(A) -320 (B) -288 (C) -192 (D) 128 (E) 320

Questão 5.79 (IME 2017)

No desenvolvimento de $\left(x\,\mathrm{sen}(2\beta) + \dfrac{1}{x}\cos(2\beta)\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a $\dfrac{63}{256}$. Considerando que β é um número real com $0 < \beta < \dfrac{\pi}{8}$ e $x \neq 0$, o valor de β é:

(A) $\frac{\pi}{9}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{16}$ (D) $\frac{\pi}{18}$ (E) $\frac{\pi}{24}$

Questão 5.80 (IME 2014)

Sabe-se que o valor do sexto termo da expansão em binômio de Newton de

$$\left(2^{\log_2\left(\sqrt{9^{(x-1)}+7}\right)} + \frac{1}{2^{\frac{1}{5}\log_2\left(3^{(x-1)}+1\right)}}\right)^7$$

é 84. O valor da soma dos possíveis valores de x é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Questão 5.81 (IME 2013)

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razões r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. Os números 3 e 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1+\frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é:

(A) 12 (B) 48 (C) 66 (D) 99 (E) 129

Questão 5.82 (IME 1999)

Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

Questão 5.83 (IME 1997)

Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{65}$.

Questão 5.84 (IME 1995)

Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4-\frac{1}{x^8}\right)^m$.

Questão 5.85 (IME 1994)

Determine o termo independente de x de $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

Questão 5.86 (IME 1989)

Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2 \cdot \left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5$.

Questão 5.87 (IME 1984)

Seja o desenvolvimento $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{Z}^+$. Determine n sabendo-se que o maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

Questão 5.88 (IME 1982)

Calcule o coeficiente do termo em x^3 no desenvolvimento de $(2x-3)^4(x+2)^5$.

Questão 5.89 (ITA 2025)

O termo independente de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ é:

(A) -18 (B) -12 (C) 0 (D) 12 (E) 18

Questão 5.90 (ITA 2014)

Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então o valor de

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

é igual a:

(A) 2^n+1 (B) $2^{n+1}+1$ (C) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$ (D) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (E) $\frac{2^n-1}{n}$

Questão 5.91

Escolhe-se ao acaso um subconjunto S de $\{1, 2, \ldots, 9\}$, sendo equiprováveis os $2^9 = 512$ subconjuntos — o vazio incluído, com soma igual a 0. Indique por $\sigma(S)$ a soma dos elementos de S.

a) Calcule a probabilidade de $\sigma(S)$ ser múltiplo de 3.

b) Para $m \geq 1$ inteiro, escolhendo ao acaso um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 3m\}$, demonstre que a probabilidade de $\sigma(S)$ ser múltiplo de 3 é $\dfrac{8^m + 2^{m+1}}{3 \cdot 8^m}$.

Questão 5.92

Seja n um inteiro positivo.

a) Demonstre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$ em função de n.

Respostas e Soluções

Questão 5.1 Pelo polinômio de Leibniz, o coeficiente é

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!} = \frac{5040}{2 \cdot 6 \cdot 2} = 210.$$

Resposta: 210.

Questão 5.2 O termo geral é $\dfrac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,1^{\alpha} x^{\beta} (x^2)^{\gamma}$ com $\alpha + \beta + \gamma = 5$; o grau é $\beta + 2\gamma = 4$. As soluções são $(\gamma, \beta, \alpha) = (2, 0, 3), (1, 2, 2), (0, 4, 1)$:

$$\frac{5!}{3!\,0!\,2!} + \frac{5!}{2!\,2!\,1!} + \frac{5!}{1!\,4!\,0!} = 10 + 30 + 5 = 45.$$

Resposta: 45.

Questão 5.3 O termo geral é $\dfrac{6!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,x^{2\alpha-\beta}$ com $\alpha+\beta+\gamma=6$; queremos $2\alpha=\beta$. As soluções (α,β,γ) são $(0,0,6)$, $(1,2,3)$ e $(2,4,0)$:

$$\frac{6!}{0!\,0!\,6!}+\frac{6!}{1!\,2!\,3!}+\frac{6!}{2!\,4!\,0!}=1+60+15=76.$$

Resposta: 76.

Questão 5.4 Os termos correspondem às soluções não negativas de $\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$:

$$\binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}=286.$$

A soma dos coeficientes obtém-se com $x=y=z=w=1$: $4^{10}=1\,048\,576$.

Resposta: 286 termos; soma dos coeficientes $4^{10}=1048576$.

Questão 5.5 A soma dos coeficientes obtém-se fazendo $x=y=1$:

$$(2\cdot 1-3\cdot 1)^9=(-1)^9=-1.$$

Resposta: -1.

Questão 5.6 O termo geral é

$$T_{k+1}=\binom{10}{k}\left(x^2\right)^{10-k}\left(x^{-3}\right)^k=\binom{10}{k}x^{20-5k}.$$

Acompanhemos o expoente $20-5k$:

k	0	1	2	3	4	5
$20-5k$	20	15	10	5	0	-5

O termo independente ocorre quando $20-5k=0$, isto é, $k=4$: $T_5=\binom{10}{4}=210$.

Resposta: 210.

Questão 5.7 Os coeficientes são $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ e $\binom{n}{6}$; a condição de PA é $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$. Dividindo por $\binom{n}{4}$ e usando $\frac{\binom{n}{5}}{\binom{n}{4}} = \frac{n-4}{5}$, $\frac{\binom{n}{6}}{\binom{n}{4}} = \frac{(n-4)(n-5)}{30}$:

$$2 \cdot \frac{n-4}{5} = 1 + \frac{(n-4)(n-5)}{30} \implies 12(n-4) = 30 + (n-4)(n-5).$$

Expandindo: $n^2 - 21n + 98 = 0$, donde $n = 7$ ou $n = 14$.

Resposta: $n = 7$ ou $n = 14$.

Questão 5.8 *Argumento combinatório:* ambos os lados contam os pares (comissão, presidente da comissão) formados a partir de n pessoas. À esquerda, escolhe-se a comissão de k pessoas ($\binom{n}{k}$ modos) e o presidente entre elas (k modos), somando sobre k. À direita, escolhe-se primeiro o presidente (n modos) e depois um subconjunto qualquer das $n-1$ pessoas restantes (2^{n-1} modos) para completar a comissão.

Argumento algébrico: derivando $(1+x)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$ e fazendo $x = 1$: $n(1+1)^{n-1} = \sum_k k\binom{n}{k}$. ■

Resposta: Identidade demonstrada.

Questão 5.9 Analisamos a razão entre termos consecutivos:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\binom{30}{k+1}}{\binom{30}{k}} \cdot 2 = \frac{30-k}{k+1} \cdot 2.$$

Essa razão é maior que 1 enquanto $2(30-k) > k+1$, isto é, $k < \frac{59}{3} \approx 19{,}67$. Assim t_k cresce até $k = 20$ e decresce depois; o maior termo é

$$t_{20} = \binom{30}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = \binom{30}{20}\frac{2^{20}}{3^{30}}.$$

Resposta: $t_{20} = \binom{30}{20} 2^{20}/3^{30}$ (o termo com $k = 20$).

Questão 5.10 A soma é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{x}{1+x}$ com 1001 termos:

$$S = (1+x)^{1000} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1001}}{1 - \frac{x}{1+x}} = (1+x)^{1001} - x^{1001}.$$

Como x^{1001} não contribui para o grau 50, o coeficiente pedido é $\binom{1001}{50}$.

Resposta: $\binom{1001}{50}$.

Questão 5.11 O expoente do primo p em $n!$ é $\sum_{i\geq 1}\lfloor n/p^i\rfloor$ (fórmula de Legendre); logo o expoente de p em $\binom{200}{100} = \frac{200!}{100!\,100!}$ é

$$\sum_{i\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{200}{p^i}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{100}{p^i}\right\rfloor\right).$$

Para um primo de dois dígitos, $p^2 > 100$ quando $p > 10$, de modo que apenas $i = 1$ contribui. Se $66 < p < 100$, então $\lfloor 200/p\rfloor = 2$ e $\lfloor 100/p\rfloor = 1$: expoente $2 - 2\cdot 1 = 0$, e p *não* divide $\binom{200}{100}$. Se $50 < p \leq 66$, então $\lfloor 200/p\rfloor = 3$ e $\lfloor 100/p\rfloor = 1$: expoente $3 - 2 = 1 > 0$.

O maior primo de dois dígitos não superior a 66 é 61.

Resposta: 61.

Questão 5.12 Pelo teorema de Kummer/Lucas, $\binom{n}{k}$ é ímpar exatamente quando cada algarismo binário de k é menor ou igual ao algarismo correspondente de n. Escrevendo 2024 em base 2:

$$2024 = 11111101000_2,$$

que possui 7 algarismos 1. Os valores de k com $\binom{2024}{k}$ ímpar correspondem às escolhas livres (0 ou 1) nas 7 posições dos uns: $2^7 = 128$.

Resposta: 128 coeficientes ímpares.

Questão 5.13 Como $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$, colocamos $(n+1)!$ em evidência:

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \frac{(n+1)!\,[(n+2)+1]}{(n+1)!\,[(n+2)-1]} = \frac{n+3}{n+1}.$$

Resposta: $\dfrac{n+3}{n+1}$.

Questão 5.14 **a)** $9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = \dfrac{9!}{6!}$.

b) Analogamente, completando com os fatores de $(n-6)!$:

$$(n-3)(n-4)(n-5) = \frac{(n-3)!}{(n-6)!}.$$

Resposta: a) $\dfrac{9!}{6!}$; b) $\dfrac{(n-3)!}{(n-6)!}$.

Questão 5.15 Pelo teorema multinomial, o termo em $1^4x^2y^4$ tem coeficiente

$$\frac{10!}{4!\,2!\,4!} = \frac{3\,628\,800}{24 \times 2 \times 24} = 3150.$$

Resposta: Alternativa (A): 3150.

Questão 5.16 Separamos os fatores pares e ímpares de $(2n)!$:

$$(2n)! = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n] = [1 \cdot 3 \cdots (2n-1)] \cdot 2^n\, n!,$$

pois $2 \cdot 4 \cdots 2n = (2 \cdot 1)(2 \cdot 2) \cdots (2 \cdot n) = 2^n\, n!$. Logo

$$\frac{(2n)!}{2^n\, n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Resposta: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ (produto dos ímpares até $2n-1$).

Questão 5.17 Se $1000! = N \cdot 10^p$ com N não múltiplo de 10, procuramos p. Como $10^p = 2^p \cdot 5^p$ e o fator primo 2 ocorre mais vezes que o fator 5 na decomposição de 1000!, basta contar os fatores 5: os múltiplos de 5 contribuem $\lfloor 1000/5 \rfloor = 200$ fatores; os múltiplos de 25 contribuem mais $\lfloor 1000/25 \rfloor = 40$; os de 125, mais 8; os de 625, mais 1:

$$p = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Resposta: 1000! termina por 249 zeros.

Questão 5.18 Fatorando: $27\,209 = 7 \times 13^2 \times 23$. Para $n!$ ser múltiplo de $27\,209$ são necessários os fatores 7 ($n \geq 7$), 23 ($n \geq 23$) e 13^2 — este último exige *dois* múltiplos de 13, isto é, $n \geq 26$. Assim, $n!$ é múltiplo de $27\,209$ exatamente para $n \geq 26$, e os elementos de G são $1!, 2!, \ldots, 25!$:

$$\#G = 25.$$

Resposta: Alternativa (E): 25.

Questão 5.19 Escrevemos

$$(n^2)! = \underbrace{(1 \cdot 2 \cdots n)}_{n!} \cdot \underbrace{(n+1)(n+2)\cdots n^2}_{n^2-n \text{ fatores}}.$$

Para $n \geq 2$, o segundo bloco tem $n^2 - n \geq n$ fatores, todos maiores ou iguais a $n+1$; logo esse bloco é maior que $(n+1)^n > n!$ (pois $n!$ é o produto de n fatores, todos menores que $n+1$). Portanto

$$(n^2)! > n! \cdot n! = (n!)^2.$$

Resposta: $(n^2)!$ é o maior.

Questão 5.20 Fatoramos:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{e} \quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

Logo:

$$\frac{(n+1) \cdot n! - n!}{(n-1)!} = \frac{n!\,[(n+1) - 1]}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n^2.$$

Igualando a $7n$:

$$n^2 = 7n \quad \Longrightarrow \quad n(n-7) = 0.$$

Como $n > 0$, temos $n = 7$.

Resposta: Alternativa (B): 7.

Questão 5.21 Fatoramos $(n-2)!$:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)!.$$

Substituindo:

$$\frac{n(n-1)(n-2)! + 3(n-2)!}{n(n-1)(n-2)! - 3(n-2)!} = \frac{(n-2)![n(n-1)+3]}{(n-2)![n(n-1)-3]} = \frac{n^2-n+3}{n^2-n-3}.$$

Igualando a $\frac{31}{29}$:

$$\begin{aligned} 29(n^2-n+3) &= 31(n^2-n-3) \\ 29n^2-29n+87 &= 31n^2-31n-93 \\ 0 &= 2n^2-2n-180 \\ n^2-n-90 &= 0 \\ n &= \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2}. \end{aligned}$$

Assim $n = 10$ ou $n = -9$. Como $n > 0$, temos $n = 10$.

Resposta: Alternativa (A): 10.

Questão 5.22 Para $n \geq 5$, o fatorial $n!$ termina em zero (pois contém fatores 2 e 5). Portanto, apenas os primeiros termos contribuem para o algarismo das unidades:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \text{ (termina em 0)} \end{aligned}$$

Somando: $1 + 2 + 6 + 24 = 33$, que termina em 3.

Resposta: Alternativa (B): 3.

Questão 5.23 Como só interessam os dois últimos algarismos, trabalhamos módulo 100. Para $n \geq 10$, o fatorial $n!$ contém dois fatores 5 (a saber, 5 e 10) e sobram fatores 2: $n!$ é múltiplo de 100 e não altera os dois últimos algarismos da soma. Restam as parcelas de 1! a 9!:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n!$ mod 100	1	2	6	24	20	20	40	20	80

Somando: $1+2+6+24+20+20+40+20+80 = 213 \equiv 13 \pmod{100}$. Portanto N termina em $\ldots 13$: o algarismo das unidades é 3 (coerente com a questão anterior) e o das dezenas é 1.

Resposta: Alternativa (A): 1.

Questão 5.24 Escreva

$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{2} = n \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

Entre três inteiros consecutivos $n-1, n, n+1$ há sempre um múltiplo de 3 e ao menos um par, de modo que $(n-1)n(n+1)$ é múltiplo de 6 e $\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$ é múltiplo de 3; junto com o fator n que sobrou, isso dá um múltiplo de 3. Além disso, $n^2(n^2-1)$ é divisível por 4 quando n é par, e quando n é ímpar tanto $n-1$ como $n+1$ são pares — nos dois casos o quociente é par. Logo $6 \mid \frac{n^2(n^2-1)}{2}$ para todo n.

Nenhum k maior serve: para $n = 2$ a expressão vale $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, de modo que qualquer divisor universal tem de dividir 6.

Resposta: $k = 6$.

Questão 5.25 Reconhecemos que os coeficientes $1, 5, 10, 10, 5, 1$ são os coeficientes binomiais $\binom{5}{k}$. Logo:

$$N = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 97^{5-k} \cdot 1^k = (97+1)^5 = 98^5.$$

Fatorando $98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2$, temos $N = (2 \cdot 7^2)^5 = 2^5 \cdot 7^{10}$. O número de divisores é $(5+1)(10+1) = 6 \cdot 11 = 66$.

Resposta: Alternativa (C): 66.

Questão 5.26 Há *duas* maneiras de formar x^5 no produto: termo constante de um fator vezes termo em x^5 do outro. Do fator $(1+x)^{10}$, o termo em x^5 é $\binom{10}{5}x^5 = 252x^5$; do fator $(1-12x^5)^{21}$, o termo em x^5 é $\binom{21}{1}(-12x^5) = -252x^5$. O coeficiente procurado é, portanto,

$$1 \cdot \binom{10}{5} + \binom{21}{1} \cdot (-12) \cdot 1 = 252 - 252 = 0.$$

Os números batem: $\binom{10}{5} = 252$ e $21 \cdot 12 = 252$; o problema foi construído para o cancelamento exato — quem esquece a contribuição do primeiro fator cai na alternativa (E).

Resposta: Alternativa (A): 0.

Questão 5.27 Para que $\dfrac{12N}{12!}$ seja inteiro, precisamos que $12!$ divida $12N$, isto é, que $\dfrac{12!}{12}$ divida N. Ora,

$$\frac{12!}{12} = 11! = \frac{479\,001\,600}{12} = 39\,916\,800,$$

e $11!$ é o menor múltiplo de si mesmo, logo $N = 11! = 39\,916\,800$.

A soma dos seus algarismos é $3+9+9+1+6+8+0+0 = 36$.

Resposta: $N = 11! = 39\,916\,800$; a soma dos algarismos é 36.

Questão 5.28 O número $15!$ contém os fatores 3, 6 e 9, logo é divisível por 9 — e um múltiplo de 9 tem soma dos algarismos múltipla de 9. Somando os algarismos conhecidos:

$$1+3+0+7+6+7+A+3+6+8+0+0+0 = 41+A.$$

Para $41 + A \equiv 0 \pmod 9$ com $0 \le A \le 9$, a única possibilidade é $A = 4$, que dá $41 + 4 = 45 = 9 \cdot 5$. Conferindo: $15! = 1\,307\,674\,368\,000$, e o algarismo na posição indicada é, de fato, 4.

Resposta: Alternativa (B): 4.

Questão 5.29 Procuramos N (100 a 999) tal que $N = a! + b! + c!$ onde a, b, c são seus dígitos. Testando:

$$1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145 \quad \checkmark$$

Portanto, $N = 145$ e a soma de dígitos é $1 + 4 + 5 = 10$.

Resposta: Alternativa (A): 10.

Questão 5.30 Usando a fórmula de Legendre:

$$p(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor .$$

Para $n = 10000$:

$$\begin{aligned} p(10000) &= \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{625} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{3125} \right\rfloor \\ &= 2000 + 400 + 80 + 16 + 3 \\ &= 2499. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa (E): 2499.

Questão 5.31 Usando a diferença de quadrados:

$$112296^2 - 79896^2 = (112296 - 79896)(112296 + 79896) = 32\,400 \cdot 192\,192.$$

Fatoremos cada parcela: $32\,400 = 324 \cdot 100 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ e $192\,192 = 192 \cdot 1001 = (2^6 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13)$. O produto é

$$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Comparemos com 13!: pela fórmula de Legendre, o expoente de 2 em 13! é $6 + 3 + 1 = 10$, o de 3 é $4 + 1 = 5$, o de 5 é 2, e os primos 7, 11 e 13 comparecem uma vez cada — exatamente a fatoração obtida. Logo o valor é $13! = 6\,227\,020\,800$.

Resposta: Alternativa (C): 13!.

Questão 5.32 Tratando $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$ como o binômio $(a + b)^{100}$ com $a = b = \frac{1}{10}$, o termo geral é

$$T_{k+1} = \binom{100}{k} a^{100-k} b^k = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^{100} :$$

todos os termos têm o mesmo fator $\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$, e o maior é o de maior coeficiente binomial. Como $\binom{100}{k}$ cresce até o centro e decresce depois (veja o gráfico da teoria), o máximo ocorre em $k = 50$.

(A soma, naturalmente, vale $\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$ — mas isso não diz nada sobre qual termo isolado é o maior.)

Resposta: Alternativa (E): 50.

Questão 5.33 O número de zeros finais de $n!$ é $\sum_{i\geq 1}\lfloor n/5^i\rfloor$. Para exatamente 25 zeros, procuramos n tal que

$$\left\lfloor \frac{n}{5}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125}\right\rfloor + \cdots = 25.$$

Chamemos essa contagem de $z(n)$. Ela só muda quando n atravessa um múltiplo de 5, permanecendo constante em blocos de cinco inteiros consecutivos:

n	100–104	105	106–108	109	110
$z(n)$	24	25	25	25	26

De fato, $z(104) = 20+4 = 24$, $z(105) = 21+4 = 25$ e $z(110) = 22+4 = 26$. Assim, $z(n) = 25$ exatamente para $n \in \{105, 106, 107, 108, 109\}$: 5 valores.

Resposta: Alternativa (C): 5.

Questão 5.34 Observe que, para $2 \leq k \leq n$, o número $n! + k$ é divisível por k (pois $n!$ é divisível por k). Logo todos os números de $n!+2$ a $n!+n$ são compostos — e esses são precisamente os números estritamente entre $n!+1$ e $n!+n$, junto com o próprio $n!+n$. Assim há exatamente **zero** primos no intervalo.

Essa é a construção clássica de intervalos arbitrariamente longos sem primos: para qualquer n, os $n-1$ inteiros consecutivos $n!+2, \ldots, n!+n$ são todos compostos.

Resposta: Alternativa (A): 0.

Questão 5.35 Examinemos primeiro os casos pequenos, acumulando as somas $S_n = 1! + 2! + \cdots + n!$:

n	1	2	3	4	5
S_n	1	3	9	33	153

Dessas, apenas $S_1 = 1 = 1^2$ e $S_3 = 9 = 3^2$ são quadrados perfeitos. Agora, o argumento geral: para $n \geq 5$, cada $n!$ termina em 0, de modo que S_n termina no mesmo algarismo que $S_4 = 33$, isto é, em 3. Mas o algarismo das unidades de um quadrado perfeito só pode ser $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9 (basta examinar $0^2, 1^2, \ldots, 9^2$) — nunca 3. Assim, nenhum S_n com $n \geq 4$ é quadrado, e os únicos pares são $(m, n) = (1, 1)$ e $(m, n) = (3, 3)$: exatamente 2.

Observação: versões impressas desta questão trazem como gabarito a alternativa (C); a contagem correta, verificada acima, é 2.

Resposta: Alternativa (B): 2.

Questão 5.36 O método geral: se $(2x-3)^4 = \sum_i c_i x^i$ e $(x+2)^5 = \sum_j d_j x^j$, o coeficiente de x^4 no produto é $\sum_{i+j=4} c_i d_j$. Pelo termo geral do binômio, $c_i = \binom{4}{i} 2^i (-3)^{4-i}$, dando $(c_0, \ldots, c_4) = (81, -216, 216, -96, 16)$, e $d_j = \binom{5}{j} 2^{5-j}$, dando $(d_0, \ldots, d_4) = (32, 80, 80, 40, 10)$.

Termo a termo:

(i,j)	c_i	d_j	$c_i d_j$
$(0,4)$	81	10	810
$(1,3)$	-216	40	-8640
$(2,2)$	216	80	17 280
$(3,1)$	-96	80	-7680
$(4,0)$	16	32	512

Somando: $810 - 8640 + 17\,280 - 7680 + 512 = 2282$.

Resposta: 2282.

Questão 5.37 Escrevamos os termos gerais dos dois fatores:

$$(x+2)^{20} = \sum_{m=0}^{20} \binom{20}{m} 2^{20-m} x^m, \qquad (x^2-1)^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (-1)^{5-j} x^{2j}.$$

Precisamos de $m + 2j = 28$ com $0 \leq m \leq 20$ e $0 \leq j \leq 5$. Como $2j \leq 10$, vem $m \geq 18$; as únicas possibilidades são $(j, m) = (5, 18)$ e $(j, m) = (4, 20)$:

(j,m)	fator de $(x^2-1)^5$	fator de $(x+2)^{20}$	contribuição
$(5,18)$	$+1$	$\binom{20}{18} 2^2 = 190 \cdot 4 = 760$	$+760$
$(4,20)$	$-\binom{5}{4} = -5$	$\binom{20}{20} 2^0 = 1$	-5

O coeficiente de x^{28} é $760-5=755$ (valor conferido computacionalmente pela expansão completa do produto).

Resposta: Alternativa (E): 755.

Questão 5.38 O primeiro fator simplifica de imediato — os seus dois termos têm x:

$$\left(2x+\frac{x}{2}\right)^3 = x^3\left(2+\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 x^3 = \frac{125}{8}\,x^3.$$

Falta então o termo em x^3 do segundo fator. Seu termo geral é

$$\binom{3}{j}\left(x^2\right)^j\left(\frac{3}{2x}\right)^{3-j} = \binom{3}{j}\left(\frac{3}{2}\right)^{3-j} x^{3j-3},$$

e $3j-3=3$ dá $j=2$: o termo é $\binom{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\,x^3=\frac{9}{2}x^3$.

Logo o coeficiente de x^6 no produto é

$$\frac{125}{8}\cdot\frac{9}{2}=\frac{1125}{16}.$$

(O desenvolvimento completo é $\frac{125}{8}x^9+\frac{1125}{16}x^6+\frac{3375}{32}x^3+\frac{3375}{64}$, o que confirma o valor.)

Resposta: $\dfrac{1125}{16}$.

Questão 5.39 O termo geral é

$$T_{k+1}=\binom{100}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{100-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\binom{100}{k}}{2^{200-k}}.$$

Para localizar o máximo, comparamos termos consecutivos:

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{\binom{100}{k+1}}{\binom{100}{k}}\cdot 2=\frac{100-k}{k+1}\cdot 2,$$

que é maior que 1 enquanto $2(100-k)>k+1$, isto é, $k<\frac{199}{3}\approx 66{,}3$. Assim os termos crescem até $k=67$ e decrescem depois, e o maior é

$$T_{68}=\binom{100}{67}\left(\frac{1}{4}\right)^{33}\left(\frac{1}{2}\right)^{67}=\frac{\binom{100}{67}}{2^{133}}.$$

Note como a razão $\frac{b}{a} = 2$ empurra o máximo bem para além do centro $k = 50$: com $a = b$ o pico ficaria em $k = 50$, e aqui ele vai para $k = 67$.

Resposta: $T_{68} = \binom{100}{67}/2^{133}$, o termo com $k = 67$.

Questão 5.40 Primeiro, verificamos: $p(30) = \lfloor 30/5 \rfloor + \lfloor 30/25 \rfloor = 6 + 1 = 7$ zeros (confirmado). Para encontrar o dígito que precede os zeros, analisamos $30!/10^7$ modulo 10. Como $30! = 265252859812191058636308480000000$, o dígito antes dos zeros é 8.

Resposta: Alternativa (E): 8.

Questão 5.41 Procuramos o menor n tal que $p(n) = 1987$. Usamos a fórmula inversa:

$$n \approx 4 \cdot p(n) = 4 \cdot 1987 = 7948.$$

Testando: $p(7948) = 1589+317+63+12+2 = 1983$. $p(7960) = 1592+318+63+12+2 = 1987$. Verificando menores: $p(7950) = 1590+318+63+12+2 = 1985$. Portanto, $n = 7960$.

Resposta: Alternativa (C): 7960.

Questão 5.42 Na notação do enunciado, $(p)_q$ denota o binomial $\binom{p}{q}$. Observe primeiro que $\binom{5}{12} = 0$ (não há como escolher 12 objetos entre 5), de modo que a soma se reduz a

$$\binom{10}{3} \cdot 10! + \binom{7}{4} \cdot 7! = 120 \cdot 10! + 35 \cdot 7!.$$

Para a potência de 5, usamos a valoração v_5 (o expoente de 5 na fatoração): $v_5(120) = 1$ e $v_5(10!) = 2$, logo a primeira parcela tem $v_5 = 1 + 2 = 3$; já $v_5(35) = 1$ e $v_5(7!) = 1$, logo a segunda parcela tem $v_5 = 1+1 = 2$. Quando duas parcelas têm valorações *diferentes*, a soma herda a menor delas:

$$v_5\left(120 \cdot 10! + 35 \cdot 7!\right) = \min(3, 2) = 2.$$

Portanto o maior k é 2.

Resposta: Alternativa (B): 2.

Questão 5.43 Primeiro, os expoentes dos primos relevantes em 26!, pela fórmula de Legendre. Para o 2: $\lfloor 26/2\rfloor + \lfloor 26/4\rfloor + \lfloor 26/8\rfloor + \lfloor 26/16\rfloor = 13 + 6 + 3 + 1 = 23$. Para o 3: $\lfloor 26/3\rfloor + \lfloor 26/9\rfloor = 8 + 2 = 10$. Para o 5: $\lfloor 26/5\rfloor + \lfloor 26/25\rfloor = 5 + 1 = 6$.

O número de zeros finais de 26! é $\min(23, 6) = 6$; eliminá-los significa dividir por $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. O número N resultante contém, portanto, $2^{23-6} = 2^{17}$ e 3^{10} em sua fatoração.

Como $12^k = 2^{2k} \cdot 3^k$, precisamos simultaneamente de $2k \le 17$ (isto é, $k \le 8$) e de $k \le 10$. A condição mais restritiva é a do 2, e $k_{\max} = 8$.

Resposta: Alternativa (C): 8.

Questão 5.44 Cuidado com uma armadilha: $240 = 16 \cdot 15$ divide 16!, mas *também* divide 14! (que contém os fatores $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ de sobra). Um inteiro m divide um fatorial exatamente quando, para cada primo p, o expoente de p em m não excede o expoente de p no fatorial. Assim, m divide 16! mas não 14! se, e somente se, m carrega alguma potência de primo que ultrapassa 14! sem ultrapassar 16!. Comparemos os expoentes (fórmula de Legendre):

primo p	2	3	5	7	11	13
expoente em 14!	11	5	2	2	1	1
expoente em 16!	15	6	3	2	1	1

Os primos 7, 11 e 13 têm o mesmo expoente nos dois fatoriais e não podem ser responsáveis pela diferença. As menores potências que "cabem" em 16! mas não em 14! são $2^{12} = 4096$, $3^6 = 729$ e $5^3 = 125$. Qualquer número com a propriedade pedida é múltiplo de uma dessas três potências; o menor deles é $5^3 = 125$.

Resposta: Alternativa (E): 125.

Questão 5.45 Tomamos $M = a - b$; como $a > b + 1$, temos $M \ge 2 > 1$. Da fatoração

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}\right),$$

segue que $(a - b) \mid a^n - b^n$ para todo $n \ge 1$. (Em linguagem de congruências: $a \equiv b \pmod{a-b}$ implica $a^n \equiv b^n \pmod{a-b}$.) ■

Resposta: $M = a - b$.

Questão 5.46 *Base:* para $n = 1$, $1 + 8 + 27 = 36 = 9 \times 4$. ✓

Passo: suponha $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$. A diferença entre a expressão para $n+1$ e para n é

$$(n+3)^3 - n^3 = 9n^2 + 27n + 27 = 9\left(n^2 + 3n + 3\right),$$

que é múltiplo de 9. Logo, a expressão para $n+1$ é a soma de dois múltiplos de 9 — e é múltiplo de 9. Por indução, o resultado vale para todo $n \geq 1$. ■

Resposta: Demonstrado por indução.

Questão 5.47 Sejam I e P as quantidades de subconjuntos de cardinalidade ímpar e par. Sabemos que $P + I = 2^n$ e, pelo binômio de Newton,

$$P - I = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Logo $I = P = 2^{n-1}$.

Resposta: 2^{n-1} maneiras.

Questão 5.48 O truque padrão para potências de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ é juntar o conjugado. Sejam $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Ao expandir $\alpha^6 + \beta^6$ pelo binômio, os termos com potências ímpares de $\sqrt{2}$ aparecem com sinais opostos e cancelam: a soma é um *inteiro*. Para calculá-la sem expandir tudo, note que

$$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \qquad \beta^2 = 5 - 2\sqrt{6},$$

com $\alpha^2 + \beta^2 = 10$ e $\alpha^2\beta^2 = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25 - 24 = 1$. Usando $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$ com $u = \alpha^2$ e $v = \beta^2$:

$$\alpha^6 + \beta^6 = 10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10 = 970.$$

Como $0 < \beta = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0{,}318 < 1$, temos $0 < \beta^6 < 1$ (numericamente, $\beta^6 \approx 0{,}001$), logo

$$\alpha^6 = 970 - \beta^6 \in (969,\, 970).$$

O menor inteiro maior que α^6 é 970.

Resposta: Alternativa (C): 970.

Questão 5.49 A técnica é a das questões vizinhas: com $x = 4+\sqrt{15}$ e o conjugado $y = 4-\sqrt{15}$, temos $x+y = 8$, $xy = 16-15 = 1$ e $0 < y < 1$. As somas $a_n = x^n + y^n$ são inteiras — os radicais cancelam no binômio — e obedecem a

$$a_n = 8a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad a_0 = 2,\ a_1 = 8,$$

o que dá

$$2,\ 8,\ 62,\ 488,\ 3842,\ 30\,248, \ldots$$

Como $0 < y^n < 1$, vem $a_n - 1 < x^n < a_n$, logo a parte inteira de x^n é $a_n - 1$. Para $n = 5$:

$$\left\lfloor (4+\sqrt{15})^5 \right\rfloor = 30\,248 - 1 = 30\,247.$$

Note que a recorrência faz todo o trabalho: nenhum radical precisa ser calculado.

Resposta: 30 247.

Questão 5.50 Sejam $x = 15+\sqrt{220}$ e $y = 15-\sqrt{220}$. Então $x+y = 30$, $xy = 15^2 - 220 = 5$ e $0 < y < 1$ (pois $\sqrt{220} \approx 14{,}83$). As somas simétricas $a_n = x^n + y^n$ são inteiras (os radicais cancelam no binômio) e satisfazem a recorrência

$$a_n = 30\,a_{n-1} - 5\,a_{n-2}, \qquad a_0 = 2,\ a_1 = 30.$$

Examinemos os primeiros valores módulo 10:

n	0	1	2	3	4
$a_n \bmod 10$	2	0	0	0	0

De fato, $a_2 = 30 \cdot 30 - 5 \cdot 2 = 890$ e, dali em diante, $a_n \equiv -5a_{n-2} \pmod{10}$, que preserva o final 0 (múltiplo par de 5): por indução, $a_n \equiv 0 \pmod{10}$ para todo $n \geq 1$.

Agora, o número do enunciado: $x^{19} = a_{19} - y^{19}$, e $0 < y^{82} < y^{19} < 1$. Logo

$$x^{19} + y^{82} = a_{19} - \left(y^{19} - y^{82}\right), \qquad 0 < y^{19} - y^{82} < 1,$$

de modo que o número está entre $a_{19} - 1$ e a_{19}: sua parte inteira é $a_{19} - 1$, que termina em 9 (pois a_{19} termina em 0). O algarismo das unidades é 9 — confirmado por cálculo numérico de alta precisão.

Resposta: Alternativa (E): 9.

Questão 5.51 Aqui $|\cdot|$ denota a parte inteira de $(2+\sqrt{3})^n$. Examinemos primeiro os casos pequenos, com $x = 2+\sqrt{3}$ e $y = 2-\sqrt{3}$ (note que $x+y=4$, $xy=1$ e $0<y<1$). As somas $a_n = x^n + y^n$ são inteiras e satisfazem $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$:

n	1	2	3	4	5
a_n	4	14	52	194	724
parte inteira de x^n	3	13	51	193	723

O padrão salta à vista: todos os a_n são *pares* e as partes inteiras são *ímpares*. Provemos ambos. Por indução, se a_{n-2} e a_{n-1} são pares, então $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ também é; a base $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ é par. Além disso, de $0 < y^n < 1$ vem

$$x^n = a_n - y^n \quad \Longrightarrow \quad a_n - 1 < x^n < a_n,$$

logo a parte inteira de x^n é $a_n - 1$: um número par menos um — sempre ímpar.

Resposta: Alternativa (C): é sempre ímpar.

Questão 5.52 Sejam $x = 6+\sqrt{35}$ e $y = 6-\sqrt{35}$, de modo que $x+y=12$ e $xy = 36-35 = 1$. Como nas questões vizinhas, $a_n = x^n + y^n$ é inteiro (os radicais cancelam no binômio), logo

$$x^{1980} = a_{1980} - y^{1980}.$$

Resta ver o quanto y^{1980} é pequeno. Como $\sqrt{35} > 5{,}9$, temos $0 < y < 0{,}1$, e portanto

$$0 < y^{1980} < 10^{-1980} < 10^{-1000}.$$

Assim

$$x^{1980} = (a_{1980} - 1) + \left(1 - y^{1980}\right),$$

e $1 - y^{1980} = 0{,}999\ldots$ com mais de 1980 noves antes que qualquer outro algarismo apareça. Logo a representação decimal de x^{1980} é o inteiro $a_{1980}-1$ seguido de vírgula e de pelo menos 1980 noves: os mil primeiros algarismos após a vírgula são todos 9.

(Uma estimativa mais fina, $y = 6 - \sqrt{35} \approx 0{,}08392$, dá $y^{1980} \approx 10^{-2131}$ — de fato os 2130 primeiros algarismos após a vírgula são noves.)

Resposta: Alternativa (E): 9.

Questão 5.53 Multiplicando cada parcela por $\dfrac{10!}{10!}$, reconhecemos binomiais:

$$\frac{1}{k!\,(10-k)!} = \frac{1}{10!}\binom{10}{k}.$$

Logo a soma vale

$$\frac{1}{10!}\left[\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9}\right] = \frac{2^9}{10!},$$

pois a soma dos binomiais de classe ímpar é metade de 2^{10} (faça $x = 1$ e $x = -1$ em $(1+x)^{10}$ e subtraia: as classes par e ímpar somam o mesmo).

Na forma irredutível, como $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$,

$$\frac{2^9}{10!} = \frac{2}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2}{14\,175}.$$

Resposta: $\dfrac{2^9}{10!} = \dfrac{2}{14\,175}$.

Questão 5.54 A estratégia é multiplicar tudo por $19!$ para transformar cada parcela em um coeficiente binomial: como $\dfrac{19!}{k!\,(19-k)!} = \binom{19}{k}$,

$$19! \cdot \frac{1}{k!\,(19-k)!} = \binom{19}{k}, \qquad 19! \cdot \frac{N}{1!\,18!} = 19N$$

A identidade do enunciado torna-se

$$\sum_{k=2}^{9} \binom{19}{k} = 19N.$$

Para somar os binomiais, partimos de $\sum_{k=0}^{19}\binom{19}{k} = 2^{19}$ e usamos a simetria $\binom{19}{k} = \binom{19}{19-k}$, que emparelha $k = 0, 1, \ldots, 9$ com $k = 19, 18, \ldots, 10$: cada metade soma

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{19}{k} = \frac{2^{19}}{2} = 2^{18} = 262\,144.$$

Descontando os termos $k=0$ e $k=1$:

$$\sum_{k=2}^{9}\binom{19}{k} = 262\,144 - 1 - 19 = 262\,124.$$

Logo $19N = 262\,124$, isto é, $N = 13\,796$, e

$$\left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor = \lfloor 137{,}96 \rfloor = 137.$$

(Valor conferido computacionalmente; este é o clássico problema do AIME 1984.)

Resposta: Alternativa (D): 137.

Questão 5.55 Sejam $A = 10!\cdot 18!$ e $B = 12!\cdot 17!$. Comparemos os dois pela razão, aproveitando os cancelamentos:

$$\frac{A}{B} = \frac{10!}{12!}\cdot\frac{18!}{17!} = \frac{18}{11\cdot 12} = \frac{18}{132} = \frac{3}{22},$$

fração já irredutível. Se $\dfrac{A}{B} = \dfrac{3}{22}$ com $\mathrm{mdc}(3,22)=1$, então $\mathrm{mmc}(A,B) = 22A = 3B$ (multiplicar A pelo denominador reduzido, ou B pelo numerador reduzido). Assim

$$\mathrm{mmc}(A,B) = 3\cdot 12!\cdot 17!.$$

Para chegar à forma pedida, absorvemos o 3 no fatorial maior: $3\cdot 17! = \dfrac{18\cdot 17!}{6} = \dfrac{18!}{3!}$, donde

$$\mathrm{mmc}(A,B) = \frac{12!\cdot 18!}{3!},$$

com $a=12$ e $b=18$ (dois algarismos) e $c=3$ (um algarismo). Logo $a+b+c = 12+18+3 = 33$. (Conferido computacionalmente: $\mathrm{mmc}(A,B) = 12!\,18!/3!$, e $18!\,12!/1!$ *não* é o mmc.)

Resposta: Alternativa (C): 33.

Questão 5.56 Lembre que $z(n) = \lfloor n/5\rfloor + \lfloor n/25\rfloor + \lfloor n/125\rfloor + \cdots$.

Exatamente cinco soluções. A função z é não decrescente e só muda quando n atravessa um múltiplo de 5: para $n = 5q + r$ com $0 \le r \le 4$,

cada parcela $\lfloor n/5^i \rfloor$ vale o mesmo que em $n = 5q$. Logo z é constante em cada bloco $\{5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3, 5q+4\}$ e cresce estritamente de um bloco para o seguinte, já que todo novo múltiplo de 5 acrescenta ao menos um fator 5. Um valor assumido é, portanto, assumido num bloco inteiro — cinco inteiros consecutivos — e nunca em 1, 2, 3 ou 4 deles. O bloco $q = 0$ é a razão da hipótese $m \geq 1$: entre os inteiros positivos ele contribui apenas com $n = 1, 2, 3, 4$, de modo que $z(n) = 0$ tem quatro soluções.

Por exemplo, para $m = 25$: $z(104) = 20 + 4 = 24$, $z(105) = 21 + 4 = 25$ e $z(110) = 22 + 4 = 26$, logo as soluções são exatamente $n \in \{105, 106, 107, 108, 109\}$.

O menor valor não assumido. Um valor é pulado exatamente quando o salto de um bloco para o seguinte é maior que 1, o que acontece nos múltiplos de 25. O primeiro é $n = 25$:

$$z(24) = 4, \qquad z(25) = 6,$$

pois 25 contribui com dois fatores 5 de uma vez. Assim $m = 5$ é o menor valor que z nunca assume — não existe n com $n!$ terminando em exatamente cinco zeros.

Resposta: Todo $m \geq 1$ assumido tem exatamente 5 soluções; o menor valor não assumido é $m = 5$.

Questão 5.57 Cuidado: 1990 termina em 0, então o argumento não pode ser só "a soma terminaria em zero". Separemos em três casos.

Caso 1: $X \geq 5$ e $Y \geq 5$. Para $n \geq 5$, o fatorial $n!$ contém os fatores 4 e 5, logo é múltiplo de 20; a soma $X! + Y!$ também seria múltipla de 20. Mas um número que termina em 1990 deixa resto $1990 - 99 \cdot 20 = 10$ na divisão por 20 — contradição.

Caso 2: exatamente um deles é pequeno, digamos $X \leq 4$. Então $X! \in \{1, 2, 6, 24\}$ e $Y!$ termina em 0, de modo que o algarismo das unidades de $X! + Y!$ seria 1, 2, 6 ou 4 — nunca o 0 exigido.

Caso 3: $X \leq 4$ e $Y \leq 4$. A soma vale no máximo $24 + 24 = 48$, insuficiente para terminar em 1990.

Em todos os casos há contradição: tais X e Y não existem. (Uma busca computacional por todos os pares com $X, Y \leq 40$ confirma que nenhuma soma $X! + Y!$ termina em 1990.)

Resposta: Alternativa (E): não existem.

Questão 5.58 Seja P_n o número de palavras com quantidade par de a's e I_n com quantidade ímpar. Escolhendo as posições dos a's e preenchendo o resto com b ou c:

$$P_n = \sum_{k \text{ par}} \binom{n}{k} 2^{n-k}, \qquad I_n = \sum_{k \text{ ímpar}} \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Pelo binômio de Newton, $P_n + I_n = (2+1)^n = 3^n$ e $P_n - I_n = (2-1)^n = 1$. Logo $P_n = \dfrac{3^n+1}{2}$.

Resposta: $\dfrac{3^n+1}{2}$ palavras.

Questão 5.59 Escolhemos k dos $2n+1$ objetos distintos ($0 \le k \le n$) e completamos com $n-k$ objetos indistinguíveis (uma única maneira). O total é

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}.$$

Pela simetria $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$, essa soma cobre exatamente metade dos coeficientes de $(1+1)^{2n+1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}. \qquad \blacksquare$$

Resposta: 2^{2n} maneiras.

Questão 5.60 Aqui não é preciso raiz da unidade nenhuma: bastam duas substituições. Escrevendo $P(x) = (1+x+x^2)^n$,

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 3^n,$$

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n} = (1-1+1)^n = 1.$$

Somando as duas, os coeficientes de índice ímpar cancelam e os de índice par dobram:

$$P(1) + P(-1) = 2\,(a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) = 2S \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{3^n+1}{2}.$$

(Conferindo para $n=5$: o desenvolvimento dá $S=122$, e $\frac{3^5+1}{2}=\frac{244}{2}=122$. ✓)

Resposta: Alternativa (E): $\dfrac{3^n+1}{2}$.

Questão 5.61 Analisemos uma a uma.

(1) Pelo binômio de Newton,

$$101^{50}-99^{50}=(100+1)^{50}-(100-1)^{50}=2\left[\binom{50}{1}100^{49}+\binom{50}{3}100^{47}+\cdots\right],$$

pois os termos de expoente par em 1 cancelam e os de expoente ímpar dobram. Só a primeira parcela já vale $2\cdot 50\cdot 100^{49}=100^{50}$, e as demais são positivas; logo $101^{50}-99^{50}>100^{50}$, isto é, $101^{50}>100^{50}+99^{50}$. A afirmativa é *falsa.*

(2) Módulo 3, temos $4\equiv 1$, logo $4^n+1\equiv 1^n+1=2$ para todo n: nunca múltiplo de 3. *Verdadeira.*

(3) Como $89\equiv -1 \pmod{18}$, vale $89^n+1\equiv(-1)^n+1$, que é 0 para n ímpar mas 2 para n par; por exemplo, $89^2+1=7922$ não é múltiplo de 18. *Falsa.*

(4) Módulo 4: $99\equiv 3$ e $3^2\equiv 1$, logo $99^{60}=(3^2)^{30}\equiv 1$; e $51\equiv 3$, logo $51^{51}\equiv 3^{51}=3\cdot(3^2)^{25}\equiv 3$. Assim $99^{60}-51^{51}\equiv 1-3\equiv 2 \pmod 4$: não é divisível por 4. *Falsa.*

Exatamente uma afirmativa (a segunda) é verdadeira.

Resposta: Alternativa (B): 1.

Questão 5.62 A chave é escrever $6=7-1$ e $8=7+1$ e expandir pelo binômio de Newton:

$$8^{97}=(7+1)^{97}=\sum_{k=0}^{97}\binom{97}{k}7^k,\qquad 6^{97}=(7-1)^{97}=\sum_{k=0}^{97}\binom{97}{k}7^k(-1)^{97-k}.$$

Como $49=7^2$, todos os termos com $k\geq 2$ são múltiplos de 49 e desaparecem módulo 49. Sobram apenas $k=0$ e $k=1$:

$$8^{97}\equiv 1+\binom{97}{1}\cdot 7=1+679 \pmod{49},$$

$$6^{97}\equiv(-1)^{97}+\binom{97}{1}\cdot 7\cdot(-1)^{96}=-1+679 \pmod{49}.$$

Somando, os ± 1 cancelam:

$$a_{97} \equiv 2 \cdot 679 = 1358 \pmod{49}.$$

Como $1358 = 27 \cdot 49 + 35$, o resto é 35. (Este é o problema 6 do AIME 1983.)

Resposta: Alternativa (C): 35.

Questão 5.63 Todos os cinco números são produtos de fatoriais cujos "numeradores" somam 1000, o que permite compará-los por razões cujos fatores se cancelam.

p é o maior: $\dfrac{p}{t} = \dfrac{1000!}{700!\,300!} = \binom{1000}{300} > 1$, e o mesmo argumento (um coeficiente binomial ou multinomial é um inteiro ≥ 1) mostra que 1000! supera todos os outros.

$t > r$: $\dfrac{t}{r} = \dfrac{700!\,300!}{500!\,500!} = \dfrac{501 \cdot 502 \cdots 700}{301 \cdot 302 \cdots 500}$, quociente de 200 fatores por 200 fatores, cada fator do numerador excedendo em 200 o correspondente do denominador; logo $t > r$.

$r > s$: $\dfrac{r}{s} = \dfrac{500!\,500!}{600!\,300!\,100!} = \dfrac{301 \cdot 302 \cdots 500}{(501 \cdot 502 \cdots 600) \cdot (1 \cdot 2 \cdots 100)}$. No numerador há 200 fatores, todos ≥ 301; agrupando-os em 100 pares, cada par vale pelo menos $301 \cdot 302 > 90\,000$. No denominador há 100 pares da forma (fator ≤ 600)$\times$(fator ≤ 100), cada um valendo no máximo $600 \cdot 100 = 60\,000$. Logo $r > s$.

$s > q$: $\dfrac{s}{q} = \dfrac{600!\,300!\,100!}{400!\,400!\,200!} = \dfrac{401 \cdot 402 \cdots 600}{(301 \cdots 400) \cdot (101 \cdots 200)}$: são 200 fatores em cima, todos maiores que 400, contra 200 fatores embaixo, todos menores que 400. Logo $s > q$.

A ordem crescente é, portanto, $q < s < r < t < p$. (A ordenação foi conferida computacionalmente; gabaritos impressos por vezes trocam r e t.)

Resposta: Alternativa (D): $q < s < r < t < p$.

Questão 5.64 **Afirmativa 1.** O expoente de um primo p em $\binom{2n}{n}$ é o número de "vai um" ao somar $n + n$ na base p (teorema de Kummer). Escrevendo 500 na base 7: $500 = 1 \cdot 343 + 3 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 3$, ou seja, $500 = (1313)_7$. Na soma $500 + 500$ em base 7, as colunas dão $3 + 3 = 6$,

$1+1=2$, $3+3=6$ e $1+1=2$ — todas menores que 7, sem nenhum transporte. Logo $7 \nmid \binom{1000}{500}$ e a afirmativa é *falsa*.

Afirmativa 2. Agrupemos os fatores de $999!$ em pares simétricos k e $1000-k$, para $k=1,\dots,499$, deixando o fator central 500. Pela desigualdade das médias, $k(1000-k) \le 500^2$, com igualdade só em $k=500$; assim

$$999! = 500 \prod_{k=1}^{499} k(1000-k) < 500 \cdot \left(500^2\right)^{499} = 500^{999},$$

e a afirmativa é *falsa*.

Afirmativa 3. O mesmo emparelhamento, agora com todos os fatores:

$$(2000!)^2 = \prod_{k=1}^{2000} k(2001-k),$$

e cada produto $k(2001-k)$ vale pelo menos $1 \cdot 2000 = 2000$ (é 2000 nos extremos e maior no interior). Como a desigualdade é estrita para $2 \le k \le 1999$, obtemos $(2000!)^2 > 2000^{2000}$: *verdadeira*.

Somente a terceira afirmativa é verdadeira. (Gabaritos impressos desta questão por vezes trazem (D); a análise acima, conferida computacionalmente, mostra que 1 e 2 são falsas.)

Resposta: Alternativa (C): somente a terceira é verdadeira.

Questão 5.65 Fatoremos cada colchete com cuidado:

$$\begin{aligned} a! + (a+1)! + (a+2)! &= a!\,[1 + (a+1) + (a+1)(a+2)] \\ &= a!\,[(a+2) + (a+1)(a+2)] = a!\,(a+2)^2, \end{aligned}$$

pois $1+(a+1) = a+2$ pode ser posto em evidência. Assim

$$N = a!\,b!\left[(a+2)(b+2)\right]^2,$$

e N é quadrado perfeito se, e somente se, $a!\,b!$ o for. Escrevendo $b! = a! \cdot (a+1)(a+2)\cdots b$, temos

$$a!\,b! = (a!)^2 \cdot (a+1)(a+2)\cdots b,$$

que é quadrado exatamente quando o produto $(a+1)(a+2)\cdots b$ é um quadrado perfeito. O caso mais simples é $b = a+1$, quando o produto se reduz a $a+1$: basta que $a+1$ seja quadrado perfeito. No intervalo

$20 < a < b < 40$, isso ocorre para $a+1 = 25$ (isto é, $a = 24$, $b = 25$) e para $a+1 = 36$ (isto é, $a = 35$, $b = 36$). Uma verificação computacional de todos os pares do intervalo mostra que nenhum produto mais longo $(a+1)\cdots b$ é quadrado, de modo que esses são os únicos casos. A soma pedida é $24 + 35 = 59$.

Resposta: Alternativa (E): 59.

Questão 5.66 Usamos o *filtro de raízes da unidade* com as raízes quartas $1, i, -1, -i$: para $f(x) = (1+x)^{2020}$,

$$\sum_{4\mid k} \binom{2020}{k} = \frac{f(1) + f(i) + f(-1) + f(-i)}{4}.$$

Temos $f(1) = 2^{2020}$, $f(-1) = 0$ e, como $(1+i)^4 = -4$,

$$f(i) = (1+i)^{2020} = (-4)^{505} = -2^{1010}, \qquad f(-i) = \overline{f(i)} = -2^{1010}.$$

Logo, a soma vale

$$\frac{2^{2020} - 2\cdot 2^{1010}}{4} = 2^{2018} - 2^{1009}.$$

Resposta: $2^{2018} - 2^{1009}$.

Questão 5.67 Seja $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Pelo filtro de raízes da unidade,

$$N = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4} \prod_{k=1}^{2025} \left(1 + \zeta^{jk}\right).$$

Para $j = 0$ o produto vale 2^{2025}. Para $j \neq 0$: como $2025 = 5 \times 405$, os expoentes jk percorrem 405 vezes os resíduos $0, 1, 2, 3, 4$ módulo 5, e cada período contribui com

$$(1+\zeta^0)\prod_{r=1}^{4}(1+\zeta^r) = 2 \times 1 = 2,$$

pois, de $\prod_{r=1}^{4}(x-\zeta^r) = 1+x+x^2+x^3+x^4$ com $x=-1$, vem $\prod_{r=1}^{4}(1+\zeta^r) = 1-1+1-1+1 = 1$. Assim, o produto vale 2^{405} para cada um dos quatro valores de $j \neq 0$, e

$$N = \frac{2^{2025} + 4\cdot 2^{405}}{5}.$$

Resposta: $\dfrac{2^{2025}+4\cdot 2^{405}}{5}$ subconjuntos.

Questão 5.68 Seja $\zeta = e^{2\pi i/p}$. Pelo filtro de raízes da unidade,

$$N = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{B\subseteq A}\zeta^{j\sum_{b\in B} b} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=1}^{p-1}\left(1+\zeta^{jk}\right).$$

Para $j=0$ o produto vale 2^{p-1}. Para $j\neq 0$, $(\zeta^j,\zeta^{2j},\ldots,\zeta^{(p-1)j})$ é uma permutação de $(\zeta,\zeta^2,\ldots,\zeta^{p-1})$, e de $1+x+\cdots+x^{p-1}=\prod_{k=1}^{p-1}(x-\zeta^k)$ com $x=-1$:

$$\prod_{k=1}^{p-1}(1+\zeta^k) = (-1)^{p-1}(1-1+\cdots+1) = 1.$$

Logo,

$$N = \frac{2^{p-1}+(p-1)}{p}.$$

Resposta: $\dfrac{2^{p-1}+p-1}{p}$ subconjuntos.

Questão 5.69 Seja $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Pelo filtro de raízes da unidade,

$$N = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}\sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,2000\}\\ |S|=100}}\zeta^{j\sum_{s\in S} s}.$$

Para $j=0$ a soma interna é $\binom{2000}{100}$. Para $j\neq 0$, ela é o coeficiente de X^{100} em

$$(X+\zeta^j)(X+\zeta^{2j})\cdots(X+\zeta^{2000j}) = \left(X^5+1\right)^{400},$$

pois as 2000 raízes percorrem 400 vezes as raízes quintas da unidade. Pelo binômio, esse coeficiente é $\binom{400}{20}$. Logo,

$$N = \frac{1}{5}\left(\binom{2000}{100}+4\binom{400}{20}\right).$$

Resposta: $\dfrac{1}{5}\left(\binom{2000}{100}+4\binom{400}{20}\right)$ subconjuntos.

Questão 5.70 (I) é o teorema das linhas. (II) é a simetria dos binomiais complementares. Para (III), note que $\binom{50}{44} = \binom{50}{6}$ pela simetria, logo essas duas quantidades são iguais.

Portanto, apenas (I) e (II) são verdadeiras.

Resposta: Alternativa (B).

Questão 5.71 Pelo teorema das linhas, a linha inteira soma

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} = 2^9 = 512.$$

Logo a soma pedida é 512 menos os cinco termos que faltam, $k = 0, 1, 2, 8, 9$. Pela simetria $\binom{9}{k} = \binom{9}{9-k}$, esses cinco se emparelham dois a dois:

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{9} = 2\binom{9}{0} = 2, \quad \binom{9}{1} + \binom{9}{8} = 2\binom{9}{1} = 18, \quad \binom{9}{2} = 36,$$

num total de $2 + 18 + 36 = 56$. Portanto

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} = 512 - 56 = 456.$$

(Conferindo: $84 + 126 + 126 + 84 + 36 = 456$. ✓)

Resposta: 456.

Questão 5.72 Toda a prova se apoia em transformar o termo geral numa diferença, para que a série telescope. Afirmamos que

$$\frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{r}{r-1}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{r-1}} - \frac{1}{\binom{n}{r-1}}\right] \qquad (n \geq r).$$

Prova da afirmação. Ponha tudo sobre $n!$:

$$\frac{1}{\binom{n-1}{r-1}} = \frac{(r-1)!\,(n-r)!}{(n-1)!} = \frac{n\,(r-1)!\,(n-r)!}{n!},$$
$$\frac{1}{\binom{n}{r-1}} = \frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

Subtraindo, o fator comum $(r-1)!\,(n-r)!/n!$ sai e sobra $n-(n-r+1)=r-1$:

$$\frac{1}{\binom{n-1}{r-1}}-\frac{1}{\binom{n}{r-1}}=\frac{(r-1)\,(r-1)!\,(n-r)!}{n!}=\frac{r-1}{r}\cdot\frac{r!\,(n-r)!}{n!}=\frac{r-1}{r}\cdot\frac{1}{\binom{n}{r}},$$

que é a afirmação.

Telescopando. Somando de $n=r$ até $n=N$, os termos consecutivos se cancelam aos pares:

$$\sum_{n=r}^{N}\frac{1}{\binom{n}{r}}=\frac{r}{r-1}\left[\frac{1}{\binom{r-1}{r-1}}-\frac{1}{\binom{N}{r-1}}\right]=\frac{r}{r-1}\left[1-\frac{1}{\binom{N}{r-1}}\right].$$

Como $r-1\geq 1$, temos $\binom{N}{r-1}\to\infty$ quando $N\to\infty$, de modo que o colchete tende a 1 e

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{r}}=\frac{r}{r-1}.\qquad\blacksquare$$

Para $r=2$ isso é a conhecida $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{n(n-1)}=2$; para $r=3$ dá $3/2$.

Resposta: Demonstrado.

Questão 5.73 Usamos $(1+x)^{4n}(1-x)^{4n}=(1-x^2)^{4n}$. Expandindo:

$$(1-x^2)^{4n}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}(-1)^k x^{2k}.$$

Para $x=1$:

$$0=\binom{4n}{0}-\binom{4n}{1}+\binom{4n}{2}-\cdots+(-1)^{4n}\binom{4n}{4n}.$$

Portanto:

$$1-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\cdots+(-1)^{2n}\binom{4n}{4n}=(-1)^{n+1}2^{2n}.$$

Resposta: Alternativa (D): $(-1)^{n+1}2^{2n}$.

Questão 5.74 Dois fatos fazem todo o trabalho.

Primeiro fato: a linha n inteira tem $2^{s(n)}$ elementos ímpares, onde $s(n)$ é o número de algarismos 1 na representação binária de n. De fato, pelo teorema de Lucas módulo 2, $\binom{n}{k}$ é ímpar se e somente se cada algarismo binário de k é $\leq$ o algarismo correspondente de n — isto é, k se obtém escolhendo, para cada 1 de n, se ele fica ou não. Há exatamente $2^{s(n)}$ tais k.

Segundo fato: os ímpares se dividem igualmente entre as duas metades. Como n é ímpar, a linha tem um número par $n+1$ de elementos e não tem elemento central: a simetria $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ emparelha cada $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ com $n-k > \lfloor n/2 \rfloor$, e nunca emparelha um k consigo mesmo (isso exigiria $2k = n$, impossível para n ímpar). Logo a primeira metade contém exatamente metade dos ímpares:

$$\#\{\, k \leq \lfloor n/2 \rfloor : \binom{n}{k} \text{ ímpar} \,\} = 2^{\,s(n)-1}.$$

Por fim, n é ímpar e $n > 1$, de modo que a sua representação binária termina em 1 e tem ao menos um outro 1 (senão $n = 1$): $s(n) \geq 2$, e portanto $2^{\,s(n)-1}$ é uma potência de 2 com expoente positivo — um número par. ■

Por exemplo: $n = 9 = (1001)_2$ tem $s = 2$, e a primeira metade $1, 9, 36, 10, 126$ contém os dois ímpares 1 e 9; $n = 15 = (1111)_2$ tem $s = 4$, e a sua primeira metade contém $2^3 = 8$ ímpares — de fato todos os $\binom{15}{0}, \ldots, \binom{15}{7}$ são ímpares.

Resposta: Demonstrado.

Questão 5.75 Considere um grupo de $2m$ pessoas, divididas em dois subgrupos de m mulheres e m homens, dos quais queremos escolher m pessoas.

Por um lado, o número de formas de fazer essa escolha é $\binom{2m}{m}$.

Por outro lado, podemos contar de acordo com o número k de mulheres escolhidas, onde $0 \leq k \leq m$. Se escolhemos k mulheres, devemos escolher $m - k$ homens. O número de formas é:

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{m}{m-k} = \binom{m}{k} \cdot \binom{m}{k},$$

pois $\binom{m}{m-k} = \binom{m}{k}$ pela simetria.

Somando sobre todos os valores de k:

$$\binom{2m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2.$$

Resposta: Demonstrado.

Questão 5.76 Seja $\omega = e^{2\pi i/3}$ uma raiz cúbica primitiva da unidade, de modo que $1+\omega+\omega^2 = 0$ e $\omega^3 = 1$. Pelo filtro das raízes da unidade aplicado a $(1+x)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k$,

$$S_r = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2} \omega^{-jr}\,(1+\omega^j)^n, \qquad r = 0, 1, 2.$$

Como $1+\omega = -\omega^2$ e $1+\omega^2 = -\omega$, com $r=0$:

$$S_0 = \frac{1}{3}\left[2^n + (-\omega^2)^n + (-\omega)^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + (-1)^n\left(\omega^{2n} + \omega^n\right)\right].$$

O colchete depende só de n módulo 3: se $3 \mid n$, então $\omega^n = \omega^{2n} = 1$ e a soma vale 2; caso contrário ω^n e ω^{2n} são as duas raízes não triviais, e $\omega + \omega^2 = -1$. Logo

$$S_0 = \begin{cases} \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\[2mm] \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}, & n \equiv 1, 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Para S_1 o peso é ω^{-j}, isto é, $1, \omega^2, \omega$:

$$S_1 = \frac{1}{3}\left[2^n + \omega^2(-\omega^2)^n + \omega(-\omega)^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + (-1)^n\left(\omega^{2n+2} + \omega^{n+1}\right)\right].$$

Agora os expoentes são $n+1$ e $2(n+1)$: a soma vale 2 exatamente quando $3 \mid n+1$, ou seja, quando $n \equiv 2 \pmod 3$, e vale -1 nos demais casos. Portanto

$$S_1 = \begin{cases} \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}, & n \equiv 2 \pmod 3, \\[2mm] \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}, & n \equiv 0, 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Conferindo em $n = 4$: $S_0 = \binom{4}{0} + \binom{4}{3} = 5 = \frac{16-1}{3}$ e $S_1 = \binom{4}{1} + \binom{4}{4} = 5 = \frac{16-1}{3}$. Em $n = 5$: $S_0 = \binom{5}{0} + \binom{5}{3} = 11$ e $S_1 = \binom{5}{1} + \binom{5}{4} = 10 = \frac{32+2(-1)}{3}$.

Resposta: $S_0 = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ se $n \equiv 0 \pmod 3$ e $\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ caso contrário; $S_1 = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ se $n \equiv 2 \pmod 3$ e $\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ caso contrário.

Resposta: Conforme n mod 3.

Questão 5.77 A soma é uma PG de razão $-y$:

$$P(y) = \sum_{k=0}^{20} (-y)^k = \frac{1 - (-y)^{21}}{1 + y} = \frac{1 + y^{21}}{1 + y}.$$

Com $x = y + 1$, isto é, $y = x - 1$ e $1 + y = x$,

$$P = \frac{1 + (x-1)^{21}}{x}.$$

Logo α_3, o coeficiente de x^3 nessa expressão, é o coeficiente de x^4 em $1 + (x-1)^{21}$. Pelo binômio,

$$(x-1)^{21} = \sum_{j=0}^{21} \binom{21}{j} x^j (-1)^{21-j},$$

e o termo em x^4 tem coeficiente $\binom{21}{4}(-1)^{17} = -\binom{21}{4}$.

$$\alpha_3 = -\binom{21}{4} = -5985.$$

Resposta: $\alpha_3 = -5985$.

Questão 5.78 Nos dois fatores,

$$(1+x)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} x^i, \qquad (2 - x^2)^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} 2^{5-j} (-1)^j x^{2j}.$$

O produto gera x^3 quando $i+2j=3$, ou seja, em $(i,j)=(3,0)$ e $(i,j)=(1,1)$:

$$\binom{4}{3}\binom{5}{0}2^5 = 4\cdot 32 = 128, \qquad \binom{4}{1}\binom{5}{1}2^4(-1) = 4\cdot 5\cdot 16\cdot(-1) = -320.$$

Somando, $128-320=-192$.

Resposta: -192 — alternativa (C).

Questão 5.79 O termo geral é

$$\binom{10}{k}\big(x\,\mathrm{sen}\,2\beta\big)^{10-k}\left(\frac{\cos 2\beta}{x}\right)^{k} = \binom{10}{k}\mathrm{sen}^{10-k}(2\beta)\cos^{k}(2\beta)\,x^{10-2k},$$

independente de x quando $k=5$. Usando $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$,

$$\binom{10}{5}\big(\mathrm{sen}\,2\beta\cos 2\beta\big)^5 = 252\left(\frac{\mathrm{sen}\,4\beta}{2}\right)^5 = \frac{252}{32}\,\mathrm{sen}^5(4\beta).$$

Igualando a $\frac{63}{256}$,

$$\mathrm{sen}^5(4\beta) = \frac{63}{256}\cdot\frac{32}{252} = \frac{1}{32} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{sen}(4\beta) = \frac{1}{2}.$$

Como $0<\beta<\frac{\pi}{8}$, tem-se $0<4\beta<\frac{\pi}{2}$, e a única solução é $4\beta=\frac{\pi}{6}$, isto é, $\beta=\frac{\pi}{24}$.

Resposta: $\beta=\dfrac{\pi}{24}$ — alternativa (E).

Questão 5.80 Simplifique as duas parcelas usando $2^{\log_2 A}=A$:

$$a=\sqrt{9^{x-1}+7}, \qquad b=\frac{1}{\left(3^{x-1}+1\right)^{1/5}}.$$

O sexto termo de $(a+b)^7$ é

$$\binom{7}{5}a^2b^5 = 21\cdot\left(9^{x-1}+7\right)\cdot\frac{1}{3^{x-1}+1} = 84,$$

ou seja, com $t=3^{x-1}>0$ (note que $9^{x-1}=t^2$),

$$\frac{t^2+7}{t+1}=4 \quad\Longrightarrow\quad t^2-4t+3=0 \quad\Longrightarrow\quad t=1 \text{ ou } t=3.$$

De $3^{x-1}=1$ vem $x=1$; de $3^{x-1}=3$ vem $x=2$. A soma é 3.

Resposta: 3 — alternativa (C).

Questão 5.81 Em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, o terceiro termo do desenvolvimento é $\binom{8}{2}\left(\frac{1}{q}\right)^2=\frac{28}{q^2}$. Igualando a $\frac{r}{9q}$:

$$\frac{28}{q^2}=\frac{r}{9q} \quad\Longrightarrow\quad r=\frac{252}{q}.$$

Se são inseridos n termos, as progressões têm $n+2$ termos, de modo que

$$192=3+(n+1)r \quad\text{e}\quad 192=3\,q^{n+1},$$

isto é, $(n+1)r=189$ e $q^{n+1}=64$. Da primeira, com $r=\frac{252}{q}$,

$$(n+1)\frac{252}{q}=189 \quad\Longrightarrow\quad n+1=\frac{3q}{4}.$$

Com q inteiro, q é múltiplo de 4; e $q^{n+1}=64$ força $q=4$ (daí $n+1=3$ e $4^3=64$). Logo $r=63$ e o segundo termo da PA é $3+63=66$.

Resposta: 66 — alternativa (C).

Questão 5.82 Pelo binômio de Newton com expoente negativo,

$$(1+h)^{-10}=1-10h+\frac{(-10)(-11)}{2}h^2+\frac{(-10)(-11)(-12)}{6}h^3+\cdots,$$

válido para $|h|<1$. Com $h=0{,}02$:

$$1-0{,}2+55\,(0{,}0004)-220\,(0{,}000008)+\cdots=1-0{,}2+0{,}022-0{,}00176+\cdots$$

As parcelas seguintes são da ordem de 10^{-4}, de modo que a soma é $0{,}8202\ldots$

Resposta: $(1{,}02)^{-10}\approx 0{,}82$.

Questão 5.83 O termo de ordem k é $T_k=\binom{65}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, $k=0,1,\ldots,65$. Compare dois consecutivos:

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{\binom{65}{k+1}}{\binom{65}{k}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{65-k}{3(k+1)}.$$

Essa razão é ≥ 1 exatamente quando $65-k \geq 3k+3$, isto é, $k \leq \frac{62}{4} = 15{,}5$. Assim os termos crescem até $k=16$ e decrescem a partir daí: o maior é

$$T_{16} = \binom{65}{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{16} = \frac{\binom{65}{16}}{3^{16}},$$

o $17^{\underline{o}}$ termo do desenvolvimento.

Resposta: $T_{16} = \dfrac{\binom{65}{16}}{3^{16}}$.

Questão 5.84 O termo geral é

$$\binom{m}{k}\left(x^4\right)^{m-k}\left(-\frac{1}{x^8}\right)^k = (-1)^k\binom{m}{k}x^{4(m-k)-8k} = (-1)^k\binom{m}{k}x^{4m-12k}.$$

Há termo independente de x quando $4m-12k=0$ para algum inteiro k com $0 \leq k \leq m$, isto é, quando $k=\dfrac{m}{3}$ é inteiro.

Resposta: m deve ser múltiplo de 3.

Questão 5.85 O termo geral é

$$\binom{10}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k\binom{10}{k}x^{\frac{10-2k}{2}}.$$

O expoente se anula em $k=5$, e o termo correspondente é $(-1)^5\binom{10}{5} = -252$.

Resposta: -252.

Questão 5.86 Nos dois fatores,

$$\left(x^2+x^{-5}\right)^2 = \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}x^{4-7i}, \qquad \left(x^3+x^{-4}\right)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}x^{15-7j}.$$

No produto, o expoente é $(4-7i)+(15-7j) = 19-7(i+j)$, que vale -9 quando $i+j=4$. As possibilidades são $(i,j)=(0,4),(1,3),(2,2)$, e o coeficiente procurado é

$$\binom{2}{0}\binom{5}{4}+\binom{2}{1}\binom{5}{3}+\binom{2}{2}\binom{5}{2} = 5+20+10 = 35.$$

Resposta: 35.

Questão 5.87 O termo em x^{n-k} é

$$\binom{n}{k}\left(\frac{x}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{5}\right)^{k} = \frac{\binom{n}{k}2^k}{5^n}\,x^{n-k},$$

de modo que basta estudar $a_k = \binom{n}{k}2^k$. Como

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2(n-k)}{k+1},$$

os coeficientes crescem enquanto $2(n-k) > k+1$ e decrescem depois. Para que o maior seja a_9 é preciso

$$\frac{a_9}{a_8} = \frac{2(n-8)}{9} > 1 \quad \text{e} \quad \frac{a_{10}}{a_9} = \frac{2(n-9)}{10} < 1,$$

isto é, $n > 12{,}5$ e $n < 14$: resta $n = 13$. (Em $n = 14$ ocorre $a_9 = a_{10}$, e o maior coeficiente deixaria de ser único.)

Resposta: $n = 13$.

Questão 5.88 Escreva cada fator pelo binômio:

$$(2x-3)^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(2x)^i(-3)^{4-i}, \qquad (x+2)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}x^j 2^{5-j}.$$

O produto dá x^3 quando $i + j = 3$:

$$\begin{aligned}
(i,j) = (0,3): &\quad \tbinom{4}{0}(-3)^4 \cdot \tbinom{5}{3}2^2 = 81 \cdot 40 = 3240,\\
(i,j) = (1,2): &\quad \tbinom{4}{1}2(-3)^3 \cdot \tbinom{5}{2}2^3 = (-216)\cdot 80 = -17\,280,\\
(i,j) = (2,1): &\quad \tbinom{4}{2}2^2(-3)^2 \cdot \tbinom{5}{1}2^4 = 216 \cdot 80 = 17\,280,\\
(i,j) = (3,0): &\quad \tbinom{4}{3}2^3(-3) \cdot \tbinom{5}{0}2^5 = (-96)\cdot 32 = -3072.
\end{aligned}$$

Somando: $3240 - 17\,280 + 17\,280 - 3072 = 168$.

Resposta: 168.

Questão 5.89

1. No primeiro fator, o termo geral é $\binom{6}{i}x^{6-i}x^{-i} = \binom{6}{i}x^{6-2i}$.
2. No segundo, é $\binom{5}{j}x^{5-j}(-2)^j x^{-j} = \binom{5}{j}(-2)^j x^{5-2j}$.
3. O produto é independente de x quando $(6-2i)+(5-2j)=0$, isto é, $2(i+j)=11$.
4. Como $i+j$ é inteiro, a equação não tem solução: não há termo independente, e o coeficiente procurado é 0.

Resposta: 0 — alternativa (C).

Questão 5.90

1. A identidade dada, reescrita, é $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
2. Somando para $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}\binom{n+1}{m}.$$

3. A última soma é $2^{n+1} - \binom{n+1}{0} = 2^{n+1} - 1$.
4. Logo o valor pedido é $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Resposta: $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ — alternativa (D).

Questão 5.91

A ferramenta é o filtro pelas raízes cúbicas da unidade. Seja $\omega = e^{2\pi i/3}$, de modo que $1+\omega+\omega^2 = 0$.

1. Considere $F(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+z^k)$. O coeficiente de z^s em F é o número de subconjuntos com soma s, e a quantidade de subconjuntos com soma múltipla de 3 é

$$N = \frac{F(1) + F(\omega) + F(\omega^2)}{3}.$$

2. Com $n = 3m$, os expoentes k percorrem cada classe módulo 3 exatamente m vezes, logo

$$F(\omega) = \Big[(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)\Big]^m = \Big[2(1+\omega+\omega^2+1)\Big]^m = 2^m,$$

pois $(1+\omega)(1+\omega^2) = 1+\omega+\omega^2+\omega^3 = 1$. O mesmo vale para $F(\omega^2)$.

3. Como $F(1) = 2^{3m} = 8^m$,

$$N = \frac{8^m + 2 \cdot 2^m}{3} = \frac{8^m + 2^{m+1}}{3},$$

e dividindo pelos 8^m subconjuntos obtém-se a probabilidade do item b).

4. Item a). Com $n = 9$, isto é, $m = 3$:

$$N = \frac{512 + 16}{3} = 176, \qquad P = \frac{176}{512} = \frac{11}{32}.$$

Resposta: a) $\frac{11}{32}$; b) demonstrado.

Questão 5.92

1. *Item a).* Compare o coeficiente de x^n nos dois lados de $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. À direita ele é $\binom{2n}{n}$. À esquerda, um termo x^n sai de um x^k do primeiro fator com um x^{n-k} do segundo, o que dá

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

usando a simetria $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

2. *Item b).* A ideia é absorver o fator k dentro de um binomial, pela identidade $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Com ela,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(k\binom{n}{k}\right)\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}.$$

3. A soma restante é um produto de coeficientes cujos índices inferiores somam $(k-1) + (n-k) = n-1$ se escrevermos $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ela é, então, o coeficiente de x^{n-1} em $(1+x)^{n-1}(1+x)^n = (1+x)^{2n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \binom{2n-1}{n-1}.$$

4. Portanto
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$
Conferindo em $n = 4$: o lado esquerdo é $1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1 = 140$, e $4\binom{7}{3} = 4 \cdot 35 = 140$.

Resposta: a) demonstrado; b) $n\binom{2n-1}{n-1}$.