GEOMETRIA ESPACIAL

Curso Avançado

ENEM · OBMEP · OBM · Vestibulares · IME · ITA

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

ORCID 0009-0002-4473-8974

Rio de Janeiro · 2026

© 2026 Haroldo Costa Silva Filho. Todos os direitos reservados.

Autor: Haroldo Costa Silva Filho
ORCID: 0009-0002-4473-8974 — https://orcid.org/0009-0002-4473-8974

Título: Geometria Espacial
Subtítulo: Curso Avançado
1ª edição — Rio de Janeiro, 2026

Projeto gráfico, diagramação, figuras e capa: o autor.
Composto em LaTeX (pdfLaTeX); figuras vetoriais em TikZ.

ISBN 978-65-02-43375-1

Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou transmitida por qualquer forma ou meio sem a autorização escrita do autor.

SUMÁRIO

1 Geometria de Posição 7

2 Poliedros e a Relação de Euler 60

3 Poliedros Regulares 100

4 Prismas e Cilindros 147

5 Pirâmides, Cones e Troncos 224

6 Esferas e Partes da Esfera 320

A A integral: definição geométrica 406

B Geometria analítica no espaço 418

INTRODUÇÃO

O que se deixou de ensinar

Quem leciona Matemática no ensino médio há tempo suficiente assistiu a três conteúdos saírem de cena quase sem ruído: a geometria espacial, a geometria analítica no espaço e as noções de cálculo.

A geometria espacial resistiu mais que as outras duas, mas foi encolhendo. Hoje ela aparece, na maioria das escolas, como um bloco de fórmulas no fim do segundo ou do terceiro ano: áreas, volumes, o pouco que cai na prova. Sai do caminho a parte que realmente forma — a geometria de posição, os diedros, os triedros, as construções, os lugares geométricos, a demonstração. O aluno decora $V = \frac{1}{3}A_b h$ e nunca precisou justificar por que a pirâmide é um terço do prisma, nem enxergar a seção que um plano produz num cubo.

A geometria analítica no espaço simplesmente desapareceu. O ensino médio brasileiro trata reta e circunferência no plano e para por aí. Produto escalar, produto vetorial, equação do plano, distância de ponto a plano — tudo isso o estudante vai encontrar pela primeira vez na universidade, em velocidade de curso superior, sem nunca ter visto um vetor no espaço.

As noções de cálculo saíram ainda antes. Programas de décadas atrás traziam limite, derivada e uma ideia de integral no último ano; hoje, com raras exceções, o assunto não é sequer mencionado. O resultado é que a primeira vez que um estudante vê a ideia de taxa de variação, de aproximação e de passagem ao limite é também a primeira vez em que ela é cobrada em prova, com peso de aprovação.

A conta chega no primeiro período

Esses três abandonos não ficaram sem consequência, e eles não vieram sozinhos: a eles se somaram a redução da carga horária de Matemática, o desaparecimento da demonstração como hábito de sala de aula e a troca do problema que exige uma ideia pelo exercício de aplicação direta de fórmula.

A conta chega no primeiro período dos cursos de exatas. Cálculo I e Álgebra Linear figuram, ano após ano, entre as disciplinas de maior reprovação nas engenharias brasileiras — é um dos temas mais frequentes nos trabalhos apresentados no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia — e a explicação que os próprios departamentos apontam raramente é a dificuldade intrínseca da matéria nova. É a base: manipulação algébrica insegura, trigonometria frouxa e, sobretudo, ausência de visualização espacial.

O estrago em Álgebra Linear é ainda mais direto. Quem nunca viu um plano no espaço tem de aprender, ao mesmo tempo, o que é um plano, o que é um sistema linear e o que é um subespaço. Quem nunca calculou a distância entre duas retas reversas recebe a fórmula do produto misto sem ter o que enxergar por trás dela. E em Cálculo, a integral de superfície, o volume por seções e as coordenadas cilíndricas e esféricas pressupõem um aluno que já tenha pensado em sólidos — exatamente o que ele não fez.

O que este livro faz

Este livro foi escrito contra essa tendência, e com uma opção clara: tudo o que se afirma aqui é demonstrado.

Os seis capítulos percorrem a geometria espacial na ordem clássica — posição, poliedros, sólidos regulares, prismas e cilindros, pirâmides e cones, esferas — começando pela geometria de posição, que é justamente a parte sacrificada primeiro, e levando cada fórmula até a sua dedução. Nenhum problema do livro se resolve substituindo números numa fórmula: todos pedem uma ideia, ainda que pequena.

O **Apêndice A** apresenta a integral definida do ponto em que ela interessa aqui: como instrumento para obter volumes e áreas de superfície, e como confirmação de resultados que o corpo do livro já obteve por meios elementares — decomposição, Cavalieri, Pappus. É uma porta de entrada, não um curso de cálculo.

O **Apêndice B** é a geometria analítica no $\mathbb{R}^3$ que deveria estar no ensino médio: coordenadas, vetores, produto escalar, produto vetorial, produto misto, reta, plano, distâncias e ângulos, esfera. Cada fórmula é deduzida, e quase todas reaparecem, ao longo do livro, resolvendo pela segunda vez um problema já resolvido sinteticamente. O estudante que chegar à universidade tendo lido esse apêndice não vai ver Álgebra Linear pela primeira vez na sua primeira aula de Álgebra Linear.

Não se trata de antecipar a universidade. Trata-se de devolver ao ensino médio o que ele já teve e que nunca deveria ter perdido: a geometria do espaço, pensada com régua, desenho e demonstração, antes de qualquer fórmula.

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

1 Capítulo

Geometria de Posição

Antes de medir áreas e volumes, é preciso saber *como* retas e planos se arrumam no espaço. Este capítulo reúne os postulados, as posições relativas, o paralelismo e o perpendicularismo, os ângulos diedros e triédricos e a projeção ortogonal — a linguagem com que todo o resto do livro será escrito.

1.1 Postulados e determinação do plano

Ponto, reta e plano são noções primitivas. Sobre elas admitem-se os postulados:

P1. Dois pontos distintos determinam uma única reta.

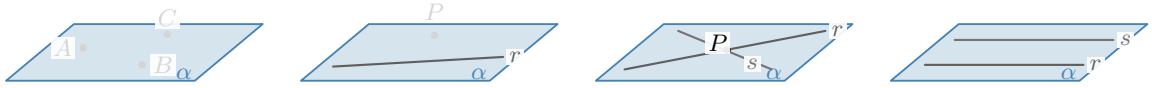
P2. Três pontos não colineares determinam um único plano.

P3. O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.

P4. Por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a ela.

P5. Se dois planos distintos têm um ponto comum, têm uma *reta* comum.

De P2 seguem as quatro maneiras clássicas de determinar um plano:



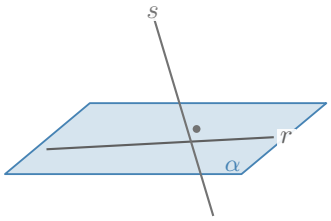
três pontos não colineares — reta r e ponto $P \notin r$ — concorrentes $r \cap s = \{P\}$ — paralelas distintas $r \parallel s$

Na prática. Um banco de três pés nunca balança, por mais torto que esteja o chão: as três extremidades são três pontos e, por P2, determinam um plano — o banco sempre acha o seu. Uma mesa de quatro pés só fica firme se as quatro pontas forem coplanares, e um milímetro de diferença já tira uma delas do plano das outras três. É por isso que tripés de câmera e de topografia têm três pernas.

1.2 Posições relativas

Duas retas

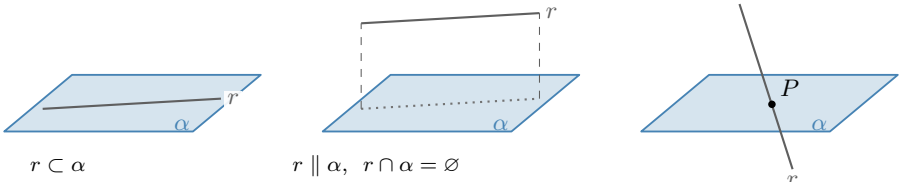
Duas retas são **coplanares** (e então *concorrentes* ou *paralelas*) ou **reversas**, quando não existe plano que contenha ambas.



r e s **reversas**: não existe plano que contenha as duas

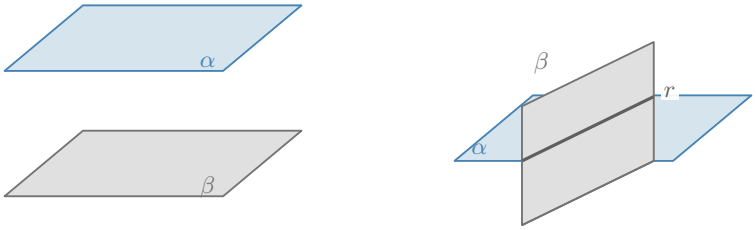
Retas reversas não têm ponto comum *e* não são paralelas. "Sem ponto comum" não significa "paralelas": este é o erro mais frequente nas questões de múltipla escolha deste capítulo.

Reta e plano



$r \subset \alpha$ $\quad r \parallel \alpha,\ r \cap \alpha = \varnothing$ $\quad$ secantes: $r \cap \alpha = \{P\}$

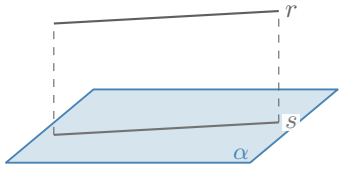
Dois planos



$\alpha \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = \varnothing$ $\quad$ secantes: $\alpha \cap \beta = r$

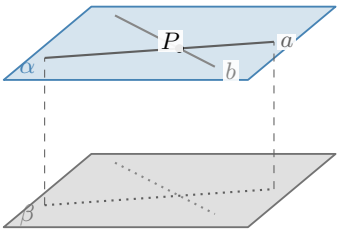
1.3 Paralelismo

(Reta e plano.) Se $r \not\subset \alpha$ e existe $s \subset \alpha$ com $r \parallel s$, então $r \parallel \alpha$. Reciprocamente, se $r \parallel \alpha$, todo plano que contém r e corta α o faz segundo uma reta paralela a r.



$r \not\subset \alpha,\ s \subset \alpha,\ r \parallel s \ \Rightarrow\ r \parallel \alpha$

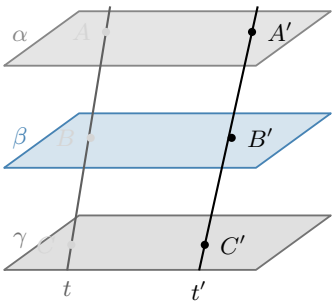
(Dois planos.) Se α contém duas retas *concorrentes* paralelas a β, então $\alpha \parallel \beta$.



$a, b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\},\ a \parallel \beta,\ b \parallel \beta \ \Rightarrow\ \alpha \parallel \beta$

Duas retas *paralelas* de α paralelas a β **não** garantem $\alpha \parallel \beta$: são necessárias duas *concorrentes*. Este é o contraexemplo cobrado em prova.

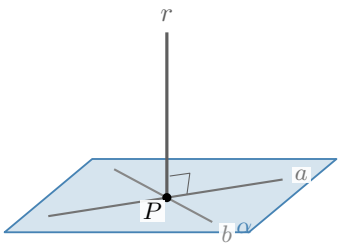
(Tales.) Um feixe de planos paralelos determina, sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

1.4 Perpendicularismo

(Reta e plano.) $r \perp \alpha$ se, e somente se, r é perpendicular a *duas retas concorrentes* de α. Nesse caso r é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo seu traço e ortogonal a todas as demais.



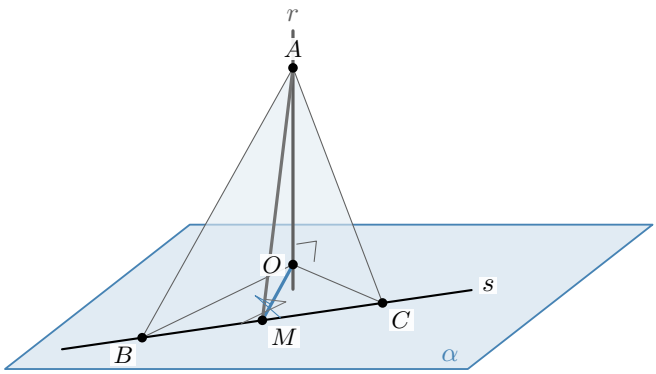
$r \perp a,\ r \perp b,\ a \cap b = \{P\},\ a, b \subset \alpha \ \Rightarrow\ r \perp \alpha$

Na prática. O prumo do pedreiro materializa uma reta perpendicular ao plano do chão. Se você quiser conferir se um poste está mesmo em pé, olhar de uma direção só não resolve: ele pode estar inclinado justamente para o lado de quem olha, e aí a inclinação não aparece. Por isso se afere o prumo de duas posições, uma a cerca de 90° da outra — é a hipótese do teorema

acima, as *duas retas concorrentes*.

(Teorema das três perpendiculares.) Seja $r \perp \alpha$ em O e seja $s \subset \alpha$ uma reta que *não* passa por O. Se $OM \perp s$, com $M \in s$, então, para todo ponto A de r,

$$AM \perp s.$$



$r \perp \alpha$ em O, $s \subset \alpha$ com $O \notin s$, $OM \perp s \implies AM \perp s$

Demonstração. Tomem-se em s os pontos B e C simétricos em relação a M. Como OM é mediatriz de $\overline{BC}$ em α, tem-se $OB = OC$; e como as oblíquas AB e AC a α têm projeções iguais, vale $AB = AC$. Logo o triângulo ABC é isósceles e sua mediana AM é também altura: $AM \perp s$. ■

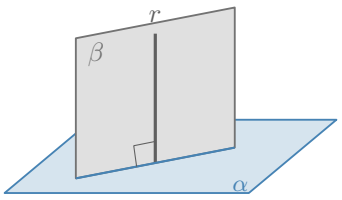
Recíprocas.

1. Se de um ponto de uma reta perpendicular a um plano se traça a perpendicular a uma reta do plano, a reta formada pelos pés das duas perpendiculares é perpendicular àquela reta do plano.
2. Se de um ponto exterior a um plano se traça a perpendicular a uma reta do plano e, pelo pé dessa perpendicular, se traça, *no plano*, a perpendicular àquela reta, então a perpendicular baixada do ponto exterior a esta última é perpendicular ao plano.

Com as notações da figura, AOM e AMB são retângulos, de modo que

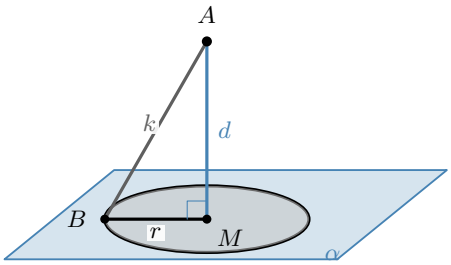
$$AM^2 = AO^2 + OM^2 \qquad \text{e} \qquad AB^2 = AM^2 + MB^2 = AO^2 + OM^2 + MB^2.$$

(Planos perpendiculares.) $\beta \perp \alpha$ se, e somente se, β contém uma reta perpendicular a α. Se $\beta \perp \alpha$, toda reta de β perpendicular à interseção é perpendicular a α.



$r \subset \beta$ e $r \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

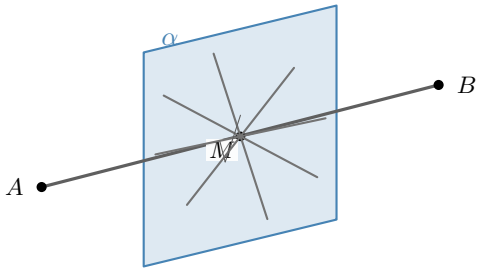
(Oblíquas e projeções.) Dado um ponto A exterior a α, com $AM \perp \alpha$ em M: oblíquas de projeções iguais são iguais, e, de duas oblíquas, é maior a de maior projeção. Em consequência, o **lugar geométrico** dos pontos de α que distam k de A é um **círculo** de centro M e raio $\sqrt{k^2 - d^2}$, onde $d = AM$; ele existe se, e somente se, $k > d$.



$r = \sqrt{k^2 - d^2}$ (existe se, e só se, $k > d$)

1.5 Plano mediador e lugares geométricos

(Plano mediador.) O plano perpendicular a $\overline{AB}$ em seu ponto médio M é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e de B.

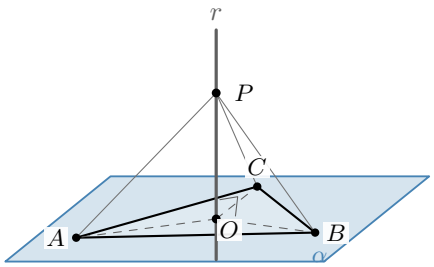


$\alpha \perp AB$ em seu ponto médio M: $P \in \alpha \iff PA = PB$

Três consequências para os lugares geométricos.

1. O lugar dos pontos equidistantes dos três vértices de um triângulo ABC é a **reta perpendicular ao plano** (A, B, C) **pelo circuncentro**, a interseção dos três planos mediadores dos lados.
2. Logo, essa reta é o lugar dos **centros de todas as superfícies esféricas que passam por** A**,** B **e** C.
3. Dados quatro pontos **não coplanares**, existe **um, e só um**, ponto equidistante deles, o centro da esfera circunscrita. É a interseção da reta do item 1 com o plano mediador de um quarto segmento.

Se os pontos forem *colineares*, os planos mediadores são paralelos e o lugar é **vazio**.



O = circuncentro; $PA = PB = PC$ para todo $P \in r$

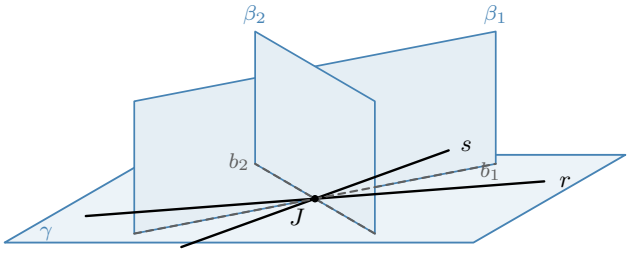
Planos bissetores

(Bissetor de um diedro.) O semiplano que divide um diedro em dois diedros congruentes é o lugar geométrico dos pontos do diedro equidistantes das suas duas faces.

Demonstração. Seja P um ponto do bissetor e tome o plano perpendicular à aresta por P: ele corta o diedro segundo um ângulo plano e o bissetor segundo a sua bissetriz. As distâncias de P às duas faces são medidas nesse plano (teorema das três perpendiculares) e são as distâncias de P aos lados do ângulo; a bissetriz é, na geometria plana, o lugar desses pontos. ■

Dois planos secantes. Os pontos equidistantes de dois planos secantes α e β formam **dois planos bissetores**, perpendiculares entre si: um por cada par de diedros opostos pela aresta. Se $\alpha \parallel \beta$, o lugar é o plano paralelo equidistante dos dois; e se $\alpha = \beta$, é o próprio plano.

(Equidistância a duas retas concorrentes.) Dadas duas retas concorrentes r e s, de plano γ, o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de r e de s é o par de planos β_1 e β_2, perpendiculares a γ e conduzidos pelas bissetrizes dos ângulos de r e s. Esses dois planos são perpendiculares entre si.



os pontos do espaço equidistantes das concorrentes r e s formam os dois planos β_1 e β_2, perpendiculares entre si, erguidos sobre as bissetrizes

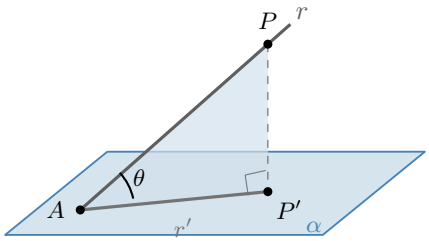
Demonstração. Seja P um ponto qualquer e P' a sua projeção sobre γ. Chamando d_r e d_s as distâncias de P' a r e a s, o teorema das três perpendiculares dá, para as distâncias de P às duas retas,

$$d(P,r) = \sqrt{PP'^2 + d_r^2}, \qquad d(P,s) = \sqrt{PP'^2 + d_s^2},$$

de modo que $d(P,r) = d(P,s)$ equivale a $d_r = d_s$, isto é, a P' pertencer a uma das duas bissetrizes. O lugar é, portanto, a reunião das duas perpendiculares a γ conduzidas por essas bissetrizes — os planos β_1 e β_2 —, e eles são perpendiculares entre si porque as bissetrizes o são. ■

Esse é o instrumento padrão dos problemas de lugar geométrico no espaço: *equidistar de dois pontos* dá um plano (o mediador), *equidistar de duas retas concorrentes* ou *de dois planos secantes* dá dois planos, e cada condição adicional corta o lugar anterior. Combinando duas condições obtêm-se, em geral, uma reta; combinando três, um ponto.

1.6 Projeção ortogonal, distâncias e ângulos



r' = projeção ortogonal de r sobre α; $\theta = \angle(r, \alpha)$

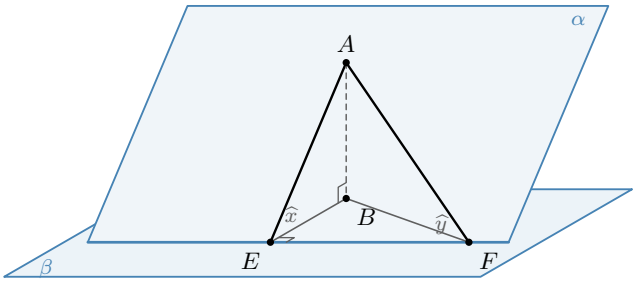
O ângulo entre uma reta oblíqua r e um plano α é o ângulo entre r e sua projeção ortogonal r' sobre α; é o *menor* ângulo que r forma com as retas de α.

Projeção de áreas. Se uma figura plana de área S contida em α se projeta ortogonalmente sobre β, e θ é o ângulo entre os planos, então a área da projeção é

$$S' = S \cdot \cos\theta.$$

A reta de máximo declive

Sejam α e β dois planos não paralelos. De todas as retas de α, as que formam com β o maior ângulo são as **perpendiculares à interseção** dos dois planos. Cada uma delas chama-se **reta de máximo declive** de α em relação a β.



$\overline{AE}$, perpendicular à interseção, é a reta de máximo declive de α em relação a β: $\widehat{x} > \widehat{y}$ para toda outra reta $\overline{AF}$

Demonstração. Tome A em α, fora da interseção, e seja B a sua projeção ortogonal sobre β. Seja E o pé, na interseção, da perpendicular baixada de A, e seja F outro ponto qualquer da interseção. Pelo teorema das três perpendiculares, $\overline{BE}$ também é perpendicular à interseção; logo, no triângulo retângulo BEF,

$$BE < BF.$$

Os ângulos $\widehat{x} = \widehat{AEB}$ e $\widehat{y} = \widehat{AFB}$ são os ângulos que $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ formam com β, e os triângulos ABE e ABF são retângulos em B, com o cateto $\overline{AB}$ comum:

$$\operatorname{tg}\widehat{x} = \frac{AB}{BE}, \qquad \operatorname{tg}\widehat{y} = \frac{AB}{BF} \implies \operatorname{tg}\widehat{x} > \operatorname{tg}\widehat{y} \implies \widehat{x} > \widehat{y}. \qquad \blacksquare$$

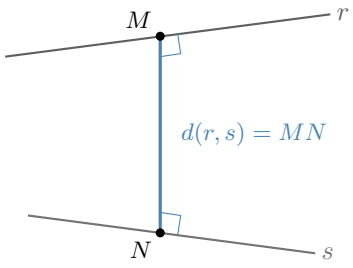
Três leituras.

1. O ângulo $\widehat{x}$ da reta de máximo declive com β é o **ângulo dos dois planos**: as retas de máximo declive são perpendiculares à aresta, e o ângulo entre elas é o ângulo plano do diedro.
2. Há *infinitas* retas de máximo declive de α em relação a β, todas paralelas entre si: única é a *direção* de maior declive.
3. A projeção, sobre β, de uma reta de máximo declive de α também é perpendicular à interseção e é, reciprocamente, de máximo declive de β em relação a α.

Na prática. É a reta que a água segue num telhado e a que o pedreiro chama de "caimento". Numa rampa de garagem, a inclinação anunciada — os 20% da placa — é medida na direção de maior declive; quem sobe a rampa na diagonal enfrenta uma inclinação menor, e é exatamente por isso que uma estrada de montanha sobe em ziguezague em vez de atacar a encosta de frente.

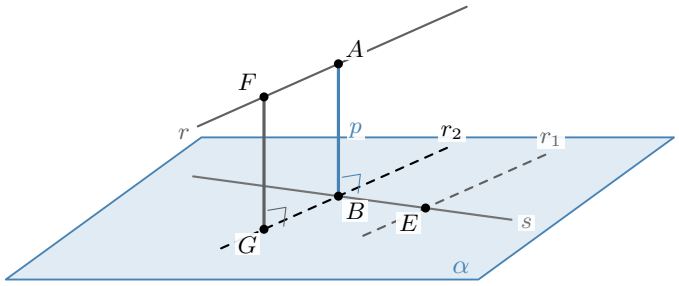
Um plano α fica determinado quando se dão o plano β e uma reta r oblíqua a β, sabendo-se que r é de máximo declive de α em relação a β: a interseção procurada tem de passar pelo traço de r em β e ser perpendicular a r, o que a determina; e ela, com r, fixa α. Se r fosse paralela a β, nenhum plano a teria por reta de máximo declive.

(Perpendicular comum.) Duas retas reversas r e s admitem *uma, e somente uma*, perpendicular comum. Além disso, de todos os segmentos com um extremo em r e outro em s, o da perpendicular comum é o **menor**; seu comprimento é, por definição, a **distância** entre r e s.



duas reversas admitem *uma única* perpendicular comum

Construção. Por um ponto E de s trace $r_1 \parallel r$; o plano $\alpha = (s, r_1)$ é paralelo a r. Por um ponto F de r baixe $FG \perp \alpha$ e, por G, trace $r_2 \parallel r$, que corta s em B. A paralela a FG por B encontra r em A: o segmento $\overline{AB}$ é a perpendicular comum procurada. Ela é única porque B é o único ponto obtido por essa construção.



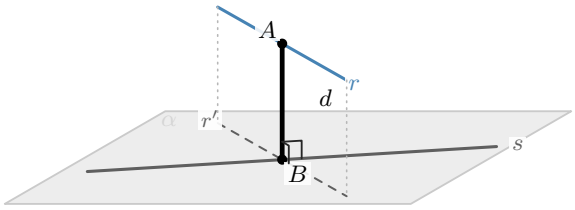
AB é a perpendicular comum às reversas r e s — e é única

Distância entre duas reversas

O comprimento da perpendicular comum é a distância entre as reversas, mas quase nunca se calcula traçando a perpendicular comum. Na prática usa-se um destes três caminhos.

Como calcular $d(r,s)$, com r e s reversas.

1. **Plano paralelo.** Se $\alpha \supset s$ e $\alpha \parallel r$, então $d(r,s) = d(P,\alpha)$, com P *qualquer* ponto de r.
2. **Planos paralelos.** Se $\alpha \supset r$, $\beta \supset s$ e $\alpha \parallel \beta$, então $d(r,s) = d(\alpha,\beta)$.
3. **Projeção.** Projetando ortogonalmente sobre um plano $\pi \perp s$, a reta s vira um *ponto* S' e r vira r'; então $d(r,s) = d(S', r')$.



Caso particular importante. Se uma das reversas é **perpendicular a um plano que contém a outra**, a perpendicular comum está *dentro desse plano*. Em símbolos: se $s \perp \pi$, $r \subset \pi$ e $\{O\} = s \cap \pi$, basta baixar de O a perpendicular a r dentro de π; seu pé P dá a perpendicular comum $\overline{OP}$. O problema espacial vira, assim, um problema de geometria **plana** na seção π, desenhada em verdadeira grandeza.

Em coordenadas. Se $r\colon A + t\,\vec{u}$ e $s\colon B + \lambda\,\vec{v}$, então

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}\,.$$

O numerador é o volume do paralelepípedo gerado por $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$; o denominador, a área da base.

Exercício resolvido — uma seção no cubo. No cubo $ABCDEFGH$ de aresta a (base $ABCD$, com E, F, G, H sobre A, B, C, D, respectivamente), calcule a distância entre a diagonal AG *do cubo* e a diagonal BD *da base*.

1. Escolher a seção. No quadrado $ABCD$, $BD \perp AC$. Além disso $AE \perp$ plano da base, logo

$AE \perp BD$. Então BD é perpendicular a duas retas concorrentes do plano $ACGE$ e, portanto,

$$BD \ \perp \ \text{plano } ACGE.$$

Essa é a **seção diagonal** do cubo, e ela contém AG.

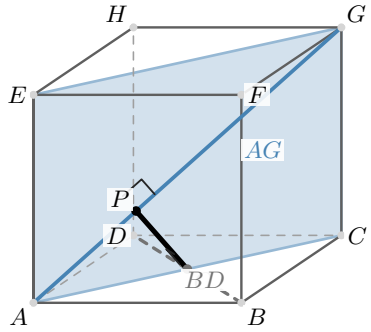
2. Aplicar o caso particular. BD fura a seção em O, centro do quadrado $ABCD$. Como $BD \perp ACGE$, qualquer segmento de O contido nessa seção já é perpendicular a BD. Basta então baixar de O a perpendicular a AG, *dentro da seção*: o pé P dá a perpendicular comum, e $d = OP$.

3. Resolver no plano. A seção $ACGE$ é o retângulo de lados $AC = a\sqrt{2}$ e $CG = a$; nela, $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e $AG = a\sqrt{3}$. No triângulo AOP, retângulo em P, o ângulo em A é o próprio $\widehat{GAC}$, e $\operatorname{sen}\widehat{GAC} = CG/AG = 1/\sqrt{3}$. Logo

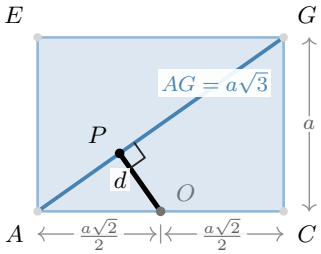
$$d = OP = AO \cdot \operatorname{sen}\widehat{GAC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}} \approx 0{,}408\,a.$$

Consequência. $AP = AO\cos\widehat{GAC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{AG}{3}$: o pé da perpendicular cai exatamente no **primeiro terço** da diagonal do cubo.

Conferência vetorial. Com A na origem, $\vec{u} = (1,1,1)$ (direção de AG), $\vec{v} = (-1,1,0)$ (direção de BD) e $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$: $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,-1,2)$, $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$ e $d = \dfrac{|-1|}{\sqrt{6}}\,a = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. ✓



a seção diagonal $ACGE$ contém AG e é $\perp BD$



Teorema da projetividade do ângulo reto. A projeção ortogonal de um ângulo reto é um ângulo reto se, e somente se, um de seus lados é paralelo ao plano de projeção (ou está contido nele) e o outro não lhe é perpendicular.