Capítulo 5

Sistemas de numeração e bases

5.1 Contar e representar

Os números existem antes dos símbolos que os representam. O pastor que guardava uma pedrinha para cada ovelha já contava — sem algarismos. A grande invenção da humanidade não foi o número, e sim o *sistema posicional*: com apenas dez símbolos, $0, 1, \ldots, 9$, representamos qualquer inteiro, porque o *valor de cada algarismo depende da posição que ele ocupa*. Quando escrevemos 2026, queremos dizer

$$2026 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

O número 10 é a *base* do sistema — uma escolha cultural (temos dez dedos), não matemática. Os babilônios usavam base 60 (herdada nos minutos e segundos), os maias usavam base 20, e os computadores usam base 2. Nada muda na essência: só a "moeda" com que agrupamos.

5.2 O algoritmo da divisão

A ferramenta que sustenta toda a representação posicional — e, na verdade, boa parte deste livro — é a divisão com resto.

Teorema 5.1 (Divisão euclidiana)**.** *Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 1$, existem* únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

O número q é o quociente *e r é o* resto.

Demonstração. Existência. O conjunto $S = \{a - bk : \ k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ é não vazio (tome k suficientemente negativo). Pelo princípio da boa ordenação (que discutiremos no Capítulo 8), S tem menor elemento $r = a - bq \geq 0$. Se fosse $r \geq b$, então $r - b = a - b(q+1) \in S$ seria menor que r, contradição. Logo $0 \leq r < b$.

Unicidade. Se $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ com $0 \leq r_1, r_2 < b$, então $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ com $|r_2 - r_1| < b$: o único múltiplo de b nesse intervalo é 0, logo $r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$. □

Exemplo 5.2. $2026 = 7 \cdot 289 + 3$: quociente 289, resto 3. Note que o resto é *sempre* não negativo: para $a = -17$ e $b = 5$, escrevemos $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$, e não $5 \cdot (-3) - 2$.

5.3 Representação em uma base qualquer

Teorema 5.3. *Fixado $b \geq 2$, todo inteiro $n \geq 1$ escreve-se de modo único como*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0, \qquad 0 \leq a_i \leq b - 1, \ a_k \neq 0.$$

Escrevemos $n = (a_k a_{k-1} \cdots a_0)_b$ e chamamos os a_i de algarismos *(ou* dígitos*) de n na base b.*

Demonstração. Existência: divida n por b; o resto é a_0 e o quociente, estritamente menor que n, é dividido novamente por b para produzir a_1; e assim por diante, até o quociente zerar. *Unicidade*: a_0 é *o* resto de n por b, único pelo Teorema 5.1; subtraindo a_0 e dividindo por b, o mesmo argumento (indução, que o Capítulo 8 formalizará) determina os demais algarismos. □

Duas coisas mudam de uma base para outra: *quais* algarismos existem e *quanto* vale cada casa. A Tabela 5.1 resume as duas informações para as bases mais frequentes.

Escrever um número numa base é preencher as colunas da Figura 5.1: um ábaco em que cada haste vale uma potência da base e não guarda mais do que $b - 1$ contas.

Exemplo 5.4 (conversão de 2026 para a base 7)**.**

$$2026 = 7 \cdot 289 + 3, \quad 289 = 7 \cdot 41 + 2, \quad 41 = 7 \cdot 5 + 6, \quad 5 = 7 \cdot 0 + 5.$$

Lendo os restos de baixo para cima: $2026 = (5623)_7$. Conferindo: $5 \cdot 343 + 6 \cdot 49 + 2 \cdot 7 + 3 = 1715 + 294 + 14 + 3 = 2026$.

Tabela 5.1: Algarismos disponíveis e valor das casas em cada base.

Base	Algarismos	b^4	b^3	b^2	b^1	b^0
2	$0, 1$	16	8	4	2	1
3	$0, 1, 2$	81	27	9	3	1
5	$0, \ldots, 4$	625	125	25	5	1
7	$0, \ldots, 6$	2401	343	49	7	1
8	$0, \ldots, 7$	4096	512	64	8	1
10	$0, \ldots, 9$	10 000	1000	100	10	1
16	$0, \ldots, 9, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{F}$	65 536	4096	256	16	1

potência	10^3	10^2	10^1	10^0	
vale	1000	100	10	1	
algarismo	**2**	**0**	**2**	**6**	
contribui	2000	0	20	6	$= 2026$

potência	7^3	7^2	7^1	7^0	
vale	343	49	7	1	
algarismo	**5**	**6**	**2**	**3**	
contribui	1715	294	14	3	$= 2026$

Figura 5.1: O mesmo número, 2026, em duas bases: $(2026)_{10}$ e $(5623)_7$. Muda a "moeda" de cada coluna, não o número.

Por que "de baixo para cima"? Porque a primeira divisão entrega o algarismo das *unidades*, a segunda o das dezenas da base, e assim por diante: os restos saem na ordem inversa da que se escreve. A Figura 5.2 mostra o processo como uma escada.

Exemplo 5.5 (base 2 e base 16)**.** O mesmo processo com $b = 2$ dá $2026 = (11111101010)_2$. Para a base 16 (algarismos $0, \ldots, 9, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{F}$), agrupe os bits de 4 em 4, da direita para a esquerda: $\underbrace{111}_{7}\ \underbrace{1110}_{\mathrm{E}}\ \underbrace{1010}_{\mathrm{A}}$, logo $2026 = (7\mathrm{EA})_{16}$ — a conversão binário $\leftrightarrow$ hexadecimal é imediata porque $16 = 2^4$.

A Tabela 5.2 reúne os dezesseis primeiros inteiros nas três bases mais usadas — convém tê-la à vista ao resolver os problemas.

Para um repertório maior — e para conferir contas —, a Tabela 5.3 estende a lista até 32 e inclui as bases 3 e 8. Vale a pena reparar em três

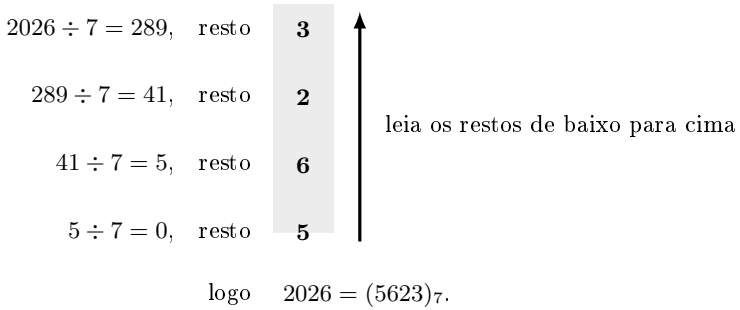


Figura 5.2: A escada das divisões sucessivas: para cada divisão por 7, o resto é um algarismo. O último quociente é 0 — é ali que a escada termina.

Tabela 5.2: Os inteiros de 0 a 15 nas bases 10, 2 e 16.

base 10	base 2	base 16	base 10	base 2	base 16
0	0	0	8	1000	8
1	1	1	9	1001	9
2	10	2	10	1010	A
3	11	3	11	1011	B
4	100	4	12	1100	C
5	101	5	13	1101	D
6	110	6	14	1110	E
7	111	7	15	1111	F

fatos que ela deixa evidentes: a coluna da base 2 ganha um algarismo exatamente em 1, 2, 4, 8, 16 e 32 (as potências de 2); a da base 8 é a binária lida de três em três bits; e a da base 16, de quatro em quatro.

Tabela 5.3: Os inteiros de 0 a 32 nas bases 2, 3, 8 e 16.

10	2	3	8	16	10	2	3	8	16
0	0	0	0	0	17	10001	122	21	11
1	1	1	1	1	18	10010	200	22	12
2	10	2	2	2	19	10011	201	23	13
3	11	10	3	3	20	10100	202	24	14
4	100	11	4	4	21	10101	210	25	15
5	101	12	5	5	22	10110	211	26	16
6	110	20	6	6	23	10111	212	27	17
7	111	21	7	7	24	11000	220	30	18
8	1000	22	10	8	25	11001	221	31	19
9	1001	100	11	9	26	11010	222	32	1A
10	1010	101	12	A	27	11011	1000	33	1B
11	1011	102	13	B	28	11100	1001	34	1C
12	1100	110	14	C	29	11101	1002	35	1D
13	1101	111	15	D	30	11110	1010	36	1E
14	1110	112	16	E	31	11111	1011	37	1F
15	1111	120	17	F	32	100000	1012	40	20
16	10000	121	20	10					

5.4 Operando em outras bases

As contas de armar funcionam em qualquer base — basta lembrar que o "vai um" ocorre ao atingir b, e não 10.

Exemplo 5.6 (adição na base 7). $(654)_7 + (123)_7$: unidades $4+3 = 7 = (10)_7$, escreve 0 e vai 1; dezenas $5+2+1 = 8 = (11)_7$, escreve 1 e vai 1; centenas $6+1+1 = 8 = (11)_7$, escreve 1 e vai 1. Resultado: $(1110)_7$. Conferindo na base dez: $333 + 66 = 399 = 343 + 49 + 7 = (1110)_7$. ✓

5.5 Aplicações da base 2

A base 2 merece uma seção própria: além de mover os computadores, ela esconde-se em três algoritmos clássicos.

Antes deles, uma imagem que vale por uma demonstração. Imagine uma balança e um jogo de pesos 1, 2, 4, 8, 16, 32 gramas — uma *régua binária*. O Teorema 5.3 com $b = 2$ diz exatamente isto: *qualquer* massa inteira de 0 a 63 g pode ser pesada com esses seis pesos, cada um usado no máximo uma vez, e de um *único* modo (Figura 5.3). Os algarismos binários são a lista de "usei / não usei".

Busca binária. Para adivinhar um número de 1 a N com perguntas de "sim ou não", a estratégia ótima corta o intervalo ao meio a cada

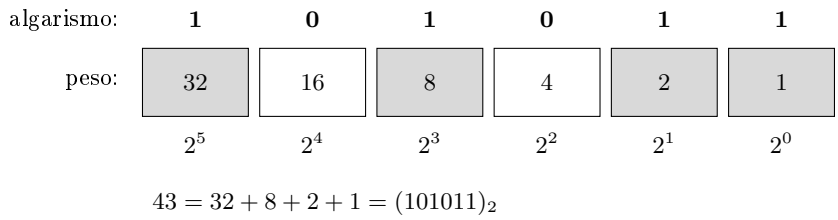


Figura 5.3: A régua binária. Os pesos sombreados (algarismo 1) somam 43; trocar qualquer escolha muda a soma, porque $1+2+4+\cdots+2^{k-1} = 2^k - 1 < 2^k$ — é essa desigualdade que garante a unicidade da representação.

pergunta: k perguntas distinguem até 2^k possibilidades. É por isso que listas ordenadas se pesquisam tão rápido — cada comparação elimina metade do que resta.

Multiplicação russa (duplicar e mediar). Para calcular $a \times b$: escreva duas colunas começando em a e b; a cada linha, *divida a por* 2 (desprezando o resto) e *dobre* b; ao final, some os valores de b das linhas em que a é *ímpar*.

Exemplo 5.7 (27×34 à moda russa)**.**

27	34	ímpar: soma	
13	68	ímpar: soma	
6	136	par: pula	$34 + 68 + 272 + 544 = 918 = 27 \times 34.$
3	272	ímpar: soma	
1	544	ímpar: soma	

A estrutura subjacente é a base 2: as linhas ímpares correspondem aos algarismos 1 de $27 = (11011)_2$, e o método calcula $34 \cdot (16+8+2+1)$ — só com dobras e somas.

Frações na base 2. A vírgula também funciona em qualquer base:

$$(0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots$$

Assim $(0{,}1)_2 = \frac{1}{2}$ e $(0{,}101)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Como na base dez, a expansão binária de $\frac{a}{b}$ (irredutível) é *finita* exatamente quando b é potência de 2 — e é uma *dízima periódica* caso contrário. O exemplo célebre:

$$\frac{1}{3} = (0{,}010101\ldots)_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/4}.$$

Em particular, $\frac{1}{10}$ — o inocente 0,1 decimal — é dízima infinita na base 2 (o denominador carrega o fator 5): eis por que os computadores não armazenam 0,1 exatamente.

5.6 Logaritmos e o número de algarismos

Conta-se que Pascal prometeu 1 000 000 de dólares a quem casasse com sua filha — e pagou apenas 64. A piada é aritmética: lido na base 2, o numeral $(1000000)_2$ vale $2^6 = 64$. Por trás dela mora uma pergunta séria: *quantos algarismos tem um número em uma dada base?* A ferramenta certa é o logaritmo.

Definição 5.8. Para $b \geq 2$ e $N > 0$, o *logaritmo* $\log_b N$ é o expoente ao qual se deve elevar b para obter N: $b^{\log_b N} = N$. Assim, $\log_2 8 = 3$ e $\log_{10} 1000 = 3$ — o logaritmo responde à pergunta inversa da potência: "*quantas vezes multiplico por b?*".

Teorema 5.9 (número de algarismos)**.** *Na base b, o número $N \geq 1$ tem exatamente $\lfloor \log_b N \rfloor + 1$ algarismos.*

Demonstração. Ter k algarismos na base b significa $b^{k-1} \leq N < b^k$ (do menor k-algarismos, $(10\cdots0)_b = b^{k-1}$, ao maior, $b^k - 1$). Aplicando $\log_b$, que preserva a ordem: $k - 1 \leq \log_b N < k$, isto é, $k - 1 = \lfloor \log_b N \rfloor$. □

O que o teorema faz, no fundo, é ler numa régua: as potências de b cortam os inteiros em faixas, e o número de algarismos é o índice da faixa em que N caiu (Figura 5.4).

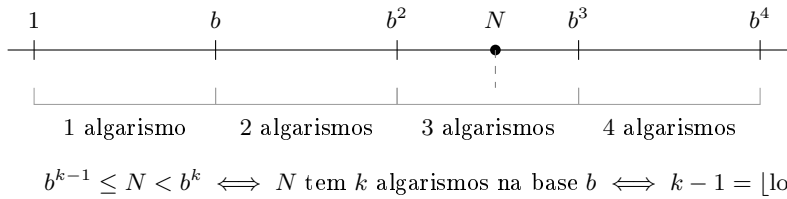


Figura 5.4: As potências de b separam as faixas de 1, 2, 3, ... algarismos. Contar algarismos é localizar N nessa régua — e é isso que o logaritmo faz.

Para calcular na prática, basta uma tabela decimal e a *mudança de base*: $\log_b N = \dfrac{\log_{10} N}{\log_{10} b}$. Com $\log_{10} 2 = 0{,}30103$:

Exemplo 5.10. Quantos algarismos tem 2^{100}? Temos $\log_{10} 2^{100} = 100 \cdot 0{,}30103$, isto é, 30,103; logo são $\lfloor 30{,}103 \rfloor + 1 = 31$ algarismos. E quantos *bits* tem 10^9? $\log_2 10^9 = 9/0{,}30103 \approx 29{,}9$: são 30 algarismos binários — coerente com $2^{29} < 10^9 < 2^{30}$.

Observação (logaritmo no ensino fundamental?). Defendemos que sim — desde que apresentado como *aritmética*, não como função real. Três encarnações inteiramente elementares: *(i)* o número de algarismos de N é, essencialmente, o logaritmo decimal de N (Teorema 5.9): quem conta algarismos já calcula $\lfloor\log\rfloor$ sem saber; *(ii)* o número de perguntas de "sim ou não" da busca binária é $\lceil\log_2 N\rceil$: adivinhar um número até 1000 custa 10 perguntas porque $2^{10} = 1024$; *(iii)* o número de linhas da multiplicação russa e o número de divisões nas conversões de base são, de novo, $\log_2$. Nessa visão, o logaritmo é um *contador de duplicações* — tão concreto quanto contar dedos. A formalização com expoentes reais pode esperar o ensino médio; a *ideia*, não.

A regra de ouro do cálculo mental é $2^{10} = 1024 \approx 10^3$: cada dez duplicações valem, aproximadamente, três algarismos decimais. Por isso 2^{100} tem cerca de 30 algarismos (exatamente 31), e 2^{64} — um grão a mais que o total da lenda do tabuleiro de xadrez, que é $2^{64} - 1$ — tem $\lfloor 64 \cdot 0{,}30103 \rfloor + 1 = 20$ algarismos. A Tabela 5.4 traz as potências de 2 até 2^{20}: convém saber de cor pelo menos até 2^{10}, e reconhecer $2^{16} = 65\,536$ e $2^{20} \approx 10^6$.

Tabela 5.4: Potências de 2 até 2^{20} e o número de algarismos decimais de cada uma.

k	2^k	algs.	k	2^k	algs.
0	1	1	11	2048	4
1	2	1	12	4096	4
2	4	1	13	8192	4
3	8	1	14	16 384	5
4	16	2	15	32 768	5
5	32	2	16	65 536	5
6	64	2	17	131 072	6
7	128	3	18	262 144	6
8	256	3	19	524 288	6
9	512	3	20	1 048 576	7
10	1024	4			

Repare que a coluna dos algarismos avança de 1 exatamente quando $k \cdot 0{,}30103$ cruza um inteiro: entre $k = 0$ e $k = 20$ isso acontece 6 vezes, e $\lfloor 20 \cdot 0{,}30103 \rfloor + 1 = 7$ ✓.

A mesma contagem de algarismos, feita ao contrário, responde à pergunta "*quantos algarismos são usados para numerar as páginas de um livro?*". Cada faixa da Figura 5.4 contribui com (quantidade de números) × (algarismos de cada um); num livro de 234 páginas, os 405 algarismos gastos com as páginas de três dígitos dominam o total (Figura 5.5).

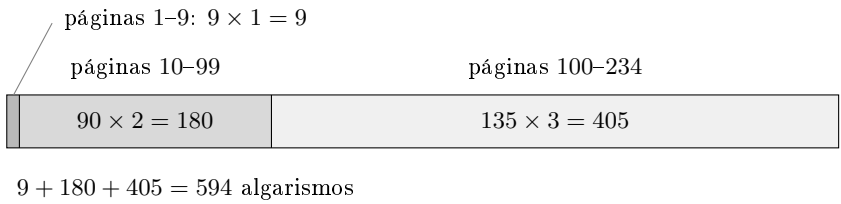


Figura 5.5: Os 594 algarismos que numeram um livro de 234 páginas, repartidos por faixa. As páginas de um dígito quase não pesam — e é por isso que, ao resolver o problema inverso ("o livro gastou 594 algarismos; quantas páginas tem?"), começa-se descontando 9 e 180.

5.7 A soma dos algarismos e os restos

Denote por $s_b(n)$ a soma dos algarismos de n na base b (e escreva $s = s_{10}$).

Proposição 5.11. (i) $b-1$ *divide* $n - s_b(n)$*; em particular,* n *e* $s_b(n)$ *deixam o mesmo resto na divisão por* $b-1$*.* (ii) $b+1$ *divide a diferença entre* n *e a soma alternada* $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ *dos seus algarismos.*

Demonstração. (i) $n - s_b(n) = \sum_i a_i\big(b^i - 1\big)$, e cada $b^i - 1 = (b-1)(b^{i-1} + \cdots + b + 1)$ é múltiplo de $b-1$. (ii) $n - \sum_i (-1)^i a_i = \sum_i a_i\big(b^i - (-1)^i\big)$, e $b^i - (-1)^i$ é múltiplo de $b - (-1) = b+1$ (para i ímpar é $b^i + 1$, para i par é $b^i - 1$; ambos fatoram com $b+1$ quando o expoente tem a paridade certa — verifique com a Proposição 11.4, do Capítulo 11, ou diretamente por indução). □

Com $b = 10$, (i) é o critério de divisibilidade por 9 (e por 3), e (ii) é o critério do 11. O Capítulo 11 dará a essas afirmações uma linguagem ainda mais geral — as congruências.

5.8 Problemas

— **Questão 5.1** Qual é o número constituído por 3 unidades de 5ª ordem, 2 unidades de milhar, 356 dezenas e 7 unidades de 1ª ordem?

— **Questão 5.2** Calcule a diferença entre a soma dos valores relativos dos algarismos de 2345 e a soma de seus valores absolutos.

— **Questão 5.3** Que alteração sofre o número 6783 quando se intercala um zero entre os algarismos 7 e 8?

— **Questão 5.4** Colocar um algarismo 3 à direita de um número equivale a aumentá-lo de 201 unidades. Qual é esse número?

— **Questão 5.5** Quantos números existem entre 34 e 790?

— **Questão 5.6** Quantos números tem a sequência $3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 79$?

— **Questão 5.7** Um número de três algarismos tem soma dos algarismos 15; o algarismo das dezenas é o triplo do das unidades, e o das centenas é o sucessor do das dezenas. Que número é esse?

— **Questão 5.8** Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 234 páginas?

— **Questão 5.9** Escreva 2026 nas bases 2, 7 e 16.

— **Questão 5.10** Converta $(110101)_2$ para a base dez.

— **Questão 5.11** Converta $(4302)_5$ para a base dez.

— **Questão 5.12** Um número escrito na base 8 é 754. Qual é o seu valor na base dez?

— **Questão 5.13** Qual é o valor de $(777)_8$ na base dez?

— **Questão 5.14** Escreva 100 na base 3.

— **Questão 5.15** Qual é o maior número de três algarismos na base 5, e quanto ele vale na base dez?

— **Questão 5.16** Converta 255 para a base 2 e comente o resultado.

— **Questão 5.17** Em que base b o número $(132)_b$ representa o valor 42?

— **Questão 5.18** Qual é o algarismo das unidades de 2026 quando escrito na base 5?

— **Questão 5.19** Efetue $(23)_5 \times (3)_5$ diretamente na base 5.

— **Questão 5.20** Efetue $(654)_7 + (123)_7$ diretamente na base 7 e confira na base dez.

— **Questão 5.21** *(a piada de Pascal)* Por que "um milhão, lido na base 2", vale apenas 64?

— **Questão 5.22** Quantos algarismos tem 2^{100} no sistema decimal? (Use $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.)

— **Questão 5.23** Quantos algarismos tem 3^{40}? (Use $\log_{10} 3 = 0{,}47712$.)

— **Questão 5.24** Quantos algarismos binários (bits) tem um bilhão (10^9)?

— **Questão 5.25** Pensei em um número de 1 a 1 000 000. Quantas perguntas de "sim ou não" são necessárias e suficientes para descobri-lo?

— **Questão 5.26 (desafio)** Usando $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, estime quantos algarismos tem 2^{200} — e depois calcule o valor exato com $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.

— **Questão 5.27** Prove que, na base b, o número N tem $\lfloor \log_b N \rfloor + 1$ algarismos, e deduza que 2^{64} (um grão a mais que o total da lenda do tabuleiro de xadrez, que é $2^{64} - 1$) tem 20 algarismos decimais.

— **Questão 5.28** *(busca binária)* Pensei em um número de 1 a 1000. Mostre que 10 perguntas de "sim ou não" bastam para descobri-lo — e que 9 podem não bastar.

— **Questão 5.29** *(multiplicação russa)* Calcule 27×34 pelo método russo e explique cada linha usando a representação binária de 27.

— **Questão 5.30** Escreva $\dfrac{5}{8}$ na base 2.

— **Questão 5.31** Mostre que $\dfrac{1}{3} = (0{,}\overline{01})_2$.

— **Questão 5.32** Explique por que 0,1 (um décimo) não possui representação binária finita, e encontre sua dízima na base 2.

— **Questão 5.33** Mostre que todo palíndromo de quatro algarismos $\overline{abba}$ é divisível por 11.

— **Questão 5.34** Mostre que, para todo $b \geq 2$, o número $(121)_b$ é um quadrado perfeito — e que $(144)_b$ também é, para $b \geq 5$.

— **Questão 5.35** Quantos números de três algarismos têm soma dos algarismos igual a 5?

— **Questão 5.36** O número $(2026)_b$ (algarismos $2, 0, 2, 6$ na base b) é múltiplo de $b+1$ para quais bases $b \geq 7$?

— **Questão 5.37** Prove que existe um múltiplo de 7 cujos algarismos são todos iguais a 6.

— **Questão 5.38** *(EsPCEx)* Empregaram-se 1507 algarismos para escrever números inteiros e consecutivos, dos quais o menor é 23. Qual é o maior deles?

— **Questão 5.39** Determine o número de algarismos necessários para escrever todos os números de 328, inclusive, até 1959, inclusive.

— **Questão 5.40** Se o algarismo 1 aparece 211 vezes na numeração das páginas sucessivas de um livro, quantas páginas tem o livro?

— **Questão 5.41** *(CN 1982)* Um número natural N de dois algarismos aumenta 270 unidades quando se coloca um zero entre seus dois algarismos. Além disso, $\frac{1}{N}$ é uma dízima periódica com dois algarismos na parte não periódica. Qual é a soma dos algarismos de N?

— **Questão 5.42** *(CN 1981)* Um número de seis algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo 1. Levando-se esse 1 para o último lugar, à direita, o novo número é o triplo do primitivo. Mostre que o número primitivo é múltiplo de 11.

— **Questão 5.43** *(CN 1990)* O cubo de $(12)_b$ é $(1750)_b$. Determine a base b.

— **Questão 5.44** Seja $N = \underbrace{99\cdots9}_{220}$. Determine a soma dos algarismos de N^2.

— **Questão 5.45** Colocando-se lado a lado as representações decimais de 2^{1999} e 5^{1999}, quantos algarismos são escritos?

— **Questão 5.46** Se a, b, c são algarismos distintos, existe um único número de dois algarismos $\overline{ab}$ tal que $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = \overline{cc}^2$. Calcule $a+b+c$.

— **Questão 5.47 (desafio)** Um número de três algarismos é *tricúbico* se é igual à soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre um par de números *consecutivos* tais que ambos sejam tricúbicos.

— **Questão 5.48** Viajando por uma estrada, um motorista passa por um marco com um número de dois algarismos; adiante, por um marco com os mesmos algarismos em ordem contrária; e depois por um marco de três algarismos: os do primeiro marco separados por um zero. A distância entre os dois primeiros marcos é igual à distância entre os dois últimos. Calcule a soma dos valores dos dois primeiros marcos.

— **Questão 5.49** O preço de um carro é mostrado em quatro cartões, um dígito em cada. Se o cartão do milhar voar com o vento, o preço mostrado fica 49 vezes menor. Qual é o dígito do milhar?

— **Questão 5.50** Após cair no chão, uma calculadora passou a mostrar os resultados em outra base: $3\times5 = 17$ e $6\times5 = 36$. Qual será o resultado mostrado para 4×5?

— **Questão 5.51** *(CN 2010)* O número natural 198 está escrito na base 10. Em quantas bases de numeração o número dado é escrito com três algarismos?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

— **Questão 5.52** *(IME 2018)* Seja x natural, $x > 2$. Se um numeral N se representa como 1041 na base x e como 1431 na base $x-1$, qual é a representação de N na base 2?

— **Questão 5.53** *(IME 2006)* Seja N um inteiro de 5 algarismos. O número P é obtido agregando-se o algarismo 1 à direita de N, e Q, agregando-se o 1 à esquerda. Sabendo que $P = 3Q$, determine o algarismo das centenas de N.

— **Questão 5.54** *(IME 2018)* A soma dos algarismos de X somada à soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Determine o menor natural $X > 0$ com essa propriedade.

— **Questão 5.55** *(Olimpíada Russa)* Um número N de quatro algarismos é tal que a soma dos quadrados dos algarismos extremos é 13 e a dos

algarismos do meio é 85; subtraindo 1089 de N, obtém-se o número com os mesmos algarismos em ordem contrária. Determine N.

— **Questão 5.56** *(CN 2012)* Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número de base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?

(A) 2012 **(B)** 2013 **(C)** 2014 **(D)** 2015 **(E)** 2016

— **Questão 5.57** *(OBM)* A representação decimal de um natural a tem n algarismos, e a de a^3 tem m algarismos. Qual dos valores 2007, 2008, 2009, 2010, 2011 é impossível para $m + n$?

— **Questão 5.58** *(IME)* Mostre que $M = (14641)_b$ é quadrado perfeito em qualquer base $b \geq 7$, e determine a representação de M na base $b+1$.

— **Questão 5.59** Quando expresso na base 8, $N!$ termina com exatamente 21 zeros. Determine o maior N possível.

— **Questão 5.60** Seja $n = \underbrace{99\cdots9}_{2008}$. Quantos algarismos 9 há na representação decimal de n^3?

— **Questão 5.61** *(IME 2014)* Calcule $\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ algarismos}} - \underbrace{1\cdots1}_{30}\underbrace{0\cdots0}_{30}}$.

— **Questão 5.62** *(IME 2015)* Seja f a função que troca a posição dos dígitos a_{2i} e a_{2i+1} da representação decimal (por exemplo, $f(123456) = 214365$ e $f(123) = 1032$). Determine o menor número maior que 99 que satisfaz $x^2 = 9x + 9f(x) + f(x)^2$.

— **Questão 5.63 (desafio)** Certos números, quando escritos na base 4, possuem soma dos algarismos igual a 17. Se k é a soma dos algarismos de um desses números quando escrito na base 2, determine os valores mínimo e máximo de k.

— **Questão 5.64 (desafio)** Entre os inteiros de 1 a 2^{40} cuja representação binária possui exatamente dois algarismos 1, quantos são divisíveis por 9?

— **Questão 5.65** Quantos números de 2006 algarismos existem?

— **Questão 5.66** Os armários de uma universidade são numerados a partir de 1, e cada algarismo da etiqueta custa 20 centavos. Identificar todos custou R$ 1379,40. Quantos são os armários?

— **Questão 5.67** Na sequência 123456789101112... (inteiros consecutivos), determine: (a) o 2006º algarismo; (b) o milionésimo algarismo.

— **Questão 5.68** Ainda na sequência dos inteiros consecutivos, o 206788º algarismo escrito é qual?

— **Questão 5.69** Para numerar as páginas de um livro usam-se N algarismos. Dentre 109, 999, 1992, 1998 e 1999, qual valor é impossível para N?

— **Questão 5.70** João tem algarismos de sobra, exceto o 2: só possui vinte e dois. Até que página ele consegue numerar um livro?

— **Questão 5.71** Um livro tem n páginas e o algarismo 1 aparece exatamente 213 vezes na numeração. Em que faixa está n?

— **Questão 5.72** Escrevendo $1, 2, 3, \ldots$ em ordem, que número estamos escrevendo quando o algarismo 9 aparece pela 1999ª vez?

— **Questão 5.73 (desafio)** Escrevem-se os naturais consecutivamente até que a numeração toda contenha exatamente um milhão de algarismos 1. Qual é a soma dos algarismos do último número escrito?

— **Questão 5.74 (desafio)** Quantos números de 100 a 999 têm um algarismo igual à média aritmética dos outros dois?

— **Questão 5.75 (desafio)** Considere os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente duas vezes (11, 121, 411, ...). Calcule a soma de todos eles.

— **Questão 5.76 (desafio)** Numa espiral quadrada 27×27 (números 1 a 729 dispostos em espiral para dentro, a partir do canto superior esquerdo), calcule a soma dos elementos da diagonal principal.

— **Questão 5.77** Um número se escreve 506214 na base 7. Como ele se escreve na base 8?

— **Questão 5.78** Num sistema de base b vale $57 + 33 = 112$. Nessa mesma base, quanto vale $57 \cdot 33$?

— **Questão 5.79** Numa base a vale $36 + 45 = 103$. Calcule, nessa base, o produto $36 \cdot 45$.

— **Questão 5.80** Na base b, o número 554 é o quadrado de 24. Determine b.

— **Questão 5.81** Se $(121)_b = N$ e N possui exatamente 9 divisores, qual é o menor valor possível de b?

— **Questão 5.82** Na base 3, um número N se escreve 12112211122211112222. Qual é o primeiro algarismo (à esquerda) de N na base 9?

— **Questão 5.83** O número 1987 escreve-se como $\overline{xyz}$ em alguma base b, com $x + y + z = 1 + 9 + 8 + 7$. Calcule $x + y - z + b$.

— **Questão 5.84** Seja N o repunit binário com k uns, isto é, $N = 2^k - 1$. Quantos uns e quantos zeros tem N^2 na base 2?

— **Questão 5.85 (desafio)** Quantos inteiros $n \geq 0$ têm a propriedade de a representação binária de n coincidir, algarismo por algarismo, com a representação ternária de $2n$?

— **Questão 5.86** Escrevendo o produto $(2^{2005}+1)(2^{2004}-1)$ na base 2, quantos zeros aparecem?

— **Questão 5.87 (desafio)** Onze lâmpadas alinhadas, numeradas de 1 a 11; inicialmente só as lâmpadas 6, 7 e 10 estão acesas. A cada segundo, localiza-se a lâmpada *apagada* de maior número e inverte-se o estado dela e de todas as posteriores. Após quantos segundos todas estarão acesas?

— **Questão 5.88** Os sete últimos algarismos de $n!$ são 8000000. Calcule a soma dos algarismos de n.

— **Questão 5.89** Para quantos valores de n o fatorial $n!$ termina com exatamente 25 zeros?

— **Questão 5.90** 30! termina com 7 zeros. Qual é o algarismo imediatamente anterior a esses zeros?

— **Questão 5.91** Calcule a soma dos algarismos do menor N tal que $\dfrac{N!}{12^{12}}$ é inteiro.

— **Questão 5.92** X tem 11 algarismos e Y tem k algarismos. Se o produto XY tem 24 algarismos, qual é o maior valor possível de k?

— **Questão 5.93** Um inteiro escreve-se com m algarismos na base 3 e com $m+1$ algarismos na base 2. Qual é o maior valor possível de m?

— **Questão 5.94 (desafio)** Sejam $a = \underbrace{3\cdots3}_{2003}$ e $b = \underbrace{6\cdots6}_{2003}$. Qual é o 2004^{o} algarismo, da direita para a esquerda, do produto ab?

— **Questão 5.95** Seja $s(n)$ o produto dos algarismos de n na base 4 (por exemplo, $31 = (133)_4$ dá $s(31) = 9$). Calcule $\sum_{n=1}^{255} s(n)$.

— **Questão 5.96** O número N, múltiplo de 7, tem representação binária

$$10110101010101\,ABC\,110.$$

Determine (A, B, C).

— **Questão 5.97** Seja $z(k)$ o número de zeros da representação binária de k. Calcule $S = \sum_{k=1}^{256} z(k)$.

— **Questão 5.98 (desafio)** Um inteiro N é um *duplo* 7→10 se a sua representação na base 7, lida como número decimal, é o dobro de N (por exemplo, $51 = (102)_7$, e $102 = 2 \cdot 51$). Qual é o maior duplo 7→10?

— **Questão 5.99 (desafio)** Quantos inteiros positivos $n \leq 2003$ têm representação binária com mais uns do que zeros?

— **Questão 5.100 (desafio)** Prove que um inteiro e o número obtido escrevendo seus algarismos na ordem inversa deixam o mesmo resto na divisão por 9.

— **Questão 5.101** Prove que todo inteiro $n \geq 1$ possui um múltiplo não nulo cujos algarismos pertencem a $\{0, 1\}$.

— **Questão 5.102 (desafio)** O período da dízima binária de $\frac{1}{5}$ é 4. Relacione esse 4 com as potências de 2 módulo 5.

— **Questão 5.103** *(IMO 1975)* Seja A a soma dos algarismos de 4444^{4444} e B a soma dos algarismos de A. Determine a soma dos algarismos de B.

— **Questão 5.104 (desafio)** Prove que não existe inteiro positivo n tal que

$$n + s(n) + s\big(s(n)\big) = 2026,$$

onde s é a soma dos algarismos na base 10.

— **Questão 5.105** *(AMC 8 2020)* Quantos inteiros entre 2020 e 2400 têm os quatro algarismos distintos e em ordem crescente? (Por exemplo, 2347 é um deles.)

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 21 **(E)** 28

— **Questão 5.106** *(AMC 8 2022)* Para n par positivo, o *fatorial duplo* $n!!$ é o produto de todos os pares de 2 até n; por exemplo, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$. Qual é o algarismo das unidades da soma

$$2!! + 4!! + 6!! + \cdots + 2018!! + 2020!! + 2022!!\,?$$

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

— **Questão 5.107** *(AIME 2019)* Considere o inteiro

$$N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{321 \text{ algarismos}}.$$

Encontre a soma dos algarismos de N.

— **Questão 5.108** *(HMMT 2018)* Quantos inteiros de oito algarismos, todos distintos, são múltiplos de 9?

— **Questão 5.109** *(AIME 1992)* Para quantos pares de inteiros consecutivos do conjunto $\{1000, 1001, \ldots, 2000\}$ a soma dos dois números pode ser feita *sem nenhum* "vai um"?

— **Questão 5.110 (desafio)** Um número escrito na base 7 termina em 3 e tem menos de 40 algarismos. Mudando esse 3 do fim para o começo, obtém-se — ainda na base 7 — exatamente $\frac{4}{5}$ do número original. Encontre-o.

— **Questão 5.111** *(CN 2026)* Considere o número binário $N = (1101)_2$. Seja M o número binário obtido acrescentando o algarismo zero à direita

da representação de N, e seja P o número binário obtido acrescentando o algarismo 1 à esquerda da representação de N. O valor decimal de $M+P$ é

(A) 55 **(B)** 56 **(C)** 57 **(D)** 58 **(E)** 59

— **Questão 5.112** Uma rua tem casas numeradas de 1 a 2027; as de numeração par ficam de um lado. Quantos algarismos são usados para numerar apenas essas casas?

— **Questão 5.113** Na mesma rua da questão anterior, as casas ímpares ficam do outro lado. Qual dos dois lados gasta mais algarismos, e quantos a mais?

— **Questão 5.114** Quantos algarismos 8 há na lista dos números naturais de 1 a 8888?

— **Questão 5.115** Para numerar as casas de uma rua, de 1 até a última, gastaram-se 7001 algarismos. Quantas casas tem a rua?

— **Questão 5.116** Mostre que, para numerar de 1 a $10^n - 1$, usam-se exatamente

$$\sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{k-1} \cdot k$$

algarismos, e calcule esse total para $n = 6$.

— **Questão 5.117** Quantos números de 1 a 2027 contêm pelo menos um algarismo 7?

— **Questão 5.118** Escrevem-se os naturais um após o outro, sem espaços:

$$1234567891011121314\ldots$$

Qual é o algarismo que ocupa a posição 2027 dessa sequência?

— **Questão 5.119** Mostre que a soma de todos os algarismos escritos ao numerar de 1 a $10^n - 1$ vale $45\,n\,10^{n-1}$.

— **Questão 5.120** Quantos algarismos 0 são escritos ao numerar de 1 a 2 222 222?

— **Questão 5.121 (desafio)** Mostre que o número de algarismos 0 escritos ao numerar de 1 a $10^n - 1$ é igual ao número de algarismos escritos ao numerar de 1 a $10^{n-1} - 1$.

5.9 Respostas e Soluções

— **Questão 5.1** $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 356 \cdot 10 + 7 = 30000 + 2000 + 3560 + 7$.

Resposta: 35567.

— **Questão 5.2** Relativos: $2000+300+40+5 = 2345$; absolutos: $2+3+4+5 = 14$. Diferença: 2331.

Resposta: 2331.

— **Questão 5.3** $67083 - 6783 = 60300$: o "67" vale dez vezes mais ($67 \cdot 1000 - 67 \cdot 100 = 60300$), e o "83" não muda.

Resposta: Aumenta 60300 unidades.

— **Questão 5.4** $10x + 3 = x + 201$ dá $9x = 198$.

Resposta: 22.

— **Questão 5.5** $790 - 34 - 1 = 755$ (excluindo os extremos).

Resposta: 755.

— **Questão 5.6** $\frac{79-3}{4} + 1 = 20$.

Resposta: 20.

— **Questão 5.7** $u+3u+(3u+1) = 15$ dá $7u = 14$, $u = 2$: dezenas 6, centenas 7.

Resposta: 762.

— **Questão 5.8** De 1 a 9: 9; de 10 a 99: 180; de 100 a 234: $135 \cdot 3 = 405$. Total 594.

Resposta: 594 algarismos.

— **Questão 5.9** Divisões sucessivas (feitas na teoria):

$$2026 = (11111101010)_2 = (5623)_7 = (7\text{EA})_{16}.$$

Resposta: $(11111101010)_2$, $(5623)_7$, $(7\text{EA})_{16}$.

— **Questão 5.10** $32 + 16 + 4 + 1 = 53$.

Resposta: 53.

— **Questão 5.11** $4 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 2 = 500 + 75 + 0 + 2 = 577$.

Resposta: 577.

— **Questão 5.12** $7 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 4 = 448 + 40 + 4 = 492$.

Resposta: 492.

— **Questão 5.13** $7 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 7 = 448 + 56 + 7 = 511$ (que é $8^3 - 1$).

Resposta: 511.

— **Questão 5.14** $100 = 3 \cdot 33 + 1$, $33 = 3 \cdot 11 + 0$, $11 = 3 \cdot 3 + 2$, $3 = 3 \cdot 1 + 0$, $1 = 3 \cdot 0 + 1$. Lendo os restos de baixo para cima: $(10201)_3$ (confira: $81+2 \cdot 9+1 = 100$).

Resposta: $(10201)_3$.

— **Questão 5.15** $(444)_5 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4 = 124$ (que é $5^3 - 1$).

Resposta: $(444)_5 = 124$.

— **Questão 5.16** $255 = 2^8 - 1 = (11111111)_2$: oito algarismos 1 — o maior número de 8 bits.

Resposta: $(11111111)_2$.

— **Questão 5.17** $b^2 + 3b + 2 = 42$, isto é, $b^2 + 3b - 40 = 0 = (b+8)(b-5)$: $b = 5$ (confira: $25 + 15 + 2 = 42$; e os algarismos $1, 3, 2$ são válidos em base 5).

Resposta: $b = 5$.

— **Questão 5.18** O último algarismo na base b é o resto da divisão por b: $2026 = 5 \cdot 405 + 1$.

Resposta: 1.

— **Questão 5.19** Unidades: $3 \times 3 = 9 = (14)_5$, escreve 4, vai 1; em seguida $3 \times 2 + 1 = 7 = (12)_5$. Resultado $(124)_5$ (confira: $13 \cdot 3 = 39 = 25 + 10 + 4$).

Resposta: $(124)_5$.

— **Questão 5.20** Com os "vai um" em 7 (feito na teoria): $(1110)_7$. Na base dez: $333 + 66 = 399 = (1110)_7$.

Resposta: $(1110)_7$.

— **Questão 5.21** O numeral 1000000 tem um 1 seguido de seis zeros: na base 2 vale $1 \cdot 2^6 = 64$. (Em geral, 1 seguido de k zeros vale b^k na base b — o "milhão" só é um milhão na base dez.)

Resposta: $(1000000)_2 = 2^6 = 64$.

— **Questão 5.22** O número de dígitos de N é $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$. Como $100 \log_{10} 2 = 30{,}103$, temos $\lfloor 30{,}103 \rfloor + 1 = 31$.

Resposta: 31 algarismos.

— **Questão 5.23** $\log_{10} 3^{40} = 40 \cdot 0{,}47712 = 19{,}085$; pelo Teorema 5.9, $\lfloor 19{,}085 \rfloor + 1 = 20$.

Resposta: 20 algarismos.

— **Questão 5.24** $\log_2 10^9 = \dfrac{9}{0{,}30103} \approx 29{,}9$, logo $29+1 = 30$ bits. Conferindo: $2^{29} = 536\,870\,912 < 10^9$ e $2^{30} = 1\,073\,741\,824 > 10^9$.

Resposta: 30 bits.

— **Questão 5.25** Cada pergunta no máximo divide as possibilidades pela metade: k perguntas separam até 2^k números. Como $2^{19} = 524\,288 < 10^6 \leq 1\,048\,576 = 2^{20}$, são necessárias — e a busca binária mostra que bastam — $\lceil \log_2 10^6 \rceil = 20$ perguntas.

Resposta: 20 perguntas.

— **Questão 5.26** Estimativa: $2^{200} = \left(2^{10}\right)^{20} \approx \left(10^3\right)^{20} = 10^{60}$: cerca de 60 algarismos. Exato: $200 \cdot 0{,}30103 = 60{,}206$, logo $\lfloor 60{,}206 \rfloor + 1 = 61$ algarismos —

a aproximação erra por pouco porque $1024 > 1000$, e o excesso acumulado em 20 potências vale um fator $1{,}024^{20} \approx 1{,}6$.

Resposta: 61 algarismos.

— **Questão 5.27** N tem k algarismos $\iff b^{k-1} \le N < b^k$; aplicando $\log_b$: $k-1 \le \log_b N < k$, ou seja, $k = \lfloor \log_b N \rfloor + 1$ (Teorema 5.9). Para 2^{64}: $64 \cdot 0{,}30103 = 19{,}27$, logo $19+1 = 20$ algarismos.

Resposta: Demonstrado; 20 algarismos.

— **Questão 5.28** Cada pergunta divide as possibilidades restantes em dois grupos, e a resposta mantém um deles: com 9 perguntas distinguem-se no máximo $2^9 = 512 < 1000$ números; com 10, até $2^{10} = 1024 \ge 1000$ — basta sempre perguntar "é maior que o meio do intervalo?".

Resposta: Demonstrado: 10 bastam, 9 não.

— **Questão 5.29** Feito na teoria: somam-se $34, 68, 272, 544$ (linhas ímpares), total 918. As linhas ímpares são os algarismos 1 de $27 = (11011)_2$: $918 = 34(16+8+2+1)$.

Resposta: 918.

— **Questão 5.30** $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = (0{,}101)_2$. (Denominador $8 = 2^3$: expansão finita com 3 casas.)

Resposta: $(0{,}101)_2$.

— **Questão 5.31** A soma geométrica de razão $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$. (Alternativa: multiplique $x = (0{,}\overline{01})_2$ por 4 — deslocar a vírgula duas casas — e subtraia: $3x = 1$.)

Resposta: Demonstrado.

— **Questão 5.32** $\frac{1}{10}$ é irredutível com denominador $10 = 2\cdot 5$: o fator 5 impede a forma $\frac{c}{2^k}$. Dividindo na base 2: $\frac{1}{10} = (0{,}0\overline{0011})_2$ — confira: $(0{,}\overline{0011})_2 = \frac{3/16}{1-1/16} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, e a metade disso desloca a vírgula: $\frac{1}{10}$.

Resposta: $\frac{1}{10} = (0{,}0\overline{0011})_2$.

— **Questão 5.33** $\overline{abba} = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$. (Alternativa: a soma alternada $a - b + b - a = 0$ e a Proposição 5.11.)

Resposta: Demonstrado.

— **Questão 5.34** $(121)_b = b^2+2b+1 = (b+1)^2$ e $(144)_b = b^2+4b+4 = (b+2)^2$ (os algarismos 4 exigem $b \ge 5$).

Resposta: Demonstrado.

— **Questão 5.35** Procuramos $x+y+z = 5$ com $x \ge 1$ e $0 \le x, y, z \le 9$. Com $x' = x - 1$: $x' + y + z = 4$, sem risco de estourar 9; por estrelas e barras, $\binom{4+2}{2} = 15$.

Resposta: 15 números.

— **Questão 5.36** Soma alternada (das unidades): $6-2+0-2=2$; pela Proposição 5.11, $b+1$ divide $(2026)_b-2$. Para ser múltiplo de $b+1$, seria preciso $(b+1)\mid 2$ — impossível para $b\geq 7$.

Resposta: Nenhuma base $b\geq 7$.

— **Questão 5.37** $\underbrace{66\cdots6}_{n}=6\cdot R_n$, onde $R_n=\underbrace{11\cdots1}_{n}$ é o *repunit*. Note que $R_6=111111=111{\cdot}1001=3{\cdot}37{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$ é múltiplo de 7, logo $666\,666=7{\cdot}95\,238$. (O Capítulo 11 mostrará, com congruências e casa dos pombos, que fenômenos assim são inevitáveis.)

Resposta: Demonstrado ($666\,666=7\cdot 95\,238$).

— **Questão 5.38** De 23 a 99: 77 números, 154 algarismos. Restam $1507-154=1353=451\cdot 3$: mais 451 números de três algarismos, de 100 até 550.

Resposta: 550.

— **Questão 5.39** De 328 a 999: 672 números de 3 algarismos, 2016; de 1000 a 1959: 960 números de 4 algarismos, 3840. Total $2016+3840=5856$.

Resposta: 5856 algarismos.

— **Questão 5.40** De 1 a 99 o algarismo 1 aparece 20 vezes (10 nas unidades, 10 nas dezenas). De 100 a 199: 100 centenas mais 20: acumulado 140. Cada centena seguinte acrescenta 20: até 299, 160; até 399, 180; até 499, 200. De 500 em diante: 501 (1), 510 (1), 511 (2), e $512,\ldots,518$ (7): $200+11=211$ exatamente na página 518.

Resposta: 518 páginas.

— **Questão 5.41** $N=\overline{ab}$: $100a+b-(10a+b)=90a=270$ dá $a=3$. A parte não periódica ter comprimento 2 exige $\max(v_2,v_5)=2$ no denominador: entre 30 e 39, $N=36=2^2\cdot 9$ ✓. Soma: $3+6=9$.

Resposta: 9.

— **Questão 5.42** $N=10^5+x$ vira $10x+1=3(10^5+x)$: $7x=299999$, $x=42857$ e $N=142857$. Como $142857=11\cdot 12987$, é múltiplo de 11. (É o período da dízima de $\frac{1}{7}$ — o famoso número *cíclico*.)

Resposta: $N=142857=11\cdot 12987$.

— **Questão 5.43** $(b+2)^3=b^3+7b^2+5b$ dá $b^3+6b^2+12b+8=b^3+7b^2+5b$, isto é, $b^2-7b-8=0$: $b=8$ (a raiz -1 não serve). E 8 é par entre 5 e 17.

Resposta: $b=8$.

— **Questão 5.44** $N=10^{220}-1$: $N^2=10^{440}-2\cdot 10^{220}+1=\underbrace{9\cdots9}_{219}8\underbrace{0\cdots0}_{219}1$. Soma: $219\cdot 9+8+1=1980=9\cdot 220$ (caso geral da identidade $9k$ para k noves).

Resposta: 1980.

— **Questão 5.45** Se 2^{1999} tem a algarismos e 5^{1999} tem b, então $10^{a-1}<2^{1999}<10^a$ e $10^{b-1}<5^{1999}<10^b$ (as potências de 2 e 5 nunca são potências de

10). Multiplicando: $10^{a+b-2} < 10^{1999} < 10^{a+b}$, logo $a+b-2 < 1999 < a+b$ e $a+b = 2000$. (Compare com o Teorema 5.9: é a mesma ideia, sem calcular logaritmo algum!)

Resposta: 2000 algarismos.

— **Questão 5.46** $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 99(a^2-b^2) = (11c)^2 = 121c^2$ dá $9(a^2-b^2) = 11c^2$: $11 \mid a^2-b^2$ e $3 \mid c$. Com $c=3$: $a^2-b^2 = 11$, $(a-b)(a+b) = 11$, $a-b=1$ e $a+b=11$: $a=6$, $b=5$. ($c=6$ ou 9 estouram.) Então $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$ ✓ e $a+b+c = 14$.

Resposta: 14.

— **Questão 5.47** Em vez de listar os quatro tricúbicos e depois procurar vizinhos, use logo a informação "*consecutivos*". Passar de n para $n+1$ muda *um* algarismo (ou provoca um "vai um"); a soma dos cubos, porém, muda muito. Comparar as duas equações elimina quase tudo.

Caso principal: n não termina em 9. Escreva $n = 10t+c$ com $0 \le c \le 8$, de modo que $n+1 = 10t+(c+1)$ tem os mesmos algarismos de n exceto o último. Sendo S a soma dos cubos dos algarismos de t, as duas condições são

$$S + c^3 = 10t + c \qquad \text{e} \qquad S + (c+1)^3 = 10t + c + 1.$$

Subtraindo, $(c+1)^3 - c^3 = 1$, isto é, $3c^2+3c+1 = 1$, ou $3c(c+1) = 0$: logo $c = 0$. Ou seja: *o primeiro número do par termina em 0 e o segundo em 1.*

Cálculo. Com $n = \overline{ab0}$, a condição é $a^3+b^3+0 = 100a+10b$, isto é,

$$a\,(100 - a^2) = b^3 - 10b.$$

Basta tabelar os dois lados para $a = 1, \ldots, 9$ e $b = 0, \ldots, 9$:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(100-a^2)$	99	192	**273**	336	375	384	357	288	171

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^3-10b	0	−9	−12	−3	24	75	156	**273**	432	639

O único valor comum é 273, com $a=3$ e $b=7$: $n = 370$ e $n+1 = 371$. Conferindo: $3^3+7^3+0^3 = 27+343 = 370$ ✓ e $3^3+7^3+1^3 = 371$ ✓.

Fechando os casos com "vai um". Se $n = \overline{ab9}$ com $b \le 8$, então $n+1 = \overline{a(b+1)0}$ e as condições dão $a^3+b^3+729 = 100a+10b+9$ e $a^3+(b+1)^3 = 100a+10b+10$; subtraindo, $729-(3b^2+3b+1) = -1$, isto é, $b^2+b = 243$ — sem solução inteira ($15\cdot 16 = 240$ e $16\cdot 17 = 272$). Se $n = \overline{a99}$ com $a \le 8$, então $n+1 = \overline{(a+1)00}$ e a segunda condição é $(a+1)^3 = 100(a+1)$, ou $(a+1)^2 = 100$, isto é, $a = 9$ — contradição. E $n = 999$ daria $n+1 = 1000$, que não tem três algarismos.

Observação. O par 370, 371 é, portanto, o *único* possível. Os quatro tricúbicos de três algarismos (também chamados números de Armstrong) são 153, 370, 371 e 407.

Resposta: 370 e 371.

— **Questão 5.48** $\overline{yx}-\overline{xy}=\overline{x0y}-\overline{yx}$ dá $(10y+x)-(10x+y)=(100x+y)-(10y+x)$, isto é, $y=6x$: como são algarismos não nulos, $x=1$, $y=6$. Soma: $16+61=77$.

Resposta: 77.

— **Questão 5.49** $\overline{abcd}=49\cdot\overline{bcd}$ dá $1000a=48\cdot\overline{bcd}$, logo $125a=6\,\overline{bcd}$: como $\mathrm{mdc}(125,6)=1$, $6\mid a$, e $a=6$ (com $\overline{bcd}=125$; o preço era 6125).

Resposta: 6.

— **Questão 5.50** $15=(17)_b$ dá $b+7=15$, $b=8$ (e $30=(36)_8$ ✓). Então $20=(24)_8$.

Resposta: 24.

— **Questão 5.51** Três algarismos na base b significa $b^2\le 198<b^3$: da esquerda, $b\le 14$; da direita, $b\ge 6$. São as bases $6,7,\dots,14$: 9 bases.

Resposta: 9 bases — alternativa **(E)**.

— **Questão 5.52** Uma representação posicional é um *polinômio na base*. Ter as duas escritas de N significa igualar dois polinômios, um em x e outro em $x-1$; a igualdade vira uma equação numérica em x, quase sempre de grau baixo, porque os termos de maior grau se cancelam.

Montando. De $N=(1041)_x$ e $N=(1431)_{x-1}$,

$$x^3+0\cdot x^2+4x+1=(x-1)^3+4(x-1)^2+3(x-1)+1.$$

Desenvolvendo o lado direito,

$$(x^3-3x^2+3x-1)+4(x^2-2x+1)+3x-3+1=x^3+x^2-2x+1.$$

Os cubos se cancelam e sobra

$$4x+1=x^2-2x+1\iff x^2-6x=0\iff x(x-6)=0.$$

Como $x>2$, resta $x=6$ — *solução única.*

Verificando a validade dos algarismos. Na base 6 o algarismo 4 é legítimo ($4<6$); na base 5 os algarismos 1, 4, 3 também são. E

$$N=(1041)_6=216+0+24+1=241,\qquad (1431)_5=125+4\cdot 25+15+1=241\ \checkmark.$$

Conversão para a base 2. Divisões sucessivas, ou — mais rápido — subtraindo potências de 2 (a régua da Figura 5.3): $241-128=113$, $113-64=49$, $49-32=17$, $17-16=1$, $1-1=0$. Logo

$$241=128+64+32+16+1=2^7+2^6+2^5+2^4+2^0=(11110001)_2.$$

Resposta: $(11110001)_2$.

— **Questão 5.53** "Agregar um algarismo à direita" e "à esquerda" são operações posicionais com fórmulas imediatas — e uma delas multiplica N por 10,

enquanto a outra apenas soma uma constante. A relação $P = 3Q$ vira, então, uma equação do primeiro grau.

Traduzindo. Como N tem 5 algarismos,

$$P = \overline{N1} = 10N + 1, \qquad Q = \overline{1N} = 100\,000 + N.$$

(No segundo caso o 1 ocupa a casa de 10^5, pois N ocupa as cinco casas seguintes.)

Cálculo.

$$10N + 1 = 3\,(100\,000 + N) \iff 10N + 1 = 300\,000 + 3N \iff 7N = 299\,999,$$

$$N = \frac{299\,999}{7} = 42\,857.$$

A divisão é exata, e N tem de fato 5 algarismos ✓— a solução é única.

Conferindo: $P = 428\,571$ e $Q = 142\,857$, com $3 \cdot 142\,857 = 428\,571$ ✓. O algarismo das centenas de 42 857 é o 8.

Observação. O número 142 857 que aparece em Q é o período de $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$: multiplicá-lo por $1, 2, \ldots, 6$ apenas gira os seus algarismos. Não é coincidência — a equação $7N = 299\,999$ é exatamente o que caracteriza esses números *cíclicos*.

Resposta: 8.

— **Questão 5.54** O lado esquerdo cresce *devagar* (cada algarismo contribui no máximo $9 + 81 = 90$), enquanto X cresce *depressa* com o número de algarismos. Logo X não pode ser grande — e o jeito de transformar essa intuição em conta é isolar a_0, cujo peso posicional é 1, dos demais.

A reescrita. Com $X = \sum_{i \geq 0} a_i 10^i$, a condição $\sum a_i + \sum a_i^2 = X$ fica

$$a_0 + a_0^2 + \sum_{i \geq 1} \big(a_i + a_i^2\big) = a_0 + \sum_{i \geq 1} a_i 10^i,$$

e, cancelando o a_0 solto,

$$a_0^2 = \sum_{i \geq 1} a_i \big(10^i - 1 - a_i\big). \qquad (*)$$

Cada parcela é ≥ 0. Como $a_i \leq 9$, tem-se $10^i - 1 - a_i \geq 10^i - 10 \geq 0$ para $i \geq 1$. Além disso:

- para $i \geq 2$, $10^i - 1 - a_i \geq 100 - 10 = 90 > 0$, de modo que a parcela é nula *apenas* se $a_i = 0$, e vale pelo menos $1 \cdot 90 = 90$ se $a_i \geq 1$;
- para $i = 1$, a parcela é $a_1(9 - a_1)$.

X tem no máximo dois algarismos. O lado esquerdo de $(*)$ satisfaz $a_0^2 \leq 81$. Se algum a_i com $i \geq 2$ fosse não nulo, o lado direito seria $\geq 90 > 81$: impossível. Logo $a_i = 0$ para todo $i \geq 2$.

Cálculo. Resta $a_0^2 = a_1(9 - a_1)$. Os valores de $a_1(9 - a_1)$ para $a_1 = 0, 1, \ldots, 9$ são

$$0,\ 8,\ 14,\ 18,\ 20,\ 20,\ 18,\ 14,\ 8,\ 0,$$

e o único quadrado perfeito da lista é 0 — atingido em $a_1 = 0$ e em $a_1 = 9$. Então $a_0 = 0$, e: $a_1 = 0$ daria $X = 0$, excluído por $X > 0$; $a_1 = 9$ dá $X = 90$.

Conferindo: $9 + 0 + 9^2 + 0^2 = 9 + 81 = 90$ ✓.

Observação. O argumento mostra mais do que o enunciado pede: 90 é o *único* natural positivo com essa propriedade, e não apenas o menor. A técnica — "compare a ordem de grandeza dos dois lados para limitar o número de algarismos, depois faça uma busca finita" — resolve praticamente toda equação envolvendo um número e os seus algarismos.

Resposta: $X = 90$.

— **Questão 5.55** A condição "N menos 1089 é o reverso de N" relaciona os algarismos *extremos* entre si e os *médios* entre si — e o faz com coeficientes muito diferentes (111 e 10), o que praticamente força os valores. As duas somas de quadrados entram só no final, para escolher os algarismos individuais.

A subtração. Com $N = \overline{abcd}$ e reverso $\overline{dcba}$,

$$N - \overline{dcba} = (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 999(a-d) + 90(b-c).$$

Igualando a 1089 e dividindo por 9:

$$111(a-d) + 10(b-c) = 121.$$

Como $|b-c| \le 9$, o termo $10(b-c)$ está entre -90 e 90; logo $111(a-d)$ está entre 31 e 211, o que força $a - d = 1$ (é o único múltiplo de 111 nesse intervalo). Sobra $10(b-c) = 10$, isto é, $b - c = 1$.

Os algarismos extremos. De $a^2 + d^2 = 13$ com $a = d + 1$:

$$(d+1)^2 + d^2 = 13 \iff 2d^2 + 2d - 12 = 0 \iff (d+3)(d-2) = 0,$$

e como $d \ge 0$, $d = 2$ e $a = 3$.

Os algarismos médios. De $b^2 + c^2 = 85$ com $b = c + 1$:

$$(c+1)^2 + c^2 = 85 \iff 2c^2 + 2c - 84 = 0 \iff (c+7)(c-6) = 0,$$

logo $c = 6$ e $b = 7$.

Conclusão. $N = 3762$ é a *única* possibilidade, e de fato $3762 - 1089 = 2673$, o reverso de 3762 ✓; além disso $3^2 + 2^2 = 13$ ✓ e $7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ ✓.

Resposta: $N = 3762$.

— **Questão 5.56** Zeros finais na base 7 contam a maior potência de 7 que divide o número. $21^{2012} = 3^{2012} \cdot 7^{2012}$, e 3^{2012} não tem fator 7.

Resposta: 2012 zeros — alternativa **(A)**.

— **Questão 5.57** Não se pede um exemplo: pede-se descartar um valor. Isso sugere procurar uma *restrição* que $m+n$ obedeça sempre — e a restrição natural aparece ao localizar a e a^3 entre potências de 10, exatamente como na Figura 5.4.

Enquadrando a^3. Ter n algarismos significa $10^{n-1} \le a < 10^n$. Elevando ao cubo (a função é crescente para $a > 0$),

$$10^{3n-3} \le a^3 < 10^{3n}.$$

Pelo Teorema 5.9, o número de algarismos de a^3 é, portanto, um dos três valores

$$m \in \{3n-2,\ 3n-1,\ 3n\}$$

— e os três realmente ocorrem: $a = 10^{n-1}$ dá $m = 3n-2$; $a = 2\cdot 10^{n-1}$ (cubo $8\cdot 10^{3n-3}$) dá $m = 3n-2$ também; $a = 3\cdot 10^{n-1}$ (cubo $27\cdot 10^{3n-3}$) dá $m = 3n-1$; e $a = 10^n - 1$ dá $m = 3n$.

A restrição. Somando,

$$m + n \in \{4n-2,\ 4n-1,\ 4n\},$$

isto é, $m+n$ deixa resto 2, 3 ou 0 na divisão por 4 — *nunca* resto 1.

Testando as alternativas. Dividindo por 4: $2007 = 4\cdot 501 + 3$, $2008 = 4\cdot 502$, $2009 = 4\cdot 502 + 1$, $2010 = 4\cdot 502 + 2$, $2011 = 4\cdot 502 + 3$. O único com resto 1 é 2009.

Observação. A técnica é a de um *invariante*: em vez de construir exemplos um a um, encontra-se uma quantidade ($m+n$ mod 4) que não pode assumir certo valor. Os outros quatro números são realmente atingíveis — basta escolher n e o tipo de a adequados.

Resposta: 2009.

— **Questão 5.58** Os algarismos $1, 4, 6, 4, 1$ são a quinta linha do triângulo de Pascal — os coeficientes de $(x+1)^4$. Como a representação posicional é justamente um polinômio na base, o número $(14641)_b$ "é" esse polinômio avaliado em $x = b$.

A identidade. Por definição de base,

$$M = 1\cdot b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 = (b+1)^4,$$

pelo binômio de Newton. Logo $M = \big((b+1)^2\big)^2$ é quadrado perfeito — e mais: é uma quarta potência.

Por que $b \geq 7$. A hipótese não é decorativa: o algarismo 6 só existe em bases $b \geq 7$. Para $b \leq 6$ a escrita 14641 nem sequer é legítima (embora a identidade algébrica continue valendo).

Na base $b+1$. Chame $c = b+1$; queremos escrever c^4 na base c. Pela própria definição, c^4 é a unidade da casa de índice 4:

$$M = 1\cdot c^4 + 0\cdot c^3 + 0\cdot c^2 + 0\cdot c + 0 = (10000)_c.$$

É o mesmo fenômeno de $10^4 = 10\,000$ na base dez: uma potência da base é sempre um 1 seguido de zeros.

Confira com $b = 7$: $(14641)_7 = 2401 + 4\cdot 343 + 6\cdot 49 + 28 + 1 = 2401 + 1372 + 294 + 29 = 4096 = 8^4 = 64^2$ ✓, e $4096 = (10000)_8$ ✓.

Observação. O mesmo raciocínio mostra que $(121)_b = (b+1)^2$, $(1331)_b = (b+1)^3$ e, em geral, que qualquer linha do triângulo de Pascal escrita como numeral na base b vale $(b+1)^n$ — desde que todos os coeficientes sejam menores que b.

Resposta: $M = (b+1)^4 = (10000)_{b+1}$.

— **Questão 5.59** Zeros na base 8: $\lfloor v_2(N!)/3 \rfloor = 21$, isto é, $63 \leq v_2(N!) \leq 65$. Por Legendre, $v_2(64!) = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$; os fatores 65 e 67 são ímpares e 66 contribui com um único 2, logo $v_2(67!) = 64$; já $68 = 4\cdot 17$ leva a $v_2(68!) = 66 > 65$. O maior é $N = 67$.

Resposta: $N = 67$.

— **Questão 5.60** $n = 10^{2008} - 1$:

$$n^3 = 10^{6024} - 3\cdot 10^{4016} + 3\cdot 10^{2008} - 1 = \underbrace{9\cdots 9}_{2007}\,7\,\underbrace{0\cdots 0}_{2007}\,2\,\underbrace{9\cdots 9}_{2008}.$$

Total de noves: $2007 + 2008 = 4015$.

Resposta: 4015.

— **Questão 5.61** Números formados por blocos repetidos são somas de progressões geométricas — logo têm fórmula fechada. Escritos assim, os dois termos ganham denominadores 27 e 9, e a diferença revela um cubo perfeito. O sinal de que o caminho é esse: o enunciado pede uma *raiz cúbica* exata.

O primeiro número. O bloco 037 repete-se; o número tem 89 algarismos porque começa em 37. Fatorando o 37,

$$A = 37\big(10^{87} + 10^{84} + \cdots + 10^3 + 1\big) = 37\cdot\frac{10^{90}-1}{10^3-1} = \frac{37\,(10^{90}-1)}{999} = \frac{10^{90}-1}{27},$$

pois $999 = 27\cdot 37$. (A soma tem 30 parcelas, de razão 10^3.)

O segundo número. São 30 uns seguidos de 30 zeros:

$$B = \underbrace{1\cdots 1}_{30}\cdot 10^{30} = \frac{10^{30}-1}{9}\cdot 10^{30} = \frac{10^{60}-10^{30}}{9} = \frac{3\cdot 10^{60} - 3\cdot 10^{30}}{27}.$$

A diferença. Com denominador comum 27,

$$A - B = \frac{10^{90} - 3\cdot 10^{60} + 3\cdot 10^{30} - 1}{27}.$$

Pondo $u = 10^{30}$, o numerador é $u^3 - 3u^2 + 3u - 1 = (u-1)^3$; e $27 = 3^3$. Portanto

$$A - B = \left(\frac{10^{30}-1}{3}\right)^3,$$

um cubo perfeito — como o enunciado prometia.

A raiz. $\dfrac{10^{30}-1}{3} = \dfrac{3\cdot(10^{30}-1)}{9} = 3\cdot\underbrace{1\cdots 1}_{30} = \underbrace{3\cdots 3}_{30}$.

Confira em miniatura (mesma estrutura com $k = 2$: o número 37037, de 5 algarismos, menos 2 uns seguidos de 2 zeros): $37\,037 - 1100 = 35\,937 = 33^3$ ✓.

Resposta: $\underbrace{33\cdots 3}_{30}$.

— **Questão 5.62** A equação tem x^2 e $f(x)^2$ dos lados opostos: passe tudo para um lado e reconheça a diferença de quadrados. O fator comum $x + f(x)$ é positivo, logo pode ser cancelado — e a condição desaba para uma diferença fixa.

Cálculo. De $x^2 = 9x + 9f(x) + f(x)^2$,

$$x^2 - f(x)^2 = 9\big(x + f(x)\big) \iff \big(x + f(x)\big)\big(x - f(x) - 9\big) = 0.$$

Como $x > 99$ e $f(x) > 0$, o fator $x + f(x)$ é positivo; logo

$$x - f(x) = 9.$$

Por que não há solução com três algarismos. Se $x = \overline{abc}$, a regra completa com um zero à esquerda ($x = \overline{0abc}$ para efeito das trocas) e produz $f(x) = \overline{a0cb}$. Então

$$x - f(x) = (100a + 10b + c) - (1000a + 10c + b) = -900a + 9b - 9c.$$

Para isso valer 9 seria preciso $-100a + b - c = 1$; mas $a \geq 1$ dá $-100a \leq -100$ e $b - c \leq 9$, de modo que o lado esquerdo é no máximo $-91 < 1$. Nenhum número de três algarismos serve.

Com quatro algarismos. Se $x = \overline{abcd}$, então $f(x) = \overline{badc}$ e

$$x - f(x) = 900(a - b) + 9(c - d) = 9 \iff 100(a - b) + (c - d) = 1.$$

Como $|c - d| \leq 9$, o múltiplo de 100 tem de ser 0: $a = b$, e então $c - d = 1$.

O menor. Queremos $\overline{aacd}$ mínimo com $a \geq 1$ e $c = d + 1$: tome $a = 1$ e, em seguida, c o menor possível, isto é, $c = 1$ e $d = 0$. Resulta $x = 1110$, com $f(1110) = 1101$ e $1110 - 1101 = 9$ ✓. Conferindo na equação original: $1110^2 = 1\,232\,100$ e $9 \cdot 1110 + 9 \cdot 1101 + 1101^2 = 9990 + 9909 + 1\,212\,201 = 1\,232\,100$ ✓.

Resposta: 1110.

— **Questão 5.63** Como $4 = 2^2$, passar da base 4 para a base 2 é trocar *cada* algarismo quaternário pelo seu par de bits — não há transporte nem interferência entre casas. Basta então comparar, algarismo por algarismo, o que cada um vale nas duas contagens.

A tabela de conversão.

algarismo d (base 4)	0	1	2	3
bits	00	01	10	11
soma na base 4	0	1	2	3
soma na base 2	0	1	1	2
perda $d -$ (bits)	0	0	1	1

Portanto, sendo t a quantidade de algarismos iguais a 2 ou a 3,

$$k = 17 - t.$$

Tudo se reduz a saber quanto pode valer t.

Máximo de k (mínimo de t). Com $t = 0$ o número só tem algarismos 0 e 1; para somar 17 bastam dezessete 1's, por exemplo $N = (\underbrace{1 \cdots 1}_{17})_4$. Logo $k_{\max} = 17$.

Mínimo de k (máximo de t). Cada algarismo 2 ou 3 consome pelo menos 2 unidades da soma 17; como a soma total é 17,

$$2t \leq 17 \implies t \leq 8{,}5 \implies t \leq 8.$$

E $t = 8$ é atingível: oito algarismos 2 somam 16, e um algarismo 1 completa 17 — por exemplo $N = (1\,22222222)_4$. (Também serve sete 2's e um 3: $14+3 = 17$, com $t = 8$.) Logo $k_{\min} = 17 - 8 = 9$.

Conferindo: $(122222222)_4$ vira, em binário, $01\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10$, isto é, $(1101010101010101 0)_2$, com $1 + 8 = 9$ algarismos 1 ✓.

Observação. O ponto central é que a soma dos algarismos *não* é invariante por mudança de base — mas a sua variação é controlável quando uma base é potência da outra.

Resposta: $k_{\min} = 9$ e $k_{\max} = 17$.

— **Questão 5.64** "Exatamente dois algarismos 1 na base 2" descreve os números da forma $2^a + 2^b$. A divisibilidade por 9 se decide olhando os restos das potências de 2 módulo 9 — e essas potências *ciclam*, o que reduz tudo a uma condição sobre $a - b$.

Quais números. Os inteiros de 1 a 2^{40} com exatamente dois bits 1 são

$$N = 2^a + 2^b, \qquad 0 \le b < a \le 39$$

(o maior é $2^{39} + 2^{38} < 2^{40}$, e 2^{40} tem um só bit 1).

As potências de 2 módulo 9.

$$2^0, 2^1, \cdots \equiv 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 7,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4, \ldots \pmod 9,$$

ciclo de período 6 (pois $2^6 = 64 = 63 + 1 \equiv 1$). Assim, $2^a \bmod 9$ só depende de $a \bmod 6$.

A condição. Queremos $2^a + 2^b \equiv 0 \pmod 9$, isto é, dois restos da lista $\{1, 2, 4, 8, 7, 5\}$ que somem 9: os pares são $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$ e $\{4, 5\}$ — que correspondem, nos expoentes, a $\{0, 3\}$, $\{1, 4\}$ e $\{2, 5\}$ módulo 6. Em todos eles a diferença dos expoentes é $\equiv 3 \pmod 6$. Reciprocamente, se $a - b \equiv 3 \pmod 6$ então $2^a + 2^b = 2^b\big(2^{a-b} + 1\big)$ e $2^{a-b} \equiv 8$, de modo que $2^{a-b} + 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ou seja:

$$9 \mid 2^a + 2^b \iff a - b \equiv 3 \pmod 6.$$

Contando. Com $0 \le b < a \le 39$, a diferença $d = a - b$ percorre os valores 3, 9, 15, 21, 27, 33 e 39. Para cada d há $40 - d$ pares (a, b): basta escolher b de 0 a $39 - d$. Logo o total é

$$37 + 31 + 25 + 19 + 13 + 7 + 1 = 133.$$

(É uma progressão aritmética de razão -6 com 7 termos: $\frac{(37+1)\cdot 7}{2} = 133$ ✓.)

Observação. O uso de $2^b(2^d + 1)$ no fim é o que fecha o argumento nos dois sentidos — sem ele, teríamos apenas verificado que a condição é necessária.

Resposta: 133.

— **Questão 5.65** De 10^{2005} a $10^{2006} - 1$: são $9 \cdot 10^{2005}$.

Resposta: $9 \cdot 10^{2005}$.

— **Questão 5.66** Foram $\frac{137940}{20} = 6897$ algarismos. Até 999 gastam-se $9 + 180 + 2700 = 2889$; restam $4008 = 4 \cdot 1002$: mais 1002 números de quatro algarismos, até $999 + 1002 = 2001$.

Resposta: 2001 armários.

— **Questão 5.67** (a) $2006 - 9 - 180 = 1817 = 3 \cdot 605 + 2$: estamos no segundo algarismo do 606º número de três algarismos, 705: algarismo 0. (b) $10^6 - 9 - 180 - 2700 - 36000 - 450000 = 511111 = 6 \cdot 85185 + 1$: primeiro algarismo do número $100000 + 85185 = 185185$: algarismo 1.

Resposta: (a) 0; (b) 1.

— **Questão 5.68** $206788 - 9 - 180 - 2700 - 36000 = 167899 = 5 \cdot 33579 + 4$: quarto algarismo do número $10000 + 33579 = 43579$: é 7.

Resposta: 7.

— **Questão 5.69** A contagem salta de 3 em 3 na faixa de três algarismos: $N = 189 + 3k$. Testando: $109 = 9 + 2 \cdot 50$ ✓ (59 páginas); $999 = 189 + 3 \cdot 270$ ✓; 1992 e 1998 idem; mas $1999 \equiv 1 \pmod 3$ com $1999 > 189$ e $1999 < 2889$ — impossível.

Resposta: 1999.

— **Questão 5.70** De 1 a 99 o algarismo 2 aparece 20 vezes (10 nas unidades e 10 nas dezenas). Depois: 102 usa o 21º e 112 o 22º; as demais páginas até 119 não usam nenhum, e a página 120 exigiria um 23º.

Resposta: Até a página 119.

— **Questão 5.71** Até 499 o 1 aparece 200 vezes (Questão anterior sobre o 518: mesma contagem). De 500 em diante: 501 (201), 510 (202), 511 (204), 512–518 (205–211), 519 (212), 521 (213) — e nenhum 1 novo até 530. Logo $521 \leq n \leq 530$.

Resposta: $521 \leq n \leq 530$.

— **Questão 5.72** De 1 a 999 o 9 aparece 300 vezes; em cada milhar seguinte, mais 300 (o 9 nunca ocupa a casa dos milhares até 8999). Até 5999: 1800 vezes. De 6000 em diante faltam 199: cada centena completa usa 20 noves, então até 6899 vão mais $9 \cdot 20 = 180$ (1980); a centena 6900–6999 tem 9 na casa das centenas: $6900, \ldots, 6909$ dão $10 + 1 = 11$ noves (6909 tem dois), acumulando 1991 em 6909; seguindo, 6910–6916: 7 noves (1998), e 6917 traz o 1999º.

Resposta: 6917.

— **Questão 5.73** Não se procura um número especial: conta-se por *blocos*. A pergunta "quantos algarismos 1 há de 1 a $10^k - 1$?" tem resposta fechada, e cada bloco de 10^5 ou 10^6 números seguintes contribui de modo previsível. Basta ir somando blocos até chegar exatamente a 10^6.

O bloco inicial. Entre 1 e $10^k - 1$, escrevendo todos os números com k casas (completando com zeros à esquerda, que não criam uns), cada uma das k casas é ocupada por cada algarismo em $\frac{10^k}{10} = 10^{k-1}$ dos números. Logo o algarismo 1 aparece

$$k \cdot 10^{k-1} \text{ vezes.}$$

Em particular, até 99 999 há $5 \cdot 10^4 = 50\,000$ uns, e até 999 999 há

$$6 \cdot 10^5 = 600\,000 \text{ uns.}$$

Faltam 400 000.

Bloco 1 000 000 *a* 1 099 999. São 100 000 números; cada um contribui com o 1 inicial (100 000 uns) mais os uns do "rabo" de seis algarismos, que percorre 000 000 a 099 999 — os mesmos uns que aparecem de 0 a 99 999, ou seja, 50 000. Total do bloco: 150 000 uns. Acumulado: 750 000. Ainda faltam 250 000.

Bloco 1 100 000 *a* 1 199 999. De novo 100 000 números e 100 000 uns iniciais; agora o rabo percorre 100 000 a 199 999, e cada rabo traz o seu próprio 1 da frente (100 000 uns) mais os uns dos últimos cinco algarismos (50 000). Total do bloco: $100\,000 + 100\,000 + 50\,000 = 250\,000$ uns — exatamente o que faltava.

Conclusão. O milhão de uns é atingido *no último número do bloco*, $n = 1\,199\,999$: até 1 199 998 há 999 998 uns, e o próprio 1 199 999 traz mais dois (os dois algarismos 1 da frente), completando 1 000 000. Como a contagem é estritamente crescente, esse n é único.

A resposta. A soma dos algarismos de 1 199 999 é

$$1 + 1 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 47.$$

Resposta: 47.

— **Questão 5.74** Dizer que um dos três algarismos é a média dos outros dois é dizer que, *ordenados*, eles formam uma progressão aritmética: se $y = \frac{x+z}{2}$, então x, y, z têm diferenças iguais. Então: primeiro contamos os *conjuntos* (multiconjuntos) de algarismos que servem; depois, quantos números de três algarismos cada um gera.

Passo 1: as PAs de algarismos. Uma PA x, $x+r$, $x+2r$ com $r \geq 0$ e todos os termos entre 0 e 9 exige $x \geq 0$ e $x + 2r \leq 9$.

- $r = 0$: os três algarismos são iguais; $x = 0, \ldots, 9$, são 10 casos.
- $r = 1$: $x \leq 7$, 8 casos. $r = 2$: $x \leq 5$, 6 casos.
- $r = 3$: $x \leq 3$, 4 casos. $r = 4$: $x \leq 1$, 2 casos.
- $r \geq 5$: $x + 2r \geq 10$, nenhum caso.

São 10 ternos com algarismos iguais e $8+6+4+2 = 20$ ternos com três algarismos distintos.

Passo 2: de cada terno para os números.

- *Algarismos iguais* ($r = 0$): o número é $\overline{ddd}$, e só há um por terno — mas 000 não é número de três algarismos. Restam 9 números $(111, 222, \ldots, 999)$.
- *Algarismos distintos* ($r \geq 1$): há $3! = 6$ ordens. Se o terno *não* contém o 0, todas as 6 valem. Se contém o 0 (isto é, $x = 0$: os ternos $\{0,1,2\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,3,6\}$ e $\{0,4,8\}$ — um para cada $r = 1, 2, 3, 4$), as 2 ordens que começam por 0 são proibidas, sobrando 4.

Dos 20 ternos distintos, 4 contêm o zero e 16 não.

Total.

$$9 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 = 9 + 16 + 96 = 121.$$

Observação. Os dois cuidados que fazem a diferença são exatamente os dois avisos do Passo 2: o zero não pode liderar, e ternos com algarismos repetidos não geram 6 números. Esquecer qualquer um deles produz respostas próximas — e erradas.

Resposta: 121.

— **Questão 5.75** O único de dois algarismos é 11. Nos de três algarismos há três padrões ($c \neq 1$): $\overline{11c} = 110 + c$ com $c \in \{0, 2, \ldots, 9\}$, somando $9 \cdot 110 + 44 = 1034$; $\overline{1c1} = 101 + 10c$, somando $9 \cdot 101 + 10 \cdot 44 = 1349$; e $\overline{c11} = 100c + 11$ com $c \in \{2, \ldots, 9\}$, somando $100 \cdot 44 + 8 \cdot 11 = 4488$. Total: $11 + 1034 + 1349 + 4488 = 6882$.

Resposta: 6882.

— **Questão 5.76** A espiral é feita de *camadas* (anéis quadrados), e a diagonal principal atravessa cada camada exatamente duas vezes: no canto superior esquerdo, onde a camada *começa*, e no canto inferior direito, a que se chega depois de percorrer o lado de cima e o lado direito. Basta, portanto, saber o número que abre cada camada e quantos passos até o outro canto.

Numerando as camadas. A camada de índice k ($k = 0, 1, \ldots, 13$) é o anel de lado

$$s = 27 - 2k \qquad (s = 27, 25, 23, \ldots, 3, 1).$$

Antes dela já foram preenchidas todas as camadas externas, que ocupam $27^2 - s^2$ casas. Logo o canto superior esquerdo da camada, que está na diagonal, contém

$$T(s) = 27^2 - s^2 + 1 = 730 - s^2.$$

A partir dele a espiral anda $s-1$ casas para a direita (chegando ao canto superior direito) e mais $s - 1$ para baixo (chegando ao canto inferior direito, também na diagonal). Portanto o segundo número da diagonal nessa camada é

$$B(s) = T(s) + 2(s - 1) = 728 + 2s - s^2.$$

Conferindo numa espiral 5×5, onde $s = 5$ e $s = 3$:

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

Com $n = 5$: $T(5) = 26 - 25 = 1$ e $B(5) = 1 + 2 \cdot 4 = 9$; $T(3) = 26 - 9 = 17$ e $B(3) = 17 + 2 \cdot 2 = 21$; o centro é 25. Soma $1 + 9 + 17 + 21 + 25 = 73$ ✓ (confere com o desenho).

Somando as 27 casas da diagonal. As camadas $k = 0, \ldots, 12$ (isto é, $s = 27, 25, \ldots, 3$) dão dois números cada:

$$T(s) + B(s) = (730 - s^2) + (728 + 2s - s^2) = 1458 + 2s - 2s^2,$$

e a camada $k = 13$ ($s = 1$) é o centro sozinho, com $T(1) = 730 - 1 = 729$. Logo

$$S = \sum_{s=3,5,\ldots,27} \left(1458 + 2s - 2s^2\right) + 729.$$

São 13 parcelas, com

$$\sum s = 3+5+\cdots+27 = \frac{(3+27)\cdot 13}{2} = 195,$$

$$\sum s^2 = \left(1^2+3^2+\cdots+27^2\right) - 1 = \frac{14\cdot 27\cdot 29}{3} - 1 = 3654 - 1 = 3653$$

(usando $1^2+3^2+\cdots+(2m-1)^2 = \frac{m(2m-1)(2m+1)}{3}$ com $m=14$). Portanto

$$S = 13\cdot 1458 + 2\cdot 195 - 2\cdot 3653 + 729 = 18\,954 + 390 - 7306 + 729 = 12\,767.$$

Resposta: 12767.

— **Questão 5.77** $(506214)_7 = 5\cdot 7^5 + 0\cdot 7^4 + 6\cdot 7^3 + 2\cdot 7^2 + 1\cdot 7 + 4 = 84\,035 + 2058 + 98 + 7 + 4 = 86\,202$; convertendo para a base 8 por divisões sucessivas: $(250272)_8$.

Resposta: $(250272)_8$.

— **Questão 5.78** Nas unidades, $7+3$ deixa 2 e vai 1: $7+3 = b+2$ dá $b=8$. Então $57_8 \cdot 33_8 = 47\cdot 27 = 1269 = (2365)_8$.

Resposta: $(2365)_8$.

— **Questão 5.79** $6+5 = a+3$ dá $a=8$: $36_8 \cdot 45_8 = 30\cdot 37 = 1110 = (2126)_8$.

Resposta: $(2126)_8$.

— **Questão 5.80** $5b^2+5b+4 = (2b+4)^2 = 4b^2+16b+16$ dá $b^2-11b-12=0$: $b=12$.

Resposta: $b=12$.

— **Questão 5.81** $N=(b+1)^2$, e $\tau\big((b+1)^2\big)=9$ pede $(b+1)^2 = p^2q^2$ ou p^8. O menor caso é $b+1 = 2\cdot 3 = 6$: $N=36$ com $\tau(36)=9$ ✓ — e o algarismo 2 só exige $b\geq 3$.

Resposta: $b=5$.

— **Questão 5.82** Como $9=3^2$, agrupam-se os algarismos ternários em pares, da direita para a esquerda; os 20 algarismos formam 10 pares, e o par da frente é $(12)_3 = 5$.

Resposta: 5.

— **Questão 5.83** De $b^2 \leq 1987 < b^3$: $13 \leq b \leq 44$. Testando com $x+y+z = 25$: $b=19$ dá $1987 = 5\cdot 19^2 + 9\cdot 19 + 11$, isto é, $(x,y,z) = (5,9,11)$ com soma 25 ✓. Então $5+9-11+19 = 22$.

Resposta: 22.

— **Questão 5.84** $N^2 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1$: um bloco de $k-1$ uns, um bloco de k zeros e um 1 final ($k=3$: $49 = (110001)_2$ ✓). São $2k$ algarismos: k uns e k zeros.

Resposta: k uns e k zeros.

— **Questão 5.85** Se os algarismos são $d_i \in \{0,1\}$, a condição é $2\sum d_i 2^i = \sum d_i 3^i$, isto é, $\sum d_i(3^i - 2^{i+1}) = 0$. Os coeficientes são $-1, -1, 1, 11, 49, 179, \ldots$: para $i \geq 3$ são grandes demais, e a única compensação usa o $+1$ de $i = 2$ contra um dos -1: soluções $(101)_2$ e $(110)_2$, além de $n = 0$. São $n = 0$; $n = 5$ ($2n = 10 = (101)_3$ ✓) e $n = 6$ ($12 = (110)_3$ ✓).

Resposta: 3 inteiros: 0, 5 e 6.

— **Questão 5.86** $(2^{2005}+1)(2^{2004}-1) = 2^{4009} - 2^{2005} + 2^{2004} - 1 = 2^{4009} - 2^{2004} - 1$. Mas $2^{4009} - 2^{2004}$ é um bloco de 2005 uns seguido de 2004 zeros; subtraindo 1, os zeros finais viram uns e resta um único zero.

Resposta: 1 zero.

— **Questão 5.87** Sempre que um processo mexe em "estados ligado/desligado" de objetos alinhados, convém ler a configuração como um número binário: muitas regras aparentemente estranhas viram operações aritméticas simples. Aqui a regra é *exatamente* a soma de 1.

A leitura. Codifique o estado como o número binário de 11 bits

$$b_1 b_2 \cdots b_{11}, \qquad b_i = 1 \text{ se a lâmpada } i \text{ está acesa},$$

com a lâmpada 1 na casa *mais* significativa (peso 2^{10}) e a lâmpada 11 nas unidades (peso 2^0).

Por que a operação é "somar 1". Ao somar 1 a um número binário, procura-se o zero mais à direita: ele vira 1, e todos os algarismos à sua direita — que eram necessariamente 1 — viram 0. Traduzindo: localiza-se a lâmpada *apagada de maior número* (o zero mais à direita é a casa menos significativa com bit 0), ela acende, e todas as posteriores (que estavam acesas) apagam — ou seja, inverte-se o estado dela e de todas as posteriores. É palavra por palavra a regra do enunciado.

Os dois estados. No início estão acesas as lâmpadas 6, 7 e 10, de pesos $2^{11-6} = 32$, $2^{11-7} = 16$ e $2^{11-10} = 2$:

$$\text{inicial} = (00000110010)_2 = 32 + 16 + 2 = 50.$$

No final todas estão acesas:

$$\text{final} = (11111111111)_2 = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Conclusão. Cada segundo soma exatamente 1, e o processo é determinístico e sempre executável enquanto houver alguma lâmpada apagada (isto é, enquanto o número for menor que 2047). Logo o número de segundos é

$$2047 - 50 = 1997.$$

Observação. A técnica — *codificar o estado num número e mostrar que a jogada é uma operação aritmética* — é a mesma que resolve a Torre de Hanói (contador binário) e o jogo Nim (soma *ou-exclusivo* em binário).

Resposta: 1997.

— **Questão 5.88** $n!$ termina em exatamente 6 zeros: $v_5(n!) = 6$ dá $25 \le n \le 29$. O algarismo anterior aos zeros de 27! é 8:

$$27! = 10\,888\,869\,450\,418\,352\,160\,768\,000\,000.$$

Logo $n = 27$, de soma 9.

Resposta: 9.

— **Questão 5.89** Por Legendre, $v_5(105!) = 21 + 4 = 25$, e a contagem fica em 25 para $n = 105, \ldots, 109$, saltando para 26 em $n = 110$ (e de 24 vinha direto de 104: $v_5(104!) = 24$).

Resposta: 5 valores.

— **Questão 5.90** Retirando os pares $2 \cdot 5$ e multiplicando os fatores restantes módulo 10 (conta curta módulo 10 com os fatores livres de 2 e 5), obtém-se 8.

Resposta: 8.

— **Questão 5.91** $12^{12} = 2^{24}3^{12}$: precisamos de $v_2(N!) \ge 24$ e $v_3(N!) \ge 12$. Como $v_3(27!) = 13$ mas $v_2(27!) = 23$, o menor é $N = 28$ ($v_2 = 25$). Soma: 10.

Resposta: 10.

— **Questão 5.92** $XY \ge 10^{10} \cdot 10^{k-1} = 10^{k+9}$, logo XY tem pelo menos $k+10$ algarismos: $k + 10 \le 24$ dá $k \le 14$ — e $k = 14$ é atingível ($10^{10} \cdot 10^{13} = 10^{23}$).

Resposta: $k = 14$.

— **Questão 5.93** $3^{m-1} \le n < 3^m$ e $2^m \le n < 2^{m+1}$ exigem $3^{m-1} < 2^{m+1}$, isto é, $(3/2)^{m-1} < 4$: $m \le 4$. E $m = 4$ ocorre: $n = 27 = (1000)_3$ tem 4 algarismos ternários e $27 = (11011)_2$ tem 5 binários.

Resposta: $m = 4$.

— **Questão 5.94** Números feitos de algarismos repetidos são múltiplos de *repunits*, e repunits têm fórmula fechada. O caminho seguro é: escrever o produto em fórmula, adivinhar o padrão olhando os casos pequenos, e então *provar* o padrão pela fórmula.

Fórmula. Seja $k = 2003$ e $R = \underbrace{1\cdots1}_{k} = \frac{10^k-1}{9}$. Então $a = 3R$, $b = 6R$ e

$$ab = 18R^2 = \frac{18\,(10^k-1)^2}{81} = \frac{2\,(10^k-1)^2}{9} = \frac{2\left(10^{2k} - 2\cdot 10^k + 1\right)}{9}.$$

O padrão. Os casos pequenos são $33 \cdot 66 = 2178$, $333 \cdot 666 = 221\,778$, $3333 \cdot 6666 = 22\,217\,778$: sugerem

$$ab = \underbrace{2\cdots2}_{k-1}\,1\,\underbrace{7\cdots7}_{k-1}\,8.$$

Prova. Chamando $R' = \underbrace{1\cdots1}_{k-1} = \frac{10^{k-1}-1}{9}$, o número do lado direito vale

$$2R'\cdot 10^{k+1} + 10^k + 7R'\cdot 10 + 8 = \frac{2(10^{k-1}-1)10^{k+1} + 9\cdot 10^k + 70(10^{k-1}-1) + 72}{9},$$

cujo numerador é

$$2\cdot 10^{2k} - 20\cdot 10^{k} + 9\cdot 10^{k} + 7\cdot 10^{k} + 2 = 2\cdot 10^{2k} - 4\cdot 10^{k} + 2 = 2\big(10^{k}-1\big)^{2},$$

exatamente o numerador de ab ✓. O padrão está provado para todo $k \geq 1$.

Localizando o algarismo. Contando da direita para a esquerda: a posição 1 é o 8; as posições 2 a k são os $k-1$ algarismos 7; a posição $k+1$ é o 1 central. Com $k = 2003$, a posição $k+1 = 2004$ é justamente o 1.

Observação. O produto tem $2k = 4006$ algarismos, e o 1 ocupa exatamente a casa do meio — o número é "simétrico" na estrutura, com 2's à esquerda e 7's à direita ($2+7=9$, sinal de que ele vem de 10^{2k} menos algo).

Resposta: 1.

— **Questão 5.95** Zeros anulam produtos, então só contam os números com algarismos em $\{1,2,3\}$: os de exatamente k algarismos contribuem $(1+2+3)^k = 6^k$. Total: $6 + 36 + 216 + 1296 = 1554$.

Resposta: 1554.

— **Questão 5.96** Módulo 7, $2^3 \equiv 1$: agrupe os bits em trios da direita para a esquerda e some os valores dos trios. Das oito possibilidades para (A,B,C), apenas $(0,1,0)$ anula a soma módulo 7.

Resposta: $(0,1,0)$.

— **Questão 5.97** Entre os 2^{k-1} números de k algarismos binários, cada uma das $k-1$ posições após o 1 inicial é zero em metade deles: $(k-1)2^{k-2}$ zeros. Somando $k = 1,\ldots,8$ e acrescentando $z(256) = 8$: $\sum_{k=1}^{8}(k-1)2^{k-2} + 8 = 769 + 8 = 777$.

Resposta: 777.

— **Questão 5.98** Os algarismos d_i são os mesmos nas duas leituras — só mudam os pesos das casas. Escrevendo a condição, cada algarismo aparece multiplicado por $10^i - 2\cdot 7^i$, e esses coeficientes crescem tão depressa que limitam o número de algarismos.

A equação. Se $N = (d_k\cdots d_1 d_0)_7$, então $N = \sum d_i 7^i$ e a leitura decimal vale $\sum d_i 10^i$. A condição $\sum d_i 10^i = 2\sum d_i 7^i$ é

$$\sum_{i\geq 0} d_i\big(10^i - 2\cdot 7^i\big) = 0,$$

com coeficientes

i	0	1	2	3	4
$10^i - 2\cdot 7^i$	-1	-4	2	314	5198

No máximo três algarismos. As parcelas negativas somam, no melhor dos casos, $-1\cdot 6 - 4\cdot 6 = -30$; as parcelas positivas com $i = 2$ somam no máximo $2\cdot 6 = 12$. Se houvesse algum $d_i \geq 1$ com $i \geq 3$, o lado esquerdo seria pelo menos $314 - 30 = 284 > 0$ — e cresce ainda mais para $i \geq 4$. Logo $k \leq 2$.

Resolvendo com três algarismos. A equação fica

$$-d_0 - 4d_1 + 2d_2 = 0, \qquad \text{isto é,} \qquad 2d_2 = 4d_1 + d_0,$$

com $0 \le d_i \le 6$ e $d_2 \ge 1$.

Maximizando $N = 49d_2 + 7d_1 + d_0$. O peso de d_2 domina, então tome d_2 máximo: $d_2 = 6$, e daí $4d_1 + d_0 = 12$. As soluções com algarismos válidos são $(d_1, d_0) = (3, 0)$ e $(2, 4)$, que dão

$$N = (630)_7 = 294 + 21 + 0 = 315 \qquad \text{e} \qquad N = (624)_7 = 294 + 14 + 4 = 312.$$

O maior é 315; e nenhum N com $d_2 \le 5$ o supera, pois então $N \le 49{\cdot}5 + 7{\cdot}6 + 6 = 293 < 315$.

Conferindo: $315 = (630)_7$ e, lido como decimal, $630 = 2 \cdot 315$ ✓.

Resposta: 315.

— **Questão 5.99** Contar diretamente até 2003 é desconfortável porque 2003 não é uma potência de 2. O procedimento padrão: contar até $2047 = 2^{11} - 1$, onde os números se organizam por *quantidade de bits*, e depois descontar o excedente $2004, \ldots, 2047$ — que é um bloco pequeno e fácil de examinar.

Contando até 2047. Um número com exatamente d algarismos binários tem o primeiro bit igual a 1 e outros $d-1$ bits livres. Se j desses $d-1$ bits valem 1, o número tem $j+1$ uns e $d-1-j$ zeros; "mais uns que zeros" significa

$$j + 1 > d - 1 - j \iff 2j > d - 2 \iff j \ge \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil.$$

Pondo $m = d - 1$ (o número de bits livres), a quantidade de números de d bits que servem é

$$C_m = \sum_{j \ge \lceil m/2 \rceil} \binom{m}{j} = \begin{cases} 2^{m-1}, & m \text{ ímpar}, \\ \dfrac{2^m + \binom{m}{m/2}}{2}, & m \text{ par}, \end{cases}$$

pela simetria $\binom{m}{j} = \binom{m}{m-j}$ (para m par, a parcela central $\binom{m}{m/2}$ é contada e precisa ser somada à parte). Para $m = 0, 1, \ldots, 10$:

$$1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 11,\ 16,\ 42,\ 64,\ 163,\ 256,\ 638,$$

cuja soma é

$$1 + 1 + 3 + 4 + 11 + 16 + 42 + 64 + 163 + 256 + 638 = 1199.$$

Descontando 2004 *a* 2047. São $2048 - 2004 = 44$ números, todos de 11 bits. Como $2004 = (11111010100)_2$ e $2047 = (11111111111)_2$, todos eles começam por 11111 — cinco uns nos cinco bits mais significativos. Restam 6 bits, e o número tem pelo menos 5 uns e no máximo 6 zeros; para não ter "mais uns que zeros" seria preciso #uns $\le$ #zeros, isto é, #uns ≤ 5, o que obrigaria os seis últimos bits a serem todos 0 — mas $(11111000000)_2 = 1984 < 2004$. Logo os 44 números têm todos mais uns que zeros.

Conclusão.

$$1199 - 44 = 1155.$$

Resposta: 1155.

— **Questão 5.100** Os dois números têm a mesma soma de algarismos; pela Proposição 5.11, cada um deixa, na divisão por 9, o mesmo resto que essa soma.

Resposta: Demonstrado.

— **Questão 5.101** Considere os $n+1$ repunits $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ e os seus restos na divisão por n: são $n+1$ restos em $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pela casa dos pombos, dois coincidem: R_i e R_j, $i < j$, deixam o mesmo resto. A diferença $R_j - R_i = \underbrace{1\cdots1}_{j-i}\underbrace{0\cdots0}_{i}$ é então múltiplo de n e usa apenas os algarismos 0 e 1.

Resposta: Demonstrado.

— **Questão 5.102** Na divisão longa de 1 por 5 na base 2, os restos são as potências de 2 módulo 5: $2, 4, 3, 1, 2, 4, \ldots$ — ciclo de comprimento 4, pois 4 é o menor expoente com $2^4 \equiv 1 \pmod 5$. O período da dízima é exatamente esse ciclo (é a *ordem* de 2 módulo 5, conceito do Capítulo 14).

Resposta: O período é a ordem de 2 módulo 5, que é 4.

— **Questão 5.103** Pela Proposição 5.11, cada passagem ao "soma dos algarismos" preserva o resto na divisão por 9. O resto de 4444 é 7, e os restos das potências de 7 por 9 ciclam $7, 4, 1, 7, 4, 1, \ldots$; como $4444 = 3 \cdot 1481 + 1$, o resto de 4444^{4444} é 7. Cotas: $4444^{4444} < \left(10^4\right)^{4444} = 10^{17776}$, logo o número tem no máximo 17776 algarismos e $A \le 9 \cdot 17776 = 159\,984$; então A tem no máximo 6 algarismos e $B \le 54$; por fim, a soma dos algarismos de B é no máximo $s(49) = 13$. O único inteiro positivo ≤ 13 com resto 7 por 9 é o próprio 7.

Resposta: 7.

— **Questão 5.104** Pela Proposição 5.11, n, $s(n)$ e $s(s(n))$ deixam o mesmo resto r na divisão por 9; a soma dos três deixa o resto de $3r$, que pertence a $\{0, 3, 6\}$ (múltiplos de 3). Mas o resto de 2026 por 9 é $s(2026) = 10 \to 1$. Como $1 \notin \{0, 3, 6\}$, não há solução.

Resposta: Demonstrado: não existe.

— **Questão 5.105** O primeiro algarismo é 2; para os algarismos crescerem, o segundo deve ser maior que 2 — e, para não passar de 2400, só pode ser 3. Restam dois algarismos $c < d$ escolhidos em $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$: $\binom{6}{2} = 15$ números, de 2345 a 2389.

Resposta: 15 — alternativa **(C)**.

— **Questão 5.106** A partir de 10!!, todo fatorial duplo contém os fatores 2 e 10 — logo termina em 0 e não afeta as unidades. Sobram $2!! = 2$, $4!! = 8$, $6!! = 48$ e $8!! = 384$: as unidades somam $2 + 8 + 8 + 4 = 22$, que termina em 2.

Resposta: 2 — alternativa **(B)**.

— **Questão 5.107** Cada parcela é $10^k - 1$, logo

$$N = \sum_{k=1}^{321} (10^k - 1) = \underbrace{11\ldots1}_{321}0 - 321.$$

A subtração só mexe nos últimos algarismos: $\ldots11110 - 321 = \ldots10789$ — restam 318 uns seguidos de 0789. Soma dos algarismos: $318+0+7+8+9 = 342$.

Resposta: 342.

— **Questão 5.108** A soma dos dez algarismos $0, 1, \ldots, 9$ é 45, múltiplo de 9; escolher oito algarismos com soma múltipla de 9 equivale a *descartar* dois cuja soma seja múltipla de 9: $\{0,9\}$, $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ ou $\{4,5\}$. Descartando $\{0,9\}$, os algarismos $1, \ldots, 8$ dão $8! = 40320$ números. Nos outros quatro casos o 0 está presente e não pode liderar: $8!-7! = 35280$ cada. Total: $40320+4\cdot35280 = 181\,440$.

Resposta: 181 440.

— **Questão 5.109** "Sem nenhum vai um" quer dizer que, ao armar a soma $n + (n+1)$, cada coluna soma menos de 10. Como n e $n+1$ diferem só nas casas finais (as que sofrem o "vai um" da própria adição de 1), convém separar os casos pelo número de noves com que n termina — em cada caso as colunas ficam explícitas.

O par é $\{n, n+1\}$ com $1000 \le n \le 1999$ (assim ambos estão no conjunto), e $n = \overline{1abc}$.

Caso 1: $c \neq 9$. Então $n+1 = \overline{1ab(c+1)}$ e as colunas, da direita para a esquerda, somam

$$c + (c+1) = 2c+1, \quad b + b = 2b, \quad a + a = 2a, \quad 1 + 1 = 2.$$

Não haver transporte exige $2c+1 \le 9$, $2b \le 9$ e $2a \le 9$, isto é, $a, b, c \le 4$. São $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números (e $c \le 4$ já garante $c \neq 9$).

Caso 2: $c = 9$ *e* $b \neq 9$. Então $n = \overline{1ab9}$ e $n+1 = \overline{1a(b+1)0}$; as colunas somam

$$9 + 0 = 9, \quad b + (b+1) = 2b+1, \quad 2a, \quad 2.$$

Exige-se $b \le 4$ e $a \le 4$: $5 \cdot 5 = 25$ números.

Caso 3: $b = c = 9$ *e* $a \neq 9$. Aqui $n = \overline{1a99}$ e $n+1 = \overline{1(a+1)00}$; as colunas somam 9, 9, $a + (a+1) = 2a+1$ e 2. Exige-se $a \le 4$: 5 números.

Caso 4: $a = b = c = 9$. É $n = 1999$ e $n+1 = 2000$; as colunas somam 9, 9, 9 e $1+2 = 3$: nenhum transporte. 1 número.

Total. Os quatro casos são disjuntos e cobrem todos os n:

$$125 + 25 + 5 + 1 = 156.$$

Observação. O caso 4 é o que costuma escapar — e ele existe precisamente porque 2000 pertence ao conjunto. A técnica geral é sempre a mesma: "sem transporte" é uma condição *casa a casa*, então classifique pelos padrões finais que a adição de 1 produz.

Resposta: 156 pares.

— **Questão 5.110** Tirar o último algarismo é dividir por 7; pôr um algarismo na frente é somar uma potência de 7. Escrevendo as duas operações, a condição vira uma congruência num expoente — e aí é a ordem de 7 que decide.

Montando a equação. Seja n o número de algarismos e escreva $N = 7m + 3$, onde m é o que sobra ao apagar o 3 final. Levando o 3 para a frente,

$$M = 3 \cdot 7^{n-1} + m.$$

A condição $M = \frac{4}{5}N$ é $5M = 4N$, isto é,

$$15 \cdot 7^{n-1} + 5m = 28m + 12 \qquad \Longrightarrow \qquad 23\,m = 15 \cdot 7^{n-1} - 12.$$

A congruência. Para que m seja inteiro é preciso $15 \cdot 7^{n-1} \equiv 12 \pmod{23}$. Como $15 \cdot 20 = 300 = 13 \cdot 23 + 1$, o inverso de 15 módulo 23 é 20, e a condição vira

$$7^{n-1} \equiv 12 \cdot 20 = 240 \equiv 10 \pmod{23}.$$

A ordem resolve. Módulo 23, as potências de 7 dão $7^{11} \equiv -1$, logo a ordem de 7 é 22 — o máximo possível. Percorrendo a lista, $7^{21} \equiv 10$. Então $n - 1 \equiv 21 \pmod{22}$, isto é, n é múltiplo de 22. Com menos de 40 algarismos, só resta $n = 22$.

O número. Com $n = 22$, $m = \dfrac{15 \cdot 7^{21} - 12}{23}$ e $N = 7m + 3$:

$$N = (4364604155323020625113)_7 = 2\,549\,883\,292\,554\,122\,640.$$

Conferindo, $(3436460415532302062511)_7$ é mesmo $\frac{4}{5}$ de N.

Resposta: $N = (4364604155323020625113)_7$.

— **Questão 5.111** Em qualquer base, acrescentar um zero à direita multiplica o número pela base; e acrescentar um algarismo 1 à esquerda soma a potência da base correspondente à nova casa. Vale usar isso em vez de converter tudo à mão.

Primeiro, $N = (1101)_2 = 8 + 4 + 1 = 13$.

O número M. Acrescentar 0 à direita, na base 2, dobra:

$$M = (11010)_2 = 2N = 26.$$

O número P. A representação de N tem quatro algarismos, de modo que o 1 acrescentado à esquerda ocupa a casa de 2^4:

$$P = (11101)_2 = 2^4 + N = 16 + 13 = 29.$$

Logo $M + P = 26 + 29 = 55$.

Resposta: (A) 55.

— **Questão 5.112** As casas pares são $2, 4, 6, \ldots, 2026$. Em vez de contá-las todas de uma vez, separe por quantidade de algarismos — é sempre assim que esses problemas se resolvem.

de 2 a 8 (1 algarismo) :	4 casas	$4 \cdot 1 = 4$
de 10 a 98 (2 algarismos) :	45 casas	$45 \cdot 2 = 90$
de 100 a 998 (3 algarismos) :	450 casas	$450 \cdot 3 = 1350$
de 1000 a 2026 (4 algarismos) :	514 casas	$514 \cdot 4 = 2056$

Em cada faixa, a quantidade de pares é a metade da quantidade de inteiros: de 100 a 999 há 900 inteiros e 450 pares; de 1000 a 2026 há 1027 inteiros, dos quais 514 são pares (as pontas 1000 e 2026 são ambas pares).

Somando: $4 + 90 + 1350 + 2056 = 3500$.

Resposta: 3500 algarismos.

— **Questão 5.113** Emparelhe as casas: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\ldots$, $(2025, 2026)$ — são 1013 pares — e sobra a casa 2027, sem par, porque há 1014 ímpares contra 1013 pares.

Dentro de um par $(2k - 1,\ 2k)$ os dois números têm a mesma quantidade de algarismos, *exceto* quando $2k$ estreia uma faixa nova, isto é, quando $2k$ é potência de 10. Isso acontece em $(9, 10)$, $(99, 100)$ e $(999, 1000)$: nesses três pares o ímpar gasta um algarismo a menos. O saldo dos pares é, portanto, -3 para o lado ímpar.

Falta a casa 2027, que o lado ímpar tem de sobra e que gasta 4 algarismos. O saldo final é

$$-3 + 4 = +1.$$

Para ter os números absolutos: o lado par gasta 3500, logo o ímpar gasta 3501, e os dois juntos 7001 — que é o total de algarismos para numerar de 1 a 2027.

Resposta: O lado ímpar, por 1 algarismo (3501 contra 3500).

— **Questão 5.114** Conte por *casa decimal*, não por número: pergunte, para cada uma das quatro casas, em quantos números daquela lista ela é ocupada por um 8. Somando as quatro respostas, cada algarismo 8 escrito é contado exatamente uma vez.

Escreva os inteiros de 0 a 8888 com quatro casas, completando com zeros à esquerda (0007, 0083, $\ldots$). Os zeros acrescentados não são oitos, de modo que a contagem não muda, e o 0 incluído não contribui. Note que o limite 8888 tem o algarismo 8 em todas as casas — é o que faz as quatro contas saírem iguais.

Unidades. Queremos $\overline{abc8} \le 8888$, o que equivale a $\overline{abc} \le 888$: são 889 números.

Dezenas. Queremos $\overline{ab8d} \le 8888$. Se $\overline{ab} \le 87$, o número já é menor e d é livre: $88 \cdot 10 = 880$. Se $\overline{ab} = 88$, sobra $888d \le 8888$, isto é, $d \le 8$: mais 9. Total $880 + 9 = 889$.

Centenas. Queremos $\overline{a8cd} \le 8888$. Se $a \le 7$, então $\overline{cd}$ é livre: $8 \cdot 100 = 800$. Se $a = 8$, sobra $\overline{88cd} \le 8888$, isto é, $\overline{cd} \le 88$: mais 89. Total $800 + 89 = 889$.

Milhares. Queremos $\overline{8bcd} \le 8888$, o que equivale a $\overline{bcd} \le 888$: são 889.

As quatro casas dão o mesmo: $4 \cdot 889 = 3556$.

Resposta: 3556 algarismos 8.

— **Questão 5.115** Desconte faixa por faixa, do começo:

$$\begin{aligned} &\text{casas 1–9 :} && 9 \\ &\text{casas 10–99 :} && 180 \\ &\text{casas 100–999 :} && 2700 \end{aligned}$$

Até a casa 999 gastaram-se $9 + 180 + 2700 = 2889$ algarismos. Sobram

$$7001 - 2889 = 4112$$

algarismos para casas de quatro algarismos, e $4112 = 4 \cdot 1028$: são 1028 casas, de 1000 a $1000 + 1028 - 1 = 2027$.

Resposta: 2027 casas.

— **Questão 5.116** Os inteiros com exatamente k algarismos são os de 10^{k-1} a $10^k - 1$, e há

$$(10^k - 1) - 10^{k-1} + 1 = 10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}$$

deles. Cada um gasta k algarismos, de modo que a faixa contribui com $9 \cdot 10^{k-1} \cdot k$. Como as faixas $k = 1, 2, \ldots, n$ cobrem exatamente os números de 1 a $10^n - 1$ sem repetição, o total é a soma anunciada.

Para $n = 6$:

$$9 + 180 + 2700 + 36\,000 + 450\,000 + 5\,400\,000 = 5\,888\,889.$$

O padrão 5 888 889, 488 889, 38 889, 2889, 189, 9 é útil de reconhecer: quase todo o custo está na última faixa.

Resposta: 5 888 889 algarismos.

— **Questão 5.117** Contar quem *tem* um 7 é desconfortável, porque um número pode ter mais de um. Conte quem *não* tem.

De 0 *a* 1999. Escreva com quatro casas, de 0000 a 1999. O algarismo dos milhares é 0 ou 1 — duas escolhas, nenhuma delas 7 — e cada uma das outras três casas aceita 9 algarismos (todos menos o 7). São $2 \cdot 9^3 = 1458$ números sem o algarismo 7.

De 2000 *a* 2027. Os milhares (2) e as centenas (0) nunca são 7. Restam as dezenas e as unidades:

- dezenas 0: de 2000 a 2009, fora 2007 — 9 números;
- dezenas 1: de 2010 a 2019, fora 2017 — 9 números;
- dezenas 2: de 2020 a 2027, fora 2027 — 7 números.

São $9 + 9 + 7 = 25$.

Ao todo, $1458 + 25 = 1483$ números de 0 a 2027 não têm o algarismo 7; tirando o 0, que não está na lista, sobram 1482. Logo os que têm pelo menos um 7 são

$$2027 - 1482 = 545.$$

Resposta: 545 números.

— **Questão 5.118** Vá descontando as faixas:

posições 1–9 : os nove números de um algarismo; posições 10–189 : de 10 a 99.

Depois da posição 189 começam os números de três algarismos. Faltam

$$2027 - 189 = 1838$$

posições, e $1838 = 3 \cdot 612 + 2$: cabem 612 números de três algarismos completos — de 100 a $100 + 612 - 1 = 711$ — e ainda sobram 2 posições, que são os dois primeiros algarismos de 712.

O segundo algarismo de 712 é 1.

Resposta: 1.

— **Questão 5.119** Escreva todos os inteiros de 0 a $10^n - 1$ com n casas, completando com zeros à esquerda. Isso não muda a soma dos algarismos — zero não soma nada — e inclui o 0, que também não soma nada.

Agora olhe uma casa fixa. Percorrendo os 10^n números, essa casa assume cada um dos dez algarismos o mesmo número de vezes, a saber $10^n/10 = 10^{n-1}$ vezes. Logo a casa contribui com

$$10^{n-1}\,(0+1+2+\cdots+9) = 45\cdot 10^{n-1}.$$

São n casas, todas com a mesma contribuição, e o total é $45\,n\,10^{n-1}$.

Confira com $n=2$: a soma dos algarismos de 1 a 99 é $45\cdot 2\cdot 10 = 900$.

Resposta: $45\,n\,10^{n-1}$.

— **Questão 5.120** O zero exige cuidado que os outros algarismos não exigem: ele não aparece como primeiro algarismo de nenhum número, de modo que o truque de completar com zeros à esquerda contaria zeros que ninguém escreveu. A saída é contar por casa, mas só nas casas que existem de fato.

Seja $N = 2\,222\,222$, que tem sete algarismos. Fixe uma casa, a j-ésima a contar da direita ($j=1$ para as unidades), com $1 \le j \le 6$ — a sétima casa é a mais alta e nunca é 0. Um número $\le N$ com 0 nessa casa se escreve como

$$\underbrace{A}_{\text{parte alta}}\ 0\ \underbrace{B}_{j-1\text{ casas}},$$

onde A é o que está à esquerda da casa e B o que está à direita.

Chame de $P_j = \lfloor N/10^j \rfloor$ a parte alta de N nessa casa. Como *todos* os algarismos de N valem 2 e $0 < 2$, basta que A não ultrapasse P_j para o número já ficar abaixo de N: a casa escolhida, valendo 0, resolve a comparação a nosso favor. Assim A percorre $1, 2, \ldots, P_j$ — não pode ser 0, senão o número teria menos casas — e B varia livremente entre 0 e $10^{j-1}-1$. A contagem na casa j é, portanto,

$$P_j \cdot 10^{j-1}.$$

Com $N = 2\,222\,222$:

$$\begin{array}{lll} j=1: & P_1 = 222\,222 & 222\,222\cdot 1 = 222\,222 \\ j=2: & P_2 = 22\,222 & 22\,222\cdot 10 = 222\,220 \\ j=3: & P_3 = 2\,222 & 2\,222\cdot 100 = 222\,200 \\ j=4: & P_4 = 222 & 222\cdot 1000 = 222\,000 \\ j=5: & P_5 = 22 & 22\cdot 10\,000 = 220\,000 \\ j=6: & P_6 = 2 & 2\cdot 100\,000 = 200\,000 \end{array}$$

Somando: $222\,222 + 222\,220 + 222\,200 + 222\,000 + 220\,000 + 200\,000 = 1\,308\,642$.

Resposta: 1 308 642 algarismos 0.

— **Questão 5.121** Os dois lados contam a mesma coisa de dois jeitos. Construa uma correspondência um a um.

De um zero para um número. Tome um número A entre 1 e $10^n - 1$ e um algarismo 0 qualquer dentro dele. Apague esse zero e junte o que sobra: o resultado M é um número com um algarismo a menos, e continua sem zero à esquerda — o primeiro algarismo de A não é 0 e não foi apagado. Guarde também a *posição* que o zero ocupava.

De volta. Dado M, com $k-1$ algarismos, e uma posição onde inserir um 0, recupera-se A. As posições possíveis são as que não deixam o zero na frente: logo após o primeiro algarismo de M, logo após o segundo, ..., logo após o último. São exatamente $k-1$ posições, isto é, *tantas quantas são os algarismos de M.*

As duas operações são inversas uma da outra, de modo que

$$\#\{\text{zeros de 1 a } 10^n - 1\} = \sum_{M=1}^{10^{n-1}-1} (\text{algarismos de } M),$$

que é precisamente o total de algarismos gastos ao numerar de 1 a $10^{n-1} - 1$.

Confira. De 1 a 999 escrevem-se 189 zeros; e numerar de 1 a 99 gasta $9 + 180 = 189$ algarismos. De 1 a 9999 são 2889 zeros, e numerar de 1 a 999 gasta 2889 algarismos.

Combinando com a fórmula da questão sobre $\sum 9 \cdot 10^{k-1}k$, o número de zeros de 1 a $10^n - 1$ é $\sum_{k=1}^{n-1} 9 \cdot 10^{k-1}k$.

Resposta: Demonstrado.