Dissecções de triângulos em triângulos
levantamento bibliográfico e frentes de contribuição

H. C. Silva Filho

Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais
Instituto de Matemática e Estatística — UERJ

Resumo. Este documento reúne e organiza a literatura acadêmica sobre dissecções de um triângulo em triângulos menores, tema catalogado no verbete *Triangle Dissection* do MathWorld. A revisão separa cinco frentes metodologicamente independentes — peças similares, peças congruentes, dissecções perfeitas, enumeração topológica e a aritmética algébrica das razões de semelhança — reconstrói a cronologia dos resultados centrais de 1940 a 2021, sistematiza sete problemas declaradamente em aberto e identifica os pontos em que o ferramental de certificação desenvolvido na linha de Grafos de Distância Unitária (rigidez de Laman, decisão em $\exists\mathbb{R}$, aritmética intervalar de Krawczyk, codificações SAT) se aplica sem adaptação substancial. Encerra com um protocolo operacional de contribuição junto ao curador do verbete.

Palavras-chave: dissecção de triângulos; ladrilhamento por triângulos similares; dissecção perfeita; enumeração combinatória; números de Pisot; rigidez.

Rio de Janeiro — 28 de agosto de 2026

Sumário

1 Introdução e delimitação do objeto 2

2 Metodologia da busca 3
2.1 Descritores . . . 3
2.2 Fontes consultadas . . . 3
2.3 Critérios de inclusão e exclusão . . . 3
2.4 Limitações . . . 3

3 Panorama histórico 3

4 Frente A — dissecções em triângulos semelhantes 4
4.1 Resultados centrais . . . 4
4.2 Leitura metodológica . . . 5

5 Frente B — dissecções em triângulos congruentes 5
5.1 O programa de Beeson . . . 5
5.2 Os dois teoremas de 2018 . . . 5

6 Frente C — dissecções perfeitas 5

7 Frente D — enumeração topológica 6
7.1 As duas sequências . . . 6
7.2 Estado real do catálogo . . . 6
7.3 Por que os termos param . . . 7

8 Frente E — restrições aritméticas 7
8.1 Triângulos inteiros . . . 7
8.2 A família auto-similar e os números de Pisot . . . 8
8.3 Catálogo por constante algébrica . . . 8
8.4 A equação de balanço de escala . . . 9
8.5 O que o catálogo revela sobre a família do verbete . . . 10
8.6 Triângulos racionais com um ângulo comum . . . 11

9 Problemas em aberto 12

10 Extensão a dimensão três: *reptiles* e *gentiles* 12
10.1 Vocabulário . . . 12
10.2 O que está provado . . . 13
10.3 Por que o caso planar não sobe . . . 13
10.4 Problemas em aberto na extensão . . . 13

11 Interfaces com a linha de certificação em GDU 14
11.1 Realizabilidade de partição topológica como problema em $\exists\mathbb{R}$ . . . 14
11.2 Rigidez e número de Laman como certificado de contagem . . . 14
11.3 Certificação intervalar das razões de semelhança . . . 14
11.4 Codificação SAT com quebra de simetria . . . 15

12 Protocolo de contribuição 15

13 Considerações finais 16

1 Introdução e delimitação do objeto

Definição 1.1 (Dissecção)**.** Uma *dissecção* de um triângulo ABC é uma família finita $\{T_1, \ldots, T_n\}$ de triângulos com interiores dois a dois disjuntos cuja união é ABC. O inteiro n é a *ordem* da dissecção.

A definição é deliberadamente permissiva: não se exige que os vértices de uma peça caiam sobre vértices das peças vizinhas. Uma dissecção em que todo vértice de peça é vértice de todas as peças que o contêm é dita *própria* ou *edge-to-edge*; caso contrário há pelo menos um *ponto em* T, e é exatamente essa liberdade que torna o problema difícil, tanto do ponto de vista combinatório quanto algébrico.

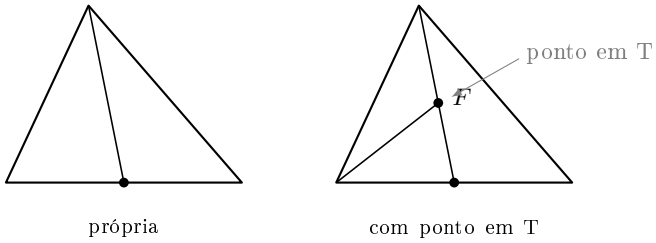


Figura 1: Dissecção própria (esquerda) e dissecção com ponto em T (direita). À direita, F é interior ao lado de uma das peças e vértice de outras duas; é essa liberdade que impede tratar a dissecção como um complexo simplicial.

O que a literatura chama genericamente de "dissecção de triângulos" são, na verdade, cinco problemas distintos, obtidos ao impor restrições diferentes sobre a família $\{T_i\}$:

(A) **Peças similares.** Todas as T_i são semelhantes entre si (escala livre, orientação livre). Regime algébrico: as condições de fechamento angular geram equações sobre corpos ciclotômicos.

(B) **Peças congruentes.** Todas as T_i são congruentes a um mesmo ladrilho T (N-tilings). Regime aritmético: teoria de corpos e teoria algébrica dos números.

(C) **Dissecções perfeitas.** As T_i são duas a duas não congruentes. Regime elétrico-combinatório, herdeiro de Brooks–Smith–Stone–Tutte.

(D) **Enumeração topológica.** Ignora-se a métrica; contam-se classes de padrões de incidência. Regime puramente combinatório-computacional.

(E) **Restrições aritméticas sobre medidas.** Lados e cevianas inteiros; ou razões de semelhança prescritas por raízes de polinômios (números de Pisot). Regime de teoria dos números.

Este levantamento cobre as cinco frentes, mas registra desde já que elas têm graus de maturidade muito diferentes: (A) e (B) são áreas com programa de pesquisa estruturado e artigos em periódicos de primeira linha; (C) tem literatura clássica consolidada e atividade computacional recente; (D) e (E) vivem majoritariamente em catálogos, sequências do OEIS e páginas de divulgação, com pouquíssima formalização — e é precisamente aí que há espaço para contribuição original de baixo custo de entrada.

2 Metodologia da busca

2.1 Descritores

A busca foi conduzida com os seguintes descritores, em inglês, isolados e em combinação: *triangle dissection*; *dissection of a triangle into triangles*; *tiling a triangle with similar triangles*; *tilings of polygons with similar triangles*; *congruent triangle tiling*; *N-tiling*; *perfect dissection*; *triangle partition*; *integer triangle dissection*; *prime triangle partition.*

2.2 Fontes consultadas

- **Repositórios de preprints:** arXiv (categorias math.CO, math.MG, math.NT).
- **Periódicos:** *Discrete & Computational Geometry*, *Discrete Mathematics*, *Discrete Applied Mathematics*, *Combinatorica*, *Journal of Combinatorial Theory Series B*, *Australasian Journal of Combinatorics*, *The American Mathematical Monthly*, *The College Mathematics Journal*, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *Duke Mathematical Journal.*
- **Bases estruturadas:** On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), sequências A053740 e A056814.
- **Fontes de catalogação e divulgação especializada:** MathWorld (verbete *Triangle Dissection*); mathpuzzle.com (páginas de E. Pegg Jr.); squaring.net (seção *Tiling by Similar Triangles*); Wolfram Blog; páginas de M. Vichera.
- **Páginas pessoais de autores:** michaelbeeson.com (série *Triangle Tiling*).

2.3 Critérios de inclusão e exclusão

Foram incluídos: (i) artigos em periódicos revisados por pares cujo objeto central seja dissecção ou ladrilhamento de polígonos por triângulos; (ii) preprints do arXiv com prova completa; (iii) catálogos computacionais e sequências do OEIS quando constituem o único registro do estado da arte de um subproblema.

Foram excluídos: resultados sobre ladrilhamento do plano por triângulos (tema distinto, com literatura própria); dissecções por peças não triangulares; e problemas de *equidecomposição* no sentido de Wallace–Bolyai–Gerwien, que não impõem que as peças sejam triângulos e não pertencem a esta linha.

2.4 Limitações

- A cobertura temporal se encerra em agosto de 2026.
- Parte substancial do conhecimento das frentes (D) e (E) não está publicada em periódicos; está em catálogos pessoais e comentários de sequências do OEIS. Onde isso ocorre, o documento registra explicitamente a natureza da fonte.
- Não foi feita busca sistemática em literatura não indexada em inglês.
- Os valores das sequências do OEIS refletem o estado das páginas na data de consulta.

3 Panorama histórico

O tema nasce fora dele. Em 1940 Brooks, Smith, Stone e Tutte [1] resolvem a dissecção de retângulos em quadrados traduzindo a configuração numa rede elétrica: as larguras dos

quadrados viram correntes, as alturas viram diferenças de potencial, e as leis de Kirchhoff produzem o sistema linear cuja solução é a dissecção. O método é o ancestral direto de tudo o que se fez depois em dissecções perfeitas.

Oito anos mais tarde Tutte [2] transporta a técnica para o triângulo equilátero e obtém o primeiro teorema de não-existência da área: um triângulo equilátero não se disseca em triângulos equiláteros dois a dois de tamanhos distintos, se todos apontam para o mesmo lado. Com orientações mistas a obstrução desaparece, e é essa versão que gera a dissecção clássica de ordem 15.

Em 1961, Hoggatt e Denman [3] estabelecem o resultado elementar que abre o verbete do MathWorld: todo triângulo obtusângulo se divide em oito triângulos acutângulos isósceles. É o tipo de resultado construtivo, sem obstrução algébrica, que caracteriza a fase pré-1990 da área.

A virada metodológica é de Laczkovich. Em 1990 [4], ao estudar quais triângulos ladrilham o quadrado por cópias semelhantes, ele introduz o argumento que passa a organizar toda a frente (A): as relações angulares numa dissecção forçam identidades entre raízes da unidade, e a classificação vira um problema sobre corpos ciclotômicos. O resultado é drasticamente restritivo — fora dos triângulos retângulos, apenas três formas sobrevivem.

Em 1995 [5] o mesmo aparato produz o teorema que o MathWorld destaca: toda dissecção de um triângulo equilátero em triângulos semelhantes entre si contém uma peça com ângulo de $60°$ ou $120°$.

No ano 2000, Sloane cadastra no OEIS as sequências A056814 e A053740, a partir dos catálogos de Pegg e de Vichera. Ambas recebem a etiqueta `hard`; ambas permanecem, vinte e seis anos depois, com o mesmo número de termos.

A década de 2000 consolida a frente (C): Skinner, Smith e Tutte [7] estendem o método elétrico a triângulos retângulos isósceles; Żak [8] aprofunda o caso em que o polígono dissecado é ele próprio um triângulo; e em 2009 [9] fixa em sete o número mínimo de peças não-retângulas de uma dissecção perfeita do equilátero. Em 2010, Drápal e Hämäläinen [10] fazem a enumeração computacional exaustiva e provam que a dissecção de Tutte, de ordem 15, é de ordem mínima.

A partir de 2012, Michael Beeson organiza sozinho a frente (B) numa série de cinco artigos [11, 12, 13, 14], e a leva a dois teoremas isolados de forte apelo em 2018: nenhum triângulo pode ser cortado em sete triângulos congruentes [15], e num triângulo equilátero, para $N > 3$, o número N de peças congruentes não pode ser primo [16].

Finalmente, em 2021, Laczkovich [18] fecha o caso dos polígonos regulares: para $N > 10$, um triângulo só ladrilha irregularmente o N-gono regular se seus ângulos forem múltiplos racionais de π; e para $N > 42$, no máximo três triângulos não semelhantes entre si o fazem.

4 Frente A — dissecções em triângulos semelhantes

4.1 Resultados centrais

Teorema 4.1 (Laczkovich, 1990 [4])**.** *Se um triângulo T ladrilha o quadrado por cópias semelhantes a T, então T é retângulo ou T é semelhante a um de três triângulos excepcionais explicitamente determinados.*

Teorema 4.2 (Laczkovich, 1995 [5])**.** *Toda dissecção de um triângulo equilátero em triângulos semelhantes entre si possui uma peça cujo conjunto de ângulos contém $60°$ ou $120°$.*

Teorema 4.3 (Laczkovich, 2021 [18])**.** *Seja $N > 10$. Se um triângulo T ladrilha o N-gono regular de modo irregular, então todos os ângulos de T são múltiplos racionais de π. Consequentemente, para $N > 42$, existem no máximo três triângulos dois a dois não semelhantes que ladrilham irregularmente o N-gono regular.*

4.2 Leitura metodológica

O motor comum é a *álgebra dos ângulos*. Numa dissecção, em torno de cada ponto interior os ângulos das peças somam 2π; sobre cada lado, somam π. Escrevendo os ângulos das peças como combinações inteiras dos ângulos α, β, γ do ladrilho, obtém-se um sistema linear diofantino cuja compatibilidade com a geometria força relações multiplicativas entre $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$. Quando esses números são raízes da unidade, a classificação recai sobre relações de anulamento em corpos ciclotômicos — terreno em que se dispõe de teoremas de estrutura fortes. Quando não são, a análise migra para argumentos de independência linear sobre $\mathbb{Q}$ e valorizações.

Observação. Essa arquitetura é a mesma que sustenta os resultados de dimensão euclidiana em grafos de distância unitária: um sistema de restrições métricas cuja solubilidade se decide por um argumento algébrico sobre o corpo gerado pelas coordenadas. A transferência de técnica nos dois sentidos é natural e, até onde a busca alcançou, não explorada.

5 Frente B — dissecções em triângulos congruentes

5.1 O programa de Beeson

Dado um triângulo ABC e um ladrilho T, pergunta-se para quais N existe uma dissecção de ABC em N cópias congruentes de T (um *N-tiling*). Os "ladrilhamentos triviais" são conhecidos há muito: $N = n^2$ (subdivisão baricêntrica iterada), $N = 3n^2$ e $N = 2n^2$ em casos particulares. A questão é se existem outros.

A série de Beeson organiza a resposta por casos:

Artigo	Caso tratado
Triangle Tiling I [11]	T semelhante a ABC, ou T retângulo.
Triangle Tiling II [12]	Teoremas de não-existência; método de álgebra linear sobre corpos e teoria algébrica dos números.
Triangle Tiling III [13]	Ladrilhamentos triquadráticos: $3\alpha + 2\beta = \pi$ (ou simétrico), com α não múltiplo racional de π.
Triangle Tiling IV	Ladrilho com ângulo $2\pi/3$ e não isósceles.
Triangle Tiling V [14]	Ladrilhos com lados inteiros.

5.2 Os dois teoremas de 2018

Teorema 5.1 (Beeson, 2018 [15])**.** *Nenhum triângulo pode ser cortado em sete triângulos congruentes.*

Teorema 5.2 (Beeson, 2018 [16])**.** *Se um triângulo equilátero admite dissecção em N cópias congruentes de um ladrilho T com $N > 3$, então N não é primo.*

O segundo é notável por ser um enunciado aritmético puro obtido de uma restrição geométrica — o tipo de resultado que sugere que a fronteira da área está em teoria dos números, e não em construção de exemplos.

6 Frente C — dissecções perfeitas

Definição 6.1. Uma dissecção é *perfeita* quando suas peças são duas a duas não congruentes.

Teorema 6.2 (Tutte, 1948 [2])**.** *Um triângulo equilátero não admite dissecção em triângulos equiláteros dois a dois de tamanhos distintos, todos com a mesma orientação.*

Teorema 6.3 (Żak, 2009 [9]). *Uma dissecção perfeita de um triângulo equilátero em triângulos não-retângulos requer pelo menos sete peças.*

Teorema 6.4 (Drápal e Hämäläinen, 2010 [10]). *A dissecção clássica de Tutte, de ordem 15, é de ordem mínima entre as dissecções perfeitas do triângulo equilátero com orientações mistas; a enumeração computacional que estabelece o fato é exaustiva na faixa considerada.*

O interesse metodológico dessa frente, para os propósitos deste levantamento, está menos nos enunciados do que na natureza da prova de [10]: é uma *enumeração exaustiva com certificado de completude*, exatamente o padrão de argumento que a frente (D) exige e ainda não possui.

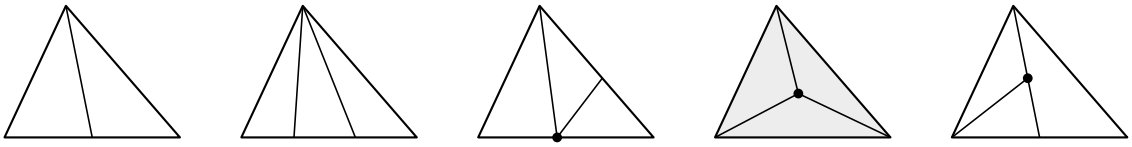
7 Frente D — enumeração topológica

7.1 As duas sequências

Ignorando a métrica e contando apenas classes de equivalência de padrões de incidência, obtêm-se duas sequências, ambas cadastradas no OEIS em setembro de 2000 e ambas com a etiqueta `hard`.

Sequência	Objeto contado	Termos conhecidos	Faixa
A056814	partições topologicamente distintas	1, 4, 23, 180, 1806, 20198	$n = 2, \ldots, 7$
A053740	partições *primas*	1, 1, 3, 8, 62, 535, 4213	ordem $2, \ldots, 8$

Definição 7.1. Uma partição de triângulo é *prima* se não contém, como subconfiguração própria, uma partição de ordem menor.



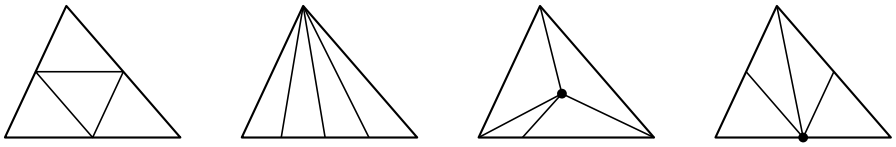
ordem 2 (1 tipo) (a) leque de vértice (b) leque de aresta (c) estrela *única prima* (d) ponto em T

Figura 2: Ordem 2 e ordem 3. À esquerda, a única partição de ordem 2. Em seguida, os quatro tipos topológicos de ordem 3 — valores 1 e 4 de A056814. Apenas a estrela é prima: em qualquer dos outros três, a remoção de um corte deixa uma partição de ordem 2 do mesmo triângulo, o que dá 1 e 1 em A053740.

7.2 Estado real do catálogo

Esta é a frente menos formalizada de todas. Os fatos relevantes, tal como registrados nas fontes primárias:

- O catálogo de partições *primas de ordem 6* é declarado provavelmente incompleto pelo próprio autor do catálogo, com a observação de que tais configurações são difíceis de encontrar [19].
- A lista de 181 configurações de ordem 5 atribuída a Roger Phillips não recebeu, até onde a busca alcançou, verificação independente publicada.
- As figuras que ilustram o verbete do MathWorld para as dissecções de 3, 4 e 5 peças provêm dessas listas.



(a) medial (b) 3 cevianas (c) estrela + ceviana (d) leque de aresta

Figura 3: Quatro dos 23 tipos topológicos de ordem 4. A subdivisão medial (a) é simultaneamente o ladrilhamento por 4 peças congruentes e por 4 peças semelhantes ao triângulo original — é o caso $N = n^2$ com $n = 2$ da frente (B). Não há na literatura revisada por pares o catálogo completo dos 23 tipos.

- Não há na literatura revisada por pares um algoritmo publicado, com prova de completude, para gerar as classes topológicas de ordem n.

7.3 Por que os termos param

A dificuldade não é conceitual, e sim de explosão combinatória associada à ausência de uma forma canônica: sem um invariante que distinga classes de isomorfismo de padrões de incidência, a enumeração ingênua gera duplicatas em profusão e a eliminação delas domina o custo. É o gargalo clássico que técnicas de *quebra de simetria* em codificações SAT/ILP foram desenhadas para resolver.

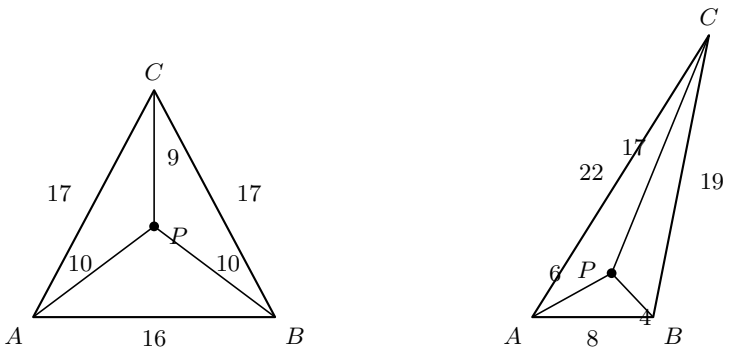
8 Frente E — restrições aritméticas

8.1 Triângulos inteiros

Considera-se um triângulo com lados inteiros, um ponto interior P, e exige-se que os três segmentos de P aos vértices também tenham comprimento inteiro. A condição de fechamento angular em torno de P conduz à equação

$$\cos\bigl(\arccos a + \arccos b + \arccos c\bigr) = 1,$$

cuja solução em racionais a, b, c é o problema aritmético subjacente [20]. O catálogo existente é experimental.



(a) $16, 17, 17$ — cevianas $10, 10, 9$ (b) $8, 19, 22$ — cevianas $6, 4, 17$ (perímetro 49)

Figura 4: Dois triângulos inteiros com ponto interior de cevianas inteiras, obtidos por busca exaustiva própria com $\max\{\text{lados}, \text{cevianas}\} \le 32$. As três peças têm, em ambos os casos, todos os lados inteiros. O caso (b) é o de menor perímetro do intervalo pesquisado.

8.2 A família auto-similar e os números de Pisot

Para cada inteiro positivo n, seja q_n a única raiz real positiva de

$$q^{2n+2} - q^{2n} - q^n - 1 = 0. \tag{1}$$

Existe então um triângulo, único a menos de semelhança, com lados proporcionais a $1,\ q_n^n,\ q_n^{n+1}$ e ângulo incluído de $120°$, tal que cópias dele com fatores de escala $1, q_n, \ldots, q_n^{2n}$ — com q_n^n e q_n^{2n} aparecendo duas vezes cada — formam uma dissecção do triângulo equilátero em $2n+3$ triângulos semelhantes.

Para n par, $n = 2k$, pondo $x_k = q_{2k}^2$, a equação (1) reduz-se a

$$P_k(x) = x^{2k+1} - x^{2k} - x^k - 1 = 0. \tag{2}$$

As raízes x_k são estritamente decrescentes, e apenas x_1, x_2 e x_3 são números de Pisot:

k	$P_k(x)$	Identificação de x_k
1	$x^3 - x^2 - x - 1$	constante de Tribonacci
2	$x^5 - x^4 - x^2 - 1$	θ_9
3	$(x^2+1)(x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1)$	θ_3

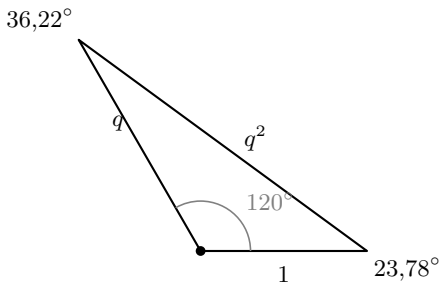


Figura 5: O ladrilho da família auto-similar no caso $n = 1$: lados 1, q e q^2 com $120°$ entre os dois primeiros, onde $q = q_1$ é a raiz positiva de $q^4 - q^2 - q - 1 = 0$. Cinco cópias dele, com escalas $1, q, q, q^2, q^2$, dissecam um triângulo equilátero ($2n + 3 = 5$ peças).

Observação. Verificação do caso $n = 1$: a raiz positiva de $q^4 - q^2 - q - 1 = 0$ é $q_1 = 1{,}465571\ldots$, e a relação $q^4 = q^2 + q + 1$ é exatamente a lei dos cossenos para o ângulo de $120°$ entre os lados 1 e q, o que confirma que o terceiro lado é q^2. A soma das áreas das cinco peças, com fatores de escala $1, q, q, q^2, q^2$, vale $\left(1 + 2q^2 + 2q^4\right)$ vezes a área do ladrilho, e o triângulo equilátero resultante tem lado $q^4 = q^{2n+2}$.

A conexão com números de Pisot não é acidental: são exatamente as constantes que sustentam ladrilhamentos por substituição, e a família acima é a instância triangular desse fenômeno.

8.3 Catálogo por constante algébrica

A família auto-similar da Seção 8.2 não é um caso isolado. Existe um catálogo de dissecções de um triângulo em triângulos semelhantes entre si organizado não pela ordem da dissecção, mas pela *constante algébrica* que governa a razão de semelhança do ladrilho. O que importa em cada entrada são três dados: a razão dos lados do ladrilho, o polinômio mínimo da constante que a define, e o número de peças da dissecção conhecida.

Caso	Razão dos lados	Polinômio mínimo	Peças
Triângulos retângulos	$a : b : \sqrt{a^2+b^2}$	—	2
Medianas	arbitrária	—	4
Simedianas	arbitrária	—	4
Trapézio arbitrário	arbitrária	—	6, 8
Cadeia arbitrária	arbitrária	—	6, 8
Pinwheel	$1 : 2 : \sqrt{5}$	—	5
Drafter 30–60–90	$1 : \sqrt{3} : 2$	—	3
Equithirds	$1 : 1 : \sqrt{3}$	—	5
$\sqrt{2}$	$1 : \sqrt{2} : 2$	—	6, 12
χ	$1 : \chi : \chi^{5/2}$	$x^4 - x - 1$	8
Plástico ρ	$1 : \rho : \rho^{3/2}$	$x^3 - x - 1$	8
Plástico ρ	$1 : \sqrt{\rho} : \rho^2$	$x^3 - x - 1$	6
Supergolden ψ	$1 : \psi : \psi^2$	$x^3 - x^2 - 1$	7
Supergolden ψ	$1 : \sqrt{\psi} : \psi^{3/2}$	$x^3 - x^2 - 1$	6
Áureo φ	$1 : \varphi : \varphi^{3/2}$	$x^2 - x - 1$	7
Tribonacci t	$1 : t : t^{3/2}$	$x^3 - x^2 - x - 1$	9, 10

Valores, com quinze casas:

$$\varphi = 1{,}618033988749895, \qquad \rho = 1{,}324717957244745, \qquad \psi = 1{,}465571231876768,$$

$$\chi = 1{,}220744084605760, \qquad t = 1{,}839286755214161.$$

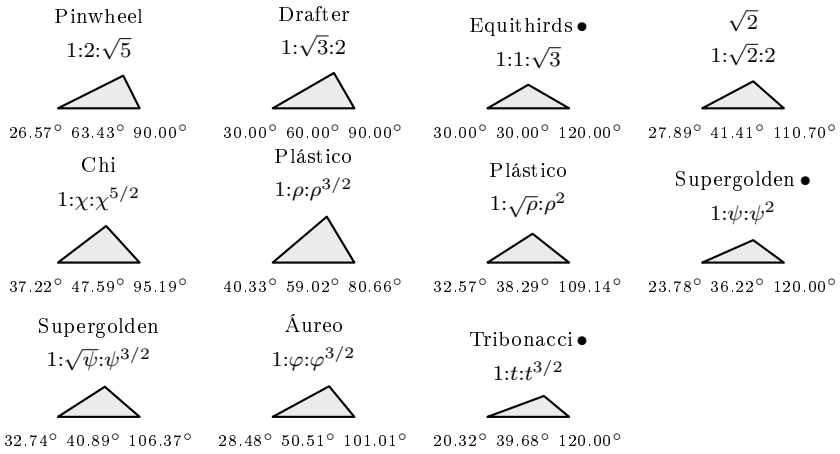


Figura 6: Ladrilhos do catálogo de dissecções em triângulos semelhantes, um por constante algébrica, desenhados em escala com o maior lado normalizado. Sob cada ladrilho, seus três ângulos. O marcador • assinala os três ladrilhos cujo maior ângulo é exatamente 120° (Proposição 8.4). Coordenadas geradas por `catalogo_constantes.py`.

8.4 A equação de balanço de escala

O catálogo acima não é uma lista de curiosidades: ele é *gerado* por uma única equação.

Proposição 8.1 (Balanço de escala)**.** *Se um objeto de dimensão d se disseca em peças semelhantes a ele próprio, com razões de semelhança $r_1, \ldots, r_n$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\,d} = 1.$$

A demonstração é a aditividade da medida d-dimensional: área em $d = 2$, volume em $d = 3$. O conteúdo está no que se obtém ao parametrizar as razões por potências de uma mesma constante. Pondo $r_i = q^{-a_i}$ com a_i inteiro positivo, e $y = q^d$, a equação torna-se

$$\sum_{i=1}^{n} y^{-a_i} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^A - \sum_{i=1}^{n} y^{A-a_i} = 0, \qquad A = \max_i a_i. \tag{3}$$

Observação (A dimensão desaparece). A equação (3) **não depende de** d. Só o multiconjunto de expoentes $\{a_i\}$ a determina. O que a dimensão decide é apenas como se extrai q a partir de y: no plano $q = \sqrt{y}$, no espaço $q = \sqrt[3]{y}$. Segue que as constantes algébricas de um catálogo tridimensional de dissecções em tetraedros semelhantes seriam *as mesmas* do catálogo planar — apenas comparecendo como raízes cúbicas em vez de quadráticas.

Enumerando os multiconjuntos pequenos em (3) e fatorando, recupera-se o catálogo inteiro. Todas as constantes da tabela da Seção 8.3 aparecem, cada uma com seu multiconjunto de expoentes mínimo:

Expoentes (a_i)	**Polinômio mínimo de** y	y	**Constante**
$(1, 2)$	$x^2 - x - 1$	1,618033988750	φ
$(1, 3)$	$x^3 - x^2 - 1$	1,465571231877	ψ
$(2, 2)$	$x^2 - 2$	1,414213562373	$\sqrt{2}$
$(2, 3)$	$x^3 - x - 1$	1,324717957245	ρ
$(3, 4)$	$x^4 - x - 1$	1,220744084606	χ
$(2, 2, 2)$	$x^2 - 3$	1,732050807569	$\sqrt{3}$
$(1, 2, 3)$	$x^3 - x^2 - x - 1$	1,839286755214	t

Nenhuma constante do catálogo fica de fora, e nenhuma constante estranha ao catálogo aparece entre os multiconjuntos de duas e três peças com $a_i \leq 5$. Os cálculos estão em `balanco_escala.py`.

Observação (Necessária, nunca suficiente). A Proposição 8.1 é uma condição de contagem. Ela produz a lista de candidatos, e não decide nenhum caso: nada nela garante que exista uma configuração geométrica realizando aquelas razões. Decidir a realizabilidade é, de novo, decidir a não-vacuidade de uma variedade semialgébrica real — a mesma pergunta em $\exists\mathbb{R}$ da Seção 11. A separação nítida entre a parte aritmética, que é fácil, e a parte geométrica, que é o problema, é o que organiza tanto o caso planar quanto a extensão tridimensional da Seção 10.

8.5 O que o catálogo revela sobre a família do verbete

O confronto do catálogo com a família $q^{2n+2} - q^{2n} - q^n - 1 = 0$ do verbete produz três fatos verificáveis, todos conferidos simbolicamente em `catalogo_constantes.py`.

Proposição 8.2. *O polinômio* $P_n(q) = q^{2n+2} - q^{2n} - q^n - 1$ *não é minimal para* n *ímpar: nesse caso* $P_n(-1) = 0$ *e portanto* $(q + 1) \mid P_n$. *Em particular,*

$$q^4 - q^2 - q - 1 = (q + 1)\,(q^3 - q^2 - 1),$$

de modo que a raiz positiva do caso $n = 1$ *é exatamente* ψ, *a razão* supergolden, *raiz de* $x^3 = x^2 + 1$.

Verificação. $P_n(-1) = 1 - 1 - (-1)^n - 1 = -(-1)^n - 1$, que se anula exatamente para n ímpar; a fatoração de $n = 1$ confere-se por expansão. Numericamente, as raízes positivas de $q^4 - q^2 - q - 1$ e de $q^3 - q^2 - 1$ coincidem em 1,46557123187676802665673 1. □

Proposição 8.3. *Para $n = 2$, a substituição $x = q^2$ leva $q^6 - q^4 - q^2 - 1$ em $x^3 - x^2 - x - 1$. Logo $q_2^2 = t$ é a constante de Tribonacci, e o ladrilho $1 : q_2^2 : q_2^3$ é o ladrilho $1 : t : t^{3/2}$ do catálogo.*

Proposição 8.4. *Entre os ladrilhos do catálogo, exatamente três — $1 : 1 : \sqrt{3}$, $1 : \psi : \psi^2$ e $1 : t : t^{3/2}$ — satisfazem $c^2 = a^2 + ab + b^2$, e portanto têm um ângulo de exatamente $120°$.*

Verificação. Para $1 : \psi : \psi^2$, de $\psi^3 = \psi^2 + 1$ vem $\psi^4 = \psi^2 + \psi + 1$, e o cosseno do ângulo oposto a ψ^2 vale $(1 + \psi^2 - \psi^4)/(2\psi) = -\psi/(2\psi) = -1/2$. Para $1 : t : t^{3/2}$, de $t^3 = t^2 + t + 1$ segue $(1 + t^2 - t^3)/(2t) = -1/2$. O caso $1 : 1 : \sqrt{3}$ é imediato. □

Proposição 8.5. *Os ladrilhos $1 : \varphi : \varphi^{3/2}$ e $1 : \chi : \chi^{5/2}$ têm o maior ângulo igual ao dobro do ângulo médio; $1 : \rho : \rho^{3/2}$ tem o maior igual ao dobro do menor:*

$$101{,}0102° = 2 \times 50{,}5051°, \qquad 95{,}1874° = 2 \times 47{,}5937°, \qquad 80{,}6562° = 2 \times 40{,}3281°.$$

Observação. As Proposições 8.4 e 8.5 exibem os dois mecanismos elementares de toda dissecção em semelhantes. O ângulo duplo permite que a bissetriz corte do triângulo uma cópia semelhante a ele, deixando um resto — é o mecanismo de encadeamento. O ângulo de $120°$ permite fechar três peças em torno de um ponto interior do triângulo equilátero — é o mecanismo de estrela.

Observação (Discrepância a esclarecer). O verbete atribui $2n+3$ peças à família auto-similar: cinco para $n = 1$ (ladrilho supergolden) e sete para $n = 2$ (ladrilho tribonacci), dissecando o *triângulo equilátero*. O catálogo registra, para os mesmos ladrilhos, dissecções de 7 e 6 peças (supergolden) e de 9 e 10 (tribonacci). Os ladrilhos são idênticos — a verificação de ângulos não deixa dúvida —, logo os triângulos-alvo diferem. Determinar o alvo de cada linha do catálogo, e se as duas listas se cruzam, é a pergunta imediata a fazer ao curador.

8.6 Triângulos racionais com um ângulo comum

A frente dos triângulos inteiros dispõe de um instrumento que a literatura formal não registra. Bob Harris, em página hospedada no sítio de Pegg [27], propõe a parametrização racional

$$a = \frac{3}{8} \cdot \frac{2k^2 - k + 2}{k^2 - 1}, \qquad b = \frac{1}{8} \cdot \frac{4k^2 + 12k - 7}{k^2 - 1},$$

para triângulos de lados a, b e 1, afirmando que todos compartilham um mesmo ângulo, sem identificá-lo. A identificação é imediata.

Proposição 8.6. *Para todo k racional em que $a, b > 0$ e vale a desigualdade triangular, o ângulo oposto ao lado a tem cosseno exatamente $11/16$, independentemente de k.*

Verificação. Substituindo as expressões em $\cos A = (b^2 + 1 - a^2)/(2b)$ e simplificando em aritmética exata sobre $\mathbb{Q}(k)$, todos os termos em k se cancelam e resta $11/16$. Conferido em aritmética racional para $k = 3, 4, 5, \frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{3}$, sempre com o mesmo valor. □

Essa é a peça que faltava para atacar o Problema 4. Dividir um triângulo inteiro por um ponto interior P exige três triângulos racionais cujos ângulos em P somem 2π; a família de Harris fornece, para o ângulo de cosseno $11/16$, uma parametrização racional de uma linha inteira de candidatos. O resultado geral por trás disso é clássico — para $\cos\theta$ racional, os triângulos racionais com ângulo θ são os pontos racionais de uma cônica que já tem ponto racional, e formam família racional a um parâmetro [28] — mas é a instância explícita de Harris que torna a busca computacional viável.

9 Problemas em aberto

Os problemas abaixo estão declarados como abertos nas próprias fontes primárias. Foram agrupados pela natureza do obstáculo, porque isso determina se o caminho de ataque é demonstrativo ou computacional.

Obstáculo computacional

Problema em aberto 1 (Extensão de A056814)**.** Determinar o número de partições topologicamente distintas de um triângulo em $n = 8$ peças, e além. A sequência conhecida termina em 20198 para $n = 7$.

Problema em aberto 2 (Catálogo de primas de ordem 6)**.** Completar e certificar a lista de partições primas de ordem 6. A fonte primária registra que a lista existente é provavelmente incompleta [19].

Problema em aberto 3 (Verificação da ordem 5)**.** Verificar de forma independente a lista de 181 configurações de ordem 5, confirmando ausência de duplicatas e de omissões.

Problema em aberto 4 (Triângulo inteiro mínimo de ordem 4)**.** Determinar o triângulo de lados inteiros de menor perímetro que se divide em quatro triângulos de lados inteiros dois a dois não semelhantes [20].

Obstáculo estrutural

Problema em aberto 5 (Ladrilho com ângulo $2\pi/3$ não isósceles)**.** Decidir se existe algum ladrilhamento de um triângulo por cópias congruentes de um ladrilho com ângulo $2\pi/3$ e não isósceles. Beeson declara sua análise incompleta nesse caso e registra que nenhum ladrilhamento é conhecido [12].

Problema em aberto 6 (Caso excepcional $\pi/11$)**.** Tratar o caso excepcional $\alpha = \pi/11$, $\beta = 3\pi/11$, que resiste ao método de prova empregado na série *Triangle Tiling* [12].

Obstáculo extremal

Problema em aberto 7 (Quadrado por triângulos 45°–60°–75°)**.** Determinar o número mínimo de peças. Os recordes registrados descem de 64 e 50 (Baxter) até 46 (Pichler); não há cota inferior não trivial publicada [25].

10 Extensão a dimensão três: *reptiles* e *gentiles*

10.1 Vocabulário

A literatura tridimensional usa dois termos que correspondem exatamente às frentes (B) e (A) deste levantamento: um simplexo é um *k-reptile* se admite dissecção em k cópias *congruentes* de si mesmo, e um *k-gentile* se admite dissecção em k cópias *semelhantes* a si mesmo, não necessariamente congruentes.

Em dimensão 2 o caso reptile está completamente caracterizado: um triângulo é k-reptile exatamente para k da forma a^2, $3a^2$ ou $a^2 + b^2$. Em dimensão 3 não há nada análogo.

10.2 O que está provado

Teorema 10.1 (Kynčl e Patáková, 2017 [30]). *Em $\mathbb{R}^3$, simplexos k-reptile existem apenas para k da forma m^3. Em $\mathbb{R}^4$, apenas para k da forma m^2.*

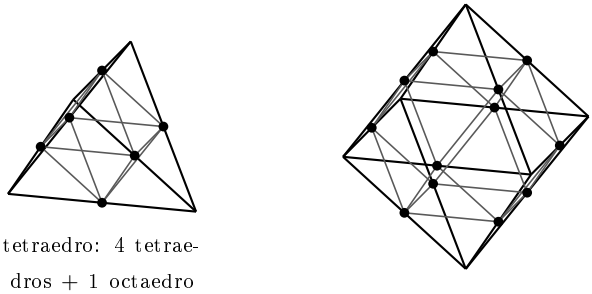
Teorema 10.2 (Haverkort, 2017 [31]). *Se um tetraedro acutângulo se subdivide em r tetraedros acutângulos, então $r \geq 10$. Em particular, nenhum tetraedro acutângulo é 8-reptile.*

Os exemplos conhecidos de m^3-reptiles são os tetraedros de Hill. Haverkort conjectura que nenhum tetraedro acutângulo é reptile ou gentile, e que todo tetraedro gentile tem algum ângulo diedral reto; as três conjecturas seguem abertas. O instrumento técnico central é o lema de Debrunner, que traduz simetrias do simplexo em simetrias do diagrama de Coxeter correspondente.

Observação. A forma $k = m^3$ do teorema de Kynčl–Patáková é exatamente o que a Proposição 8.1 prevê no caso congruente: com todas as razões iguais a r, o balanço dá $k\,r^3 = 1$, isto é, $r = k^{-1/3}$, e a compatibilidade dessa razão com a estrutura reticular do simplexo força k a ser cubo perfeito. O balanço de escala não prova o teorema, mas explica o formato do enunciado.

10.3 Por que o caso planar não sobe

A obstrução tem exibição elementar, e é a razão de o assunto ser difícil.



tetraedro: 4 tetraedros + 1 octaedro

octaedro: 6 octaedros + 8 tetraedros

Figura 7: Subdivisões canônicas por pontos médios. À esquerda, o tetraedro: os quatro cantos são tetraedros semelhantes ao original, em escala 1/2, mas o miolo é um *octaedro*, e não um tetraedro. À direita, o octaedro: seis octaedros em escala 1/2 mais oito tetraedros. Nenhum dos dois sólidos se subdivide em cópias de si mesmo; eles só se subdividem um no outro. Coordenadas geradas por `figuras_3d.py`.

A subdivisão por pontos médios de um triângulo produz quatro triângulos semelhantes ao original — a subdivisão medial da Figura 3(a), caso $N = n^2$ com $n = 2$. A mesma construção no tetraedro produz quatro tetraedros semelhantes em escala 1/2 *mais um octaedro*: os seis pontos médios das arestas formam um octaedro regular de aresta 1/2, que ocupa exatamente metade do volume ($4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$). A subdivisão análoga do octaedro devolve seis octaedros em escala 1/2 e oito tetraedros ($\frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1$). Nenhum dos dois sólidos se subdivide em cópias de si mesmo: eles só se subdividem um no outro — o mesmo par que preenche o espaço no favo tetraédrico-octaédrico. Os balanços foram conferidos numericamente em `figuras_3d.py`.

10.4 Problemas em aberto na extensão

Problema em aberto 8 (Tetraedros gentile). Caracterizar os tetraedros que admitem dissecção em cópias semelhantes a si mesmos. Conjectura-se que todo tetraedro gentile tem algum ângulo diedral reto [31].

Problema em aberto 9 (Tetraedros de Hill com m ímpar)**.** Decidir se os simplexos H_d^i são m^d-reptile para todo $m \geq 3$ ímpar [30].

Problema em aberto 10 (Análogo tridimensional do catálogo)**.** Não existe, para tetraedros, nada equivalente à tabela da Seção 8.3: não se conhece constante algébrica alguma governando uma família de dissecções de tetraedro em tetraedros semelhantes, à maneira de ψ, ρ ou t no plano. Pela observação da Seção 8.4, os candidatos aritméticos são conhecidos — são as raízes cúbicas das mesmas constantes —, de modo que o problema é inteiramente geométrico: decidir quais desses candidatos se realizam. Construir a primeira entrada de tal catálogo, ou provar que ela não existe fora dos casos de Hill, é a extensão direta deste levantamento.

Observação. O Problema 10 é o que melhor se acopla ao ferramental da Seção 11. A condição de fechamento diedral em torno de uma aresta interior é o análogo tridimensional da condição angular que, no plano, produziu $c^2 = a^2 + ab + b^2$ e o ângulo duplo da Proposição 8.5. A matriz de rigidez de um *framework* em $\mathbb{R}^3$ e a certificação intervalar de Krawczyk funcionam sem alteração conceitual, e a busca é de novo uma pergunta de não-vacuidade de variedade semialgébrica real.

11 Interfaces com a linha de certificação em GDU

Esta seção registra os pontos de contato entre o levantamento acima e o ferramental desenvolvido na linha de Grafos de Distância Unitária. Não são analogias: em cada item, o objeto matemático é literalmente o mesmo.

11.1 Realizabilidade de partição topológica como problema em $\exists\mathbb{R}$

A sequência A056814 conta *padrões de incidência*. Decidir quais desses padrões são realizáveis por segmentos retos com ângulos coerentes é decidir a não-vacuidade de uma variedade semialgébrica real — isto é, um problema na classe $\exists\mathbb{R}$, a mesma em que se situa o reconhecimento de grafos de distância unitária e a realizabilidade de *linkages*. A distinção entre "topologicamente distintas" e "geometricamente realizáveis" não aparece tratada como problema de decisão na literatura da frente (D).

11.2 Rigidez e número de Laman como certificado de contagem

Uma partição de ordem n é um *framework* planar sujeito a restrições de colinearidade. A análise da matriz de rigidez separa dois regimes:

- posto máximo (rigidez genérica) $\Rightarrow$ a família de realizações é discreta, e faz sentido *listar*;
- deficiência de posto $\Rightarrow$ há auto-tensões e a família é contínua, e o catálogo correto é uma *parametrização*, não uma lista.

Essa distinção é exatamente a que falta aos catálogos de ordem 5 e 6, e explica parte da dificuldade relatada em completá-los: contar objetos de uma família contínua como se fossem discretos produz listas que nunca fecham.

11.3 Certificação intervalar das razões de semelhança

As dissecções auto-similares da Seção 8.2 dependem da raiz positiva de (1). O operador de Krawczyk fornece intervalo certificado para q_n e, propagando, para as coordenadas de todos os vértices da dissecção — convertendo figuras numéricas em construções com certificado formal de existência.

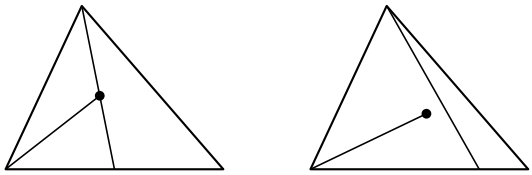


Figura 8: Duas realizações do mesmo tipo topológico (o caso do ponto em T da Figura 2d). As sequências contam tipos, não realizações. Decidir quais tipos admitem alguma realização, e qual a dimensão do espaço de realizações de cada um, são perguntas que a literatura da frente (D) não formula — e são, respectivamente, um problema em $\exists\mathbb{R}$ e uma questão de rigidez.

11.4 Codificação SAT com quebra de simetria

A enumeração da frente (D) é o problema-tipo para codificações proposicionais com restrições de quebra de simetria. A extensão da codificação de Ritirc–Biere–Kauers ao caso cúbico, desenvolvida na linha de construtibilidade por origami, é diretamente reaproveitável para gerar padrões de incidência canônicos e produzir, junto com a contagem, um certificado de completude — que é o que a sequência A056814 nunca teve.

12 Protocolo de contribuição

O verbete *Triangle Dissection* é curado por E. Pegg Jr., com quem já existe canal estabelecido: o verbete do grafo de Robertson credita, por comunicação pessoal, um dos dois desenhos com 17 cruzamentos retilíneos. O protocolo abaixo formaliza a repetição desse padrão neste tema.

1. **Alvo pequeno e refutável.** Entre os sete problemas da Seção 9, os dois de menor custo de entrada e maior verificabilidade por terceiros são o fechamento do catálogo de primas de ordem 6 (Problema 2) e o oitavo termo de A056814 (Problema 1).

2. **Formato de entrega.** Notebook executável, com figuras geradas por código, e não documento estático: as páginas do MathWorld são produzidas a partir de notebooks, e um resultado que já chega nesse formato incorpora-se ao verbete com atrito mínimo.

3. **Certificado explícito.** Separar, no texto submetido, o que está demonstrado do que é evidência computacional — disciplina já adotada no trabalho sobre o grafo de Robertson, em que os resultados foram apresentados como evidência forte e não como prova.

4. **Autoria em aberto.** Convite condicional de coautoria em caso de contribuição substantiva, com crédito de comunicação pessoal como alternativa declarada de antemão.

5. **Fechamento em periódico.** Um catálogo certificado de partições primas de ordem ≤ 6, acompanhado da prova de completude da enumeração, é material adequado a *Geombinatorics* ou ao *Australasian Journal of Combinatorics*. O verbete funciona como vitrine, não como produto final.

Observação. Registre-se uma ressalva de planejamento: com a tese concluída e prazo de integralização em fevereiro de 2027, esta linha se presta a artigo paralelo curto ou a trabalho posterior à defesa, não a capítulo novo.

13 Considerações finais

O quadro que emerge do levantamento é assimétrico. As frentes (A) e (B) — semelhança e congruência — estão nas mãos de dois programas de pesquisa maduros, com técnica algébrica pesada e problemas em aberto bem delimitados mas tecnicamente caros. A frente (C) tem método consolidado e resultados de minimalidade já estabelecidos por enumeração exaustiva.

As frentes (D) e (E), ao contrário, sustentam-se sobre catálogos experimentais sem prova de completude, sequências do OEIS congeladas há mais de duas décadas e páginas de divulgação. É uma assimetria incomum: um tema cujo verbete de referência apresenta lado a lado teoremas de *Combinatorica* e listas cuja própria fonte declara incompletas.

Essa assimetria é a oportunidade. O que falta às frentes (D) e (E) não é uma ideia nova, e sim precisamente o que a linha de certificação em GDU produz: enumeração com quebra de simetria, certificado de completude, separação entre famílias discretas e contínuas por análise de rigidez, e certificação intervalar de construções numéricas.

Referências

[1] BROOKS, R. L.; SMITH, C. A. B.; STONE, A. H.; TUTTE, W. T. The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal*, v. 7, p. 312–340, 1940.

[2] TUTTE, W. T. The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 44, p. 464–482, 1948.

[3] HOGGATT, V. E. Jr.; DENMAN, R. Acute isosceles dissection of an obtuse triangle. *The American Mathematical Monthly*, v. 68, p. 912–913, 1961.

[4] LACZKOVICH, M. Tilings of polygons with similar triangles. *Combinatorica*, v. 10, p. 281–306, 1990.

[5] LACZKOVICH, M. Tilings of triangles. *Discrete Mathematics*, v. 140, p. 79–94, 1995. DOI: 10.1016/0012-365X(93)E0176-5.

[6] JEPSEN, C.; YANG, R. Making squares from Pythagorean triangles. *The College Mathematics Journal*, v. 29, n. 4, p. 284–288, 1998.

[7] SKINNER, J. D.; SMITH, C. A. B.; TUTTE, W. T. On the dissection of rectangles into right-angled isosceles triangles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 80, n. 2, p. 277–319, 2000.

[8] ŻAK, A. Dissection of a triangle into similar triangles. *Discrete & Computational Geometry*, v. 34, p. 295–312, 2005. DOI: 10.1007/s00454-005-1167-1.

[9] ŻAK, A. A note on perfect dissections of an equilateral triangle. *Australasian Journal of Combinatorics*, v. 44, p. 87–93, 2009. Disponível em: `https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/44/ajc_v44_p087.pdf`.

[10] DRÁPAL, A.; HÄMÄLÄINEN, C. An enumeration of equilateral triangle dissections. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, n. 14, 2010. arXiv:0910.5199.

[11] BEESON, M. Triangle tiling I: the tile is similar to ABC or has a right angle. arXiv:1206.2231, 2012.

[12] BEESON, M. Triangle tiling II: nonexistence theorems. arXiv:1206.2230, 2012.

[13] BEESON, M. Triangle tiling: the case $3\alpha + 2\beta = \pi$. arXiv:1206.2229, 2012.

[14] BEESON, M. Triangle tiling V: tilings by a tile with integer sides. arXiv:1206.2228, 2012.

[15] BEESON, M. No triangle can be cut into seven congruent triangles. arXiv:1811.09723, 2018.

[16] BEESON, M. Tiling an equilateral triangle. arXiv:1812.07014, 2018.

[17] SKUPIEŃ, Z.; ŻAK, A. Prime triangle partitions. In: *Topics in Graph Theory*, 2013.

[18] LACZKOVICH, M. Irregular tilings of regular polygons with similar triangles. *Discrete & Computational Geometry*, v. 66, p. 1239–1261, 2021. arXiv:2002.12013.

[19] PEGG, E. Jr. MathPuzzle: triangles. Disponível em: `https://www.mathpuzzle.com/triangle.html`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[20] PEGG, E. Jr. Dividing an integer triangle into smaller integer triangles. Disponível em: `https://www.mathpuzzle.com/itgrand.html`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[21] PEGG, E. Jr. Shattering the plane with twelve new substitution tilings. *Wolfram Blog*, 7 mar. 2019.

[22] SLOANE, N. J. A. Sequência A056814. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Disponível em: `https://oeis.org/A056814`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[23] SLOANE, N. J. A. Sequência A053740. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Disponível em: `https://oeis.org/A053740`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[24] WEISSTEIN, E. W. Triangle dissection. *MathWorld — A Wolfram Resource*. Disponível em: `https://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[25] ANDERSON, S. Tiling by similar triangles. *squaring.net*. Disponível em: `http://squaring.net/tri/twt.html`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[26] VICHERA, M. Triangle partitions. Disponível em: `http://www.vicher.cz/puzzle/triangles/triangles.htm`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[27] HARRIS, B. Bob's brash and unsubstantiated claim. Em: PEGG, E. Jr. *MathPuzzle*. Disponível em: `https://www.mathpuzzle.com/harris.html`. Acesso em: 28 ago. 2026.

[28] BASHMAKOVA, I. G. *Diophantus and Diophantine Equations*. Washington: Mathematical Association of America, 1997.

[29] CRILLY, T. A supergolden rectangle. *The Mathematical Gazette*, v. 78, n. 483, p. 320–325, 1994.

[30] KYNČL, J.; PATÁKOVÁ, Z. On the nonexistence of k-reptile simplices in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 24, n. 3, #P3.1, 2017. arXiv:1602.04668.

[31] HAVERKORT, H. No acute tetrahedron is an 8-reptile. *Discrete Mathematics*, 2017. arXiv:1508.03773.

[32] Catálogo de dissecções de triângulos em triângulos semelhantes, indexado por constante algébrica (compilação; comunicação ao autor, ago. 2026).