# Escola Naval 2026/2027 — Matemática

Concurso Público de Admissão (CPAEN) — resolução completa

22 questões · prova aplicada em 29 de agosto de 2026

## Gabarito

| # | frente | resposta | opção |
|---|---|---|---|
| 1 | Limites | $e^{-1}$ | b |
| 2 | Números complexos / Geom. analítica | área $= 75$ | d |
| 3 | Assíntotas, geom. de posição, sequências, desigualdades | apenas I, III e IV | d |
| 4 | Integral — área entre curvas | $\dfrac{128}{15}$ | b |
| 5 | Funções trigonométricas inversas | gráfico com assíntotas em $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ | e |
| 6 | Números binomiais / Stifel | $(-1)^n \dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$ | a |
| 7 | Geometria plana — áreas | $\dfrac{1+\sqrt{2}}{8}$ | d |
| 8 | Geometria espacial — poliedros | $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ | c |
| 9 | Integral por partes | $\ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi^2}{32}$ | a |
| 10 | Integral — volume (arruelas) | $\approx 27\pi$ (com $\ln 2 \cong 0{,}7$) | e |
| 11 | Geometria analítica no espaço | $\dfrac{12}{\sqrt{154}}$ | a |
| 12 | Equação recíproca | $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ | c |
| 13 | Função — gráfico | ramo esquerdo positivo, furo em $x = -1$ | a |
| 14 | Taxa de variação | $\alpha^2$ | c |
| 15 | Funções trigonométricas inversas | $\dfrac{5\pi}{3}$ | b |
| 16 | Matemática financeira | R$ 132.300,00 | d |
| 17 | Determinantes | Laplace e Cauchy | b |
| 18 | Derivada — curvas ortogonais | $a = \dfrac{1}{31}$ | a |
| 19 | Lógica — tabela-verdade | V, F, V, V | e |
| 20 | Probabilidade | $\dfrac{3}{5}$ | b |
| 21 | Progressão geométrica | $\dfrac{81}{16}$ | d |
| 22 | Cônicas — equação geral | $m < -4$ ou $m > 4$ | a |

Em destaque, as duas questões em que há divergência com o gabarito preliminar oficial: a 2ª, **anulada** pela banca, e a 12ª, em que sustentamos que o gabarito oficial está equivocado. As duas são tratadas em seção própria ao final.

## Conferência com o gabarito oficial

Todas as 22 respostas acima foram obtidas de forma independente e verificadas numericamente. Confrontadas depois com o gabarito preliminar divulgado pelo Serviço de Seleção do Pessoal da Marinha, **coincidem em 20 das 22 questões**. As duas exceções:

| # | nossa resposta | gabarito oficial | situação |
|---|---|---|---|
| 2 | d (área $= 75$) | — | **anulada** pela banca |
| 12 | c $\frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right)$ | a $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ | divergência — cabe recurso |

A numeração seguida aqui é a do caderno cuja coluna no gabarito oficial traz a anulação na 2ª questão. As versões coloridas da prova embaralham a ordem das questões, de modo que o mesmo item aparece sob números diferentes em cadernos diferentes; o leitor deve conferir pela *questão*, não pelo número.

## Resoluções

## QUESTÃO 1

limites — indeterminação $1^{\infty}$

**Enunciado.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

**Resolução.** Em $x=1$ a base vale $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ e o expoente diverge: é a indeterminação $1^{\infty}$. Pondo $x=1+h$, com $h\to 0$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi h}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi h}{4}},\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)=-\operatorname{cotg}\frac{\pi h}{2}.$$

Tomando o logaritmo e usando $\operatorname{tg}u=u+O(u^3)$ e $\ln(1+u)=u+O(u^2)$,

$$\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi h}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi h}{4}}\right)=2\operatorname{tg}\frac{\pi h}{4}+O(h^3)=\frac{\pi h}{2}+O(h^3),\qquad -\operatorname{cotg}\frac{\pi h}{2}=-\frac{2}{\pi h}+O(h).$$

Logo

$$\ln L=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{2}{\pi h}\right)\left(\frac{\pi h}{2}\right)=-1\implies L=e^{-1}.$$

Conferência numérica: para $h=10^{-7}$ a expressão vale 0,3678794412, contra $e^{-1}=0{,}3678794412$.

**Resposta: b**

## QUESTÃO 2

números complexos e geometria analítica (anulada)

**Enunciado.** *Seja $\lambda$ a curva $|z-5i|=5$, com $z=x+yi$. Seja $r$ a reta que tem um único ponto $P(3,9)$ em $\lambda$ e intersecta o eixo real em $B$. Sendo $C$ o centro de $\lambda$ e $O(0,0)$ a origem, determine a área do quadrilátero de vértices $C$, $P$, $B$ e $O$.*

**Resolução.** $\lambda$ é a circunferência de centro $C(0,5)$ e raio 5. O ponto $P$ pertence a ela: $|3+9i-5i|=|3+4i|=5$. Ter *um único* ponto comum com $\lambda$ significa que $r$ é a **tangente** em $P$ — e, portanto, é perpendicular a $\overrightarrow{CP}=(3,4)$:

$$3(x-3)+4(y-9)=0\iff 3x+4y=45.$$

Fazendo $y=0$ obtém-se $B(15,0)$. Pela fórmula do cadarço aplicada a $C(0,5)$, $P(3,9)$, $B(15,0)$, $O(0,0)$:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left|(0\cdot 9-3\cdot 5)+(3\cdot 0-15\cdot 9)+(15\cdot 0-0\cdot 0)+(0\cdot 5-0\cdot 0)\right|=\frac{150}{2}=75.$$

O quadrilátero é convexo e a ordem $C-P-B-O$ é a do contorno, de modo que não há ambiguidade de área. A banca anulou a questão; a hipótese mais provável é a redação "a reta que tem um único ponto $P(3,9)$ em $\lambda$", que só determina $r$ se lida como tangência — lida como "a reta que passa por $P$", $B$ fica indeterminado e a questão não tem resposta.

**Resposta: d (anulada)**

## QUESTÃO 3

assíntotas, geometria de posição, sequências e desigualdades

**Enunciado.** *Analise:* ***I*** *— se um plano $\alpha$ intersecta $\beta$ segundo uma reta $r$, então corta qualquer plano paralelo a $\beta$ segundo uma reta paralela a $r$.* ***II*** *— $f(x)=x\,e^{1/x}$ tem apenas uma assíntota.* ***III*** *— $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.* ***IV*** *— para $x,y,z>0$, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\geq 9\sqrt[3]{xyz}$.*

**Resolução.** **I — verdadeira.** Sejam $\beta'\parallel\beta$ e $r'=\alpha\cap\beta'$. As retas $r$ e $r'$ estão ambas em $\alpha$ e não se cruzam (estariam em $\beta\cap\beta'=\varnothing$); duas retas coplanares sem ponto comum são paralelas.

**II — falsa.** A função tem *duas* assíntotas:

$$\lim_{x\to 0^+}x\,e^{1/x}=+\infty\ \Rightarrow\ x=0\text{ é assíntota vertical;}\qquad x\,e^{1/x}=x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\cdots\right)=x+1+\frac{1}{2x}+\cdots$$

e portanto $y = x + 1$ é assíntota oblíqua, nos dois sentidos. (Pela esquerda, $\lim_{x\to 0^-} x\,e^{1/x} = 0$, o que não desfaz a assíntota vertical.)

**III — verdadeira.** Pela MG–MA aplicada aos $n+1$ números $\underbrace{1+\frac{1}{n},\ldots,1+\frac{1}{n}}_{n}$, 1:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \implies \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

**IV — verdadeira.** Pela MA–MG, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq 3\sqrt[6]{xyz}$; elevando ao quadrado, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \geq 9\sqrt[3]{xyz}$, com igualdade se e só se $x = y = z$.

**Resposta: d**

## QUESTÃO 4

integral — área entre curvas

**Enunciado.** $f(x) = x^4 - 3x^2$ *e* $g(x) = x^2$. *Determine a área delimitada pelas interseções das curvas.*

**Resolução.** Interseções: $x^4 - 3x^2 = x^2 \Rightarrow x^2\left(x^2-4\right) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 0, 2\}$. Em $[-2, 2]$ tem-se $g - f = 4x^2 - x^4 = x^2\left(4-x^2\right) \geq 0$: não há troca de sinal, e $x = 0$ é apenas um contato (raiz dupla), não uma mudança de região. Pela paridade,

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2}\left(4x^2-x^4\right)dx = 2\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right) = 64\cdot\frac{2}{15} = \frac{128}{15}.$$

**Resposta: b**

## QUESTÃO 5

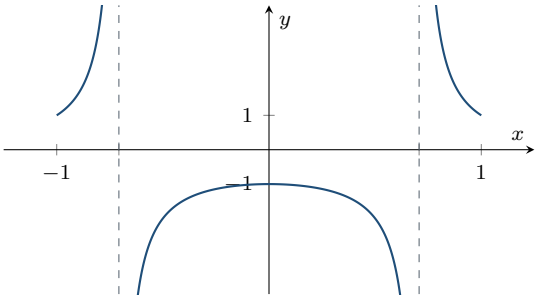
funções trigonométricas inversas — gráfico

**Enunciado.** $f(x) = \cos(2\arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$. *Qual gráfico representa* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$*?*

**Resolução.** Com $\theta = \arccos x$ tem-se $\cos\theta = x$ e $f(x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$. Logo

$$g(x) = \frac{1}{2x^2-1}, \qquad x \in [-1,1] \setminus \left\{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

São três ramos: assíntotas verticais em $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; nos ramos externos $g$ decresce de $+\infty$ até $g(\pm 1) = 1$; no ramo central $g$ é negativa, com *máximo* $g(0) = -1$ e queda para $-\infty$ nas duas pontas. O gráfico é par.




**Resposta: e**

## QUESTÃO 6

números binomiais e relação de Stifel

**Enunciado.** *Simplifique* $1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x(x-1)}{2!} - \dfrac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

**Resolução.** Cada parcela é um número binomial generalizado: $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$, de modo que a soma é $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}$. A relação de Stifel $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$ transforma a soma em telescópica:

$$(-1)^k\binom{x}{k} = (-1)^k\binom{x-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{x-1}{k-1},$$

e somando de $k=0$ a $n$ restam apenas as pontas:

$$S_n = (-1)^n\binom{x-1}{n} = (-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}.$$

Conferido numericamente para $x = 3{,}7$, $x = -2{,}3$ e $x = 5$, com $n$ até 7: diferença nula. Nas alternativas impressas o último fator aparece grafado com "$n$" no lugar de "$x$"; a única com a estrutura correta — último fator $(x-n)$ — é a (a).

**Resposta: a**

## QUESTÃO 7

geometria plana — razão de áreas

**Enunciado.** *No octógono regular $ABCDEFGH$ de lado 8, a reta que contém $IH$ passa por $C$ e os pontos $B$, $I$ e $E$ são colineares. Calcule* $\dfrac{[IEG]}{[ABCDEFGH]}$.

**Resolução.** Com o lado $s = 8$ e centro na origem, os vértices são $\left(\pm\frac{s}{2}, \pm\frac{s(1+\sqrt{2})}{2}\right)$ e $\left(\pm\frac{s(1+\sqrt{2})}{2}, \pm\frac{s}{2}\right)$; escrevendo $a = \frac{s}{2} = 4$ e $b = \frac{s(1+\sqrt{2})}{2} = 4 + 4\sqrt{2}$:

$$A(-a,b),\ B(-b,a),\ C(-b,-a),\ D(-a,-b),\ E(a,-b),\ F(b,-a),\ G(b,a),\ H(a,b).$$

As diagonais $CH$ e $BE$ fazem $45°$ com os eixos:

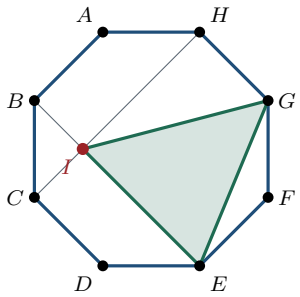
$$CH:\ y = x + 4\sqrt{2}, \qquad BE:\ y = -x - 4\sqrt{2},$$

e se cruzam em $I\left(-4\sqrt{2},\, 0\right)$ — sobre o eixo de simetria horizontal. Com $\vec{IE} = (4+4\sqrt{2})(1,-1)$ e $\vec{IG} = \left(4+8\sqrt{2},\, 4\right)$,

$$[IEG] = \frac{1}{2}\left|(4+4\sqrt{2})\cdot 4 + (4+4\sqrt{2})(4+8\sqrt{2})\right| = \frac{1}{2}(4+4\sqrt{2})(8+8\sqrt{2}) = 16\left(1+\sqrt{2}\right)^2.$$

A área do octógono regular de lado $s$ é $2s^2\left(1+\sqrt{2}\right) = 128\left(1+\sqrt{2}\right)$. Logo

$$\frac{[IEG]}{[ABCDEFGH]} = \frac{16\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{128\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{2}}{8}.$$




**Resposta: d**

## QUESTÃO 8

geometria espacial — ângulo diedro do icosaedro

**Enunciado.** *Determine o ângulo entre duas faces adjacentes de um icosaedro regular convexo.*

**Resolução.** Seja $AB$ a aresta comum às faces $ABP$ e $ABQ$, de lado $\ell$, e $M$ o ponto médio de $AB$. As apótemas $PM$ e $QM$ são perpendiculares a $AB$, de modo que $\theta = \widehat{PMQ}$ é o diedro. Cada face é equilátera, logo $PM = QM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Falta $PQ$: $P$ e $Q$ são vértices opostos de um **antiprisma pentagonal** — não adjacentes — e a distância entre eles é a diagonal do pentágono de lado $\ell$, isto é $PQ = \varphi\,\ell$ com $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pela lei dos cossenos em $PMQ$:

$$\cos\theta = \frac{2\cdot\frac{3\ell^2}{4} - \varphi^2\ell^2}{2\cdot\frac{3\ell^2}{4}} = 1 - \frac{2\varphi^2}{3} = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 138^\circ 11'.$$

**Resposta: c**

## QUESTÃO 9

integral por partes

**Enunciado.** *Calcule* $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\,[\operatorname{cotg} x]^2\,dx$.

**Resolução.** Com $\operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x - 1$ a integral parte em duas. Na primeira, por partes com $u = x$ e $dv = \csc^2 x\,dx$ (logo $v = -\operatorname{cotg} x$):

$$\int x\csc^2 x\,dx = -x\operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cotg} x\,dx = -x\operatorname{cotg} x + \ln|\operatorname{sen} x|\,.$$

Portanto uma primitiva é $F(x) = -x\operatorname{cotg} x + \ln|\operatorname{sen} x| - \dfrac{x^2}{2}$. Nos extremos:

$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 + 0 - \frac{\pi^2}{8}, \qquad F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{32} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi^2}{32}.$$

Vale $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\ln 2}{2}$, de modo que o resultado também se escreve $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi^2}{32} \approx 0{,}20670$ — valor conferido por quadratura numérica.

**Resposta: a**

## QUESTÃO 10

integral — volume pelo método das arruelas

**Enunciado.** *$f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$. Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo $x$, com $x \in [0;5)$, gerado pela área delimitada pelas interseções dessas funções. Dado:* $\ln 2 \cong 0{,}7$.

**Resolução.** Em $[0,5)$ as curvas se cruzam onde $2^x = x^2$, isto é em $x = 2$ e $x = 4$ ($4 = 4$ e $16 = 16$). Entre elas $x^2 > 2^x$ — em $x = 3$, $9 > 8$ —, de modo que $g$ é a borda externa e $f$ a interna. Pelo método das arruelas,

$$V = \pi\int_2^4 \left[\left(x^2\right)^2 - \left(2^x\right)^2\right]dx = \pi\int_2^4 \left(x^4 - 4^x\right)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4^x}{\ln 4}\right]_2^4.$$

$$V = \pi\left(\frac{1024-32}{5} - \frac{256-16}{2\ln 2}\right) = \pi\left(\frac{992}{5} - \frac{120}{\ln 2}\right).$$

Com o dado $\ln 2 \cong 0{,}7$: $V \cong \pi\,(198{,}4 - 171{,}43) \cong 26{,}97\pi \approx 27\pi$.

**Observação.** Com o valor verdadeiro $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$ o volume é $25{,}28\pi$, que está *mais próximo* de $24\pi$ do que de $27\pi$. É o dado aproximado fornecido no enunciado — e não a integral — que seleciona a alternativa (e). Uma questão cuja resposta depende do arredondamento do dado é frágil por construção.

**Resposta: e**

## QUESTÃO 11

geometria analítica no espaço

**Enunciado.** *Calcule o cosseno do ângulo entre* $(r): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ *e* $(s): x = 1+t,\ y = 2+t,\ z = 3+3t$.

**Resolução.** Vetores diretores $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (1,1,3)$. Então

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{|1+2+9|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}} = \frac{12}{\sqrt{154}}.$$

**Resposta: a**

## QUESTÃO 12

equação recíproca (divergência com o gabarito oficial)

**Enunciado.** *Para* $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$, *determine a razão entre a menor e a maior raiz real.*

**Resolução.** Os coeficientes $1, -5, 9, -9, 5, -1$ são antissimétricos: a equação é **recíproca de 2ª espécie**, e $x = 1$ é raiz. Dividindo por $x - 1$:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Esta é recíproca de 1ª espécie. Dividindo por $x^2$ e pondo $u = x + \frac{1}{x}$ (donde $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$):

$$u^2 - 2 - 4u + 5 = 0 \implies u^2 - 4u + 3 = 0 \implies u \in \{1, 3\}.$$

Para $u = 1$: $x^2 - x + 1 = 0$, com $\Delta = -3 < 0$ — raízes complexas. Para $u = 3$: $x^2 - 3x + 1 = 0$, donde $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. As raízes reais são, em ordem,

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382, \qquad 1, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618.$$

Como a equação é recíproca, a menor e a maior são inversas uma da outra, e

$$\frac{\text{menor}}{\text{maior}} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}1459.$$

**Resposta: c**

## QUESTÃO 13

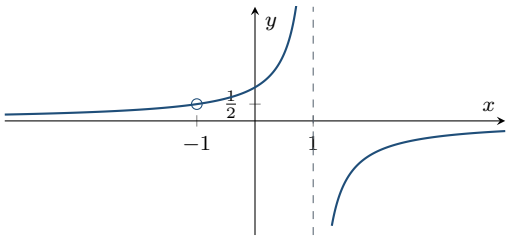
função racional — gráfico

**Enunciado.** $f(x) = -\dfrac{x+1}{x^2-1}$. *Qual gráfico representa a função?*

**Resolução.** Para $x \neq -1$,

$$f(x) = -\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$$

O gráfico é, portanto, a hipérbole $y = \frac{1}{1-x}$ — assíntota vertical $x = 1$, assíntota horizontal $y = 0$ — **com um furo** em $x = -1$, onde o valor seria $f(-1) = \frac{1}{2}$. À esquerda de $x = 1$ a função é positiva e cresce de $0^+$ até $+\infty$; à direita é negativa e sobe de $-\infty$ até $0^-$. O único gráfico com esse comportamento *e* com o ponto aberto no ramo esquerdo é o (a).




**Resposta: a**

## QUESTÃO 14

taxa de variação

**Enunciado.** *Um ponto desloca-se sobre $xy = 4$ com $\dot{y} = \alpha$ constante, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Determine a aceleração da abscissa quando $x = 2$.*

**Resolução.** Derivando $xy = 4$ em relação ao tempo: $\dot{x}\,y + x\,\dot{y} = 0$. Como $y = \frac{4}{x}$,

$$\dot{x} \cdot \frac{4}{x} + x\alpha = 0 \implies \dot{x} = -\frac{\alpha x^2}{4}.$$

Derivando de novo e substituindo $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{4} \cdot 2x\dot{x} = -\frac{\alpha x}{2}\left(-\frac{\alpha x^2}{4}\right) = \frac{\alpha^2 x^3}{8}.$$

Em $x = 2$: $\ddot{x} = \frac{\alpha^2 \cdot 8}{8} = \alpha^2$. Conferência: integrando $y = 2 + \alpha t$ e $x = \frac{4}{y}$, a segunda diferença central em $t = 0$ com $h = 10^{-6}$ devolve $\alpha^2$ com sete casas.

**Resposta: c**

## QUESTÃO 15

funções trigonométricas inversas — área

**Enunciado.** $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + \arccos\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$. *Determine a área limitada pelo gráfico de $f$, pelo eixo $x$ e pelas retas verticais que delimitam o domínio.*

**Resolução.** A identidade $\operatorname{arcsen} u + \arccos u = \frac{\pi}{2}$ vale para todo $u \in [-1, 1]$: o gráfico de $f$ é um *segmento horizontal* de altura $\frac{\pi}{2}$. Todo o problema está no domínio:

$$\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| \le 1.$$

Para $x > -2$ o denominador é positivo e as duas desigualdades dão $2x - 1 \le x + 2 \Rightarrow x \le 3$ e $2x - 1 \ge -(x + 2) \Rightarrow x \ge -\frac{1}{3}$. Para $x < -2$, a primeira exigiria $x \ge 3$: impossível. Logo

$$D = \left[-\tfrac{1}{3},\, 3\right], \qquad \text{comprimento } 3 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{10}{3}.$$

A região é o retângulo de base $\frac{10}{3}$ e altura $\frac{\pi}{2}$:

$$\mathcal{A} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}.$$

**Resposta: b**

## QUESTÃO 16

matemática financeira

**Enunciado.** *Um veículo de R$ 150.000,00 sofre duas perdas sucessivas de 10% e 30%. O dono propõe vendê-lo com acréscimo de 40% sobre o valor atual. Por quanto venderá?*

**Resolução.** Perdas sucessivas compõem-se multiplicativamente:

$$150\,000 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}70 = 94\,500.$$

O acréscimo de 40% incide sobre esse valor atual:

$$94\,500 \cdot 1{,}40 = 132\,300.$$

A expressão "sobre o valor de aquisição" no enunciado é ruído: se as perdas fossem ambas calculadas sobre os R$ 150.000 iniciais, o valor atual seria $150\,000(1-0{,}10-0{,}30) = 90\,000$ e a venda sairia por R$ 126.000,00 — que não figura entre as alternativas. A leitura multiplicativa é, portanto, a única compatível com a prova.

**Resposta: d**

## QUESTÃO 17

determinantes — Laplace e Cauchy

**Enunciado.** *De $B \cdot \overline{B} = \overline{B} \cdot B = \det(B) \cdot I_n$, com $\overline{B}$ a adjunta de $B$: os teoremas das condições (1) $i = k \Rightarrow b_{ik} = \det(B)$ e (2) $i \neq k \Rightarrow b_{ik} = 0$ são, respectivamente, os de quem?*

**Resolução.** A entrada $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$ é a soma dos produtos dos elementos da linha $i$ pelos cofatores da linha $k$.

(1) Com $i = k$, é a soma dos produtos de cada elemento de uma fila pelo *seu próprio* cofator: é o **teorema de Laplace**, o desenvolvimento do determinante por uma fila.

(2) Com $i \neq k$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores de *outra* fila — os chamados cofatores alheios — e vale zero: é o **teorema de Cauchy**. (A razão é que o resultado seria o determinante de uma matriz com duas filas iguais.)

**Resposta: b**

## QUESTÃO 18

derivada — curvas ortogonais

**Enunciado.** *$f(x) = ax^2 - 7$ e $g(x) = -x^2 + 1$. Determine $a$ para que os gráficos se intersectem ortogonalmente.*

**Resolução.** Duas condições simultâneas no ponto comum. **Interseção:**

$$ax^2 - 7 = -x^2 + 1 \implies (a+1)x^2 = 8 \implies x^2 = \frac{8}{a+1}.$$

**Ortogonalidade:** $f'(x)\,g'(x) = -1$, com $f' = 2ax$ e $g' = -2x$:

$$-4a\,x^2 = -1 \implies x^2 = \frac{1}{4a}.$$

Igualando: $\dfrac{8}{a+1} = \dfrac{1}{4a} \Rightarrow 32a = a + 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{31}$. Verificação: $a = \frac{1}{31}$ dá $x^2 = \frac{31}{4}$, logo $f'g' = \left(\frac{2x}{31}\right)(-2x) = -\frac{4x^2}{31} = -1$. Consistente.

**Resposta: a**

## QUESTÃO 19

lógica — tabela-verdade

**Enunciado.** *Sendo $(m \to n) \Leftrightarrow (\sim n \to \sim m)$, qual a sequência lógica de $(\sim n \to \sim m)$ na ordem usual?*

**Resolução.** A ordem usual percorre $(m, n)$ em $VV, VF, FV, FF$. Uma condicional só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso:

| $m$ | $n$ | $\sim n$ | $\sim m$ | $\sim n \to \sim m$ | $m \to n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | **V** | V |
| V | F | V | F | **F** | F |
| F | V | F | V | **V** | V |
| F | F | V | V | **V** | V |

A coluna é $V, F, V, V$ — idêntica à de $m \to n$, como a equivalência (contrapositiva) exige.

**Resposta: e**

## QUESTÃO 20 — probabilidade condicional

**Enunciado.** *Cinco candidatos. $P(A) = P(B)$; $P(C)$ é um terço dessa probabilidade; $P(D) = P(E)$, igual ao dobro de $P(C)$. Passando $A$ e $D$ ao segundo turno e mantendo-se proporcionalmente as chances, qual a probabilidade de $A$ vencer?*

**Resolução.** Pondo $P(A) = P(B) = p$, tem-se $P(C) = \frac{p}{3}$ e $P(D) = P(E) = \frac{2p}{3}$. A soma é 1:

$$p + p + \frac{p}{3} + \frac{2p}{3} + \frac{2p}{3} = 2p + \frac{5p}{3} = \frac{11p}{3} = 1 \implies p = \frac{3}{11}.$$

Assim $P(A) = \frac{3}{11}$ e $P(D) = \frac{2}{11}$. Mantendo a proporção no segundo turno,

$$P\left(A \text{ vence} \mid \{A, D\}\right) = \frac{P(A)}{P(A) + P(D)} = \frac{3/11}{3/11 + 2/11} = \frac{3}{5}.$$

A alternativa $\frac{5}{11}$ é $P(A) + P(D)$, isto é, a probabilidade de o segundo turno ser exatamente $A \times D$ — não é o que se pede. O gabarito oficial confirma $\frac{3}{5}$.

**Resposta: b**

## QUESTÃO 21 — série geométrica

**Enunciado.** *Calcule* $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)\right)^4$.

**Resolução.** Duas séries geométricas de razão menor que 1, somadas a partir de $n = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

A soma é $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, e $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$.

**Resposta: d**

## QUESTÃO 22 — cônicas — classificação pela equação geral

**Enunciado.** *Para que valores de $m$ a curva $x^2 + 16y^2 + 2mxy - 1 = 0$ representa uma hipérbole?*

**Resolução.** Na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ tem-se $A = 1$, $B = 2m$, $C = 16$, $D = E = 0$, $F = -1$. O tipo é dado pelo **indicador** $B^2 - 4AC$, e a não degenerescência pelo determinante da matriz completa:

$$B^2 - 4AC = 4m^2 - 64, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = m^2 - 16.$$

Hipérbole exige $B^2 - 4AC > 0$, isto é $m^2 > 16$; e nesse caso $m^2 - 16 > 0$ já garante que a cônica não degenera em par de retas. Logo

$$m < -4 \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

Em $m = \pm 4$ o indicador se anula *e* o determinante também: a equação fatora em duas retas paralelas, $(x \pm 4y)^2 = 1$. Não é parábola — é o caso degenerado.

**Resposta: a**

## As duas divergências com o gabarito oficial

**Questão 2 — anulada pela banca.** Com a leitura de que $r$ é a tangente a $\lambda$ em $P$ — a única que torna $B$ determinado — a área é 75, sem ambiguidade: o quadrilátero é convexo e a fórmula do cadarço fecha em 150/2. A anulação, portanto, não decorre de erro de cálculo no gabarito, e sim do enunciado. A hipótese mais econômica é a redação "*a reta que tem um único ponto $P(3,9)$ em $\lambda$*": quem a leu como "a reta que passa por $P$" — leitura gramaticalmente possível — não tem como determinar $B$, e a questão fica sem resposta. As cinco alternativas serem $72, 73, 74, 75, 76$ agrava o quadro: não há como triar a resposta por estimativa, de modo que o candidato ou resolve pela tangência ou não resolve.

**Questão 12 — o gabarito oficial está equivocado.** Esta merece recurso, e o argumento é curto. As raízes reais da equação são

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382, \qquad 1, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618,$$

e a maior delas é $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, não 1. A razão pedida é

$$\frac{\text{menor}}{\text{maior}} = \frac{(3-\sqrt{5})/2}{(3+\sqrt{5})/2} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{9-5} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}1459,$$

que é a alternativa (c). O gabarito oficial aponta (a), $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$ — que é *a própria menor raiz*.

A origem do erro é visível. Como a equação é recíproca, a menor e a maior raiz são inversas uma da outra:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{9-5}{4} = 1.$$

Logo $\frac{\text{menor}}{\text{maior}} = (\text{menor})^2$. O gabarito registrou a menor raiz onde deveria registrar o seu quadrado — isto é, dividiu pela raiz 1, tomando-a como a maior. É um deslize de uma linha, e penaliza exatamente o candidato que fez a conta inteira.

## Mapa por frente

| frente | questões | ferramenta decisiva |
|---|---|---|
| Cálculo — limites e derivadas | 1, 3 (II), 14, 18 | indeterminação $1^\infty$; assíntota oblíqua por expansão; derivação implícita no tempo; $f'g' = -1$ |
| Cálculo — integrais | 4, 9, 10 | área entre curvas; $\operatorname{cotg}^2 = \operatorname{csc}^2 - 1$ com partes; método das arruelas |
| Funções e gráficos | 5, 13 | $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$; simplificação com furo em $x = -1$ |
| Geometria plana e espacial | 3 (I), 7, 8 | diagonais a 45° do octógono; diedro do icosaedro pela diagonal do pentágono |
| Geometria analítica | 2, 11, 22 | tangência e cadarço; ângulo entre diretores; indicador $B^2 - 4AC$ |
| Álgebra | 6, 12, 17, 21 | Stifel telescópico; equação recíproca; Laplace e Cauchy; série geométrica |
| Contagem, lógica e aritmética | 15, 16, 19, 20 | domínio de arcsen; descontos sucessivos; contrapositiva; probabilidade condicional |
| Desigualdades e sequências | 3 (III, IV) | MG–MA para a monotonia de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; MA–MG em $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ |

## Leitura da prova

Sete das 22 questões são de Cálculo — limites, derivadas, integrais, séries —, quase um terço. É a marca que separa a Escola Naval do IME e do ITA: o candidato que preparou apenas o programa do ensino médio perde esse bloco inteiro. Nenhuma das sete é difícil isoladamente; o que elas cobram é familiaridade, não engenho.

O peso real está em outro lugar. As questões 3, 6, 7, 8 e 12 exigem uma ideia que não está no enunciado: a expansão de $e^{1/x}$ que revela a segunda assíntota, o telescópio de Stifel, o reconhecimento de que as diagonais do octógono cortam a $45°$, a diagonal do pentágono no icosaedro, a substituição $u = x + \frac{1}{x}$. São cinco questões, e é nelas que a prova classifica.

Três questões apresentam problemas de construção. A **2** foi anulada. A **12** tem gabarito oficial equivocado. A **10** tem resposta determinada pelo arredondamento fornecido ($\ln 2 \cong 0{,}7$) e não pela integral — com o valor verdadeiro, o volume de $25{,}28\pi$ está mais perto de $24\pi$ do que da alternativa dada. Soma-se a **16**, cuja expressão "sobre o valor de aquisição" contradiz a composição multiplicativa que as alternativas exigem. Quatro questões de 22 com defeito de redação ou de gabarito é um índice alto, e sustenta a recomendação de orientar o aluno a, nesses casos, escolher a leitura compatível com as alternativas em vez da leitura literal.

**Procedência.** Os enunciados foram transcritos do caderno da prova aplicada em 29 de agosto de 2026. As 22 resoluções acima são próprias e foram conferidas uma a uma por verificação numérica independente. O confronto final foi feito contra o gabarito preliminar divulgado pelo Serviço de Seleção do Pessoal da Marinha.