GEOMETRIA ESPACIAL

ENEM · OBMEP · EsPCEx · AFA · Escola Naval · IME · ITA

Capítulo 1 — Geometria de Posição

Capítulo 1 — Geometria de Posição. Teoria ilustrada com figuras vetoriais coloridas, **47 exercícios**, **20 questões de Aprofundamento**, **6 problemas de Complemento** e **6 questões de provas (OBMEP · ENEM · ITA)**, com gabarito e resoluções comentadas das 79.

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

1 Capítulo

Geometria de Posição

Antes de medir áreas e volumes, é preciso saber *como* retas e planos se arrumam no espaço. Este capítulo reúne os postulados, as posições relativas, o paralelismo e o perpendicularismo, os ângulos diedros e triédricos e a projeção ortogonal — a linguagem com que todo o resto do livro será escrito.

1.1 Postulados e determinação do plano

Ponto, reta e plano são noções primitivas. Sobre elas admitem-se os postulados:

P1. Dois pontos distintos determinam uma única reta.

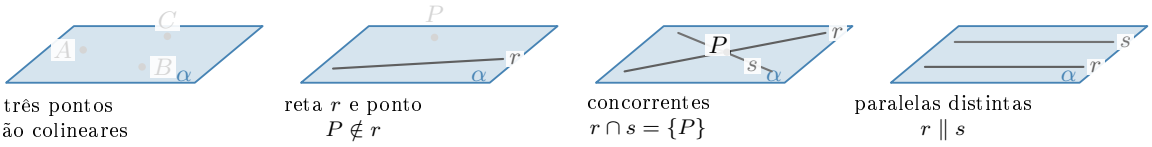
P2. Três pontos não colineares determinam um único plano.

P3. O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.

P4. Por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a ela.

P5. Se dois planos distintos têm um ponto comum, têm uma *reta* comum.

De P2 seguem as quatro maneiras clássicas de determinar um plano:



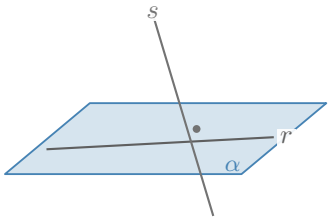
três pontos não colineares — reta r e ponto $P \notin r$ — concorrentes $r \cap s = \{P\}$ — paralelas distintas $r \parallel s$

Na prática. Um banco de três pés nunca balança, por mais torto que esteja o chão: as três extremidades são três pontos e, por P2, determinam um plano — o banco sempre acha o seu. Uma mesa de quatro pés só fica firme se as quatro pontas forem coplanares, e um milímetro de diferença já tira uma delas do plano das outras três. É por isso que tripés de câmera e de topografia têm três pernas.

1.2 Posições relativas

Duas retas

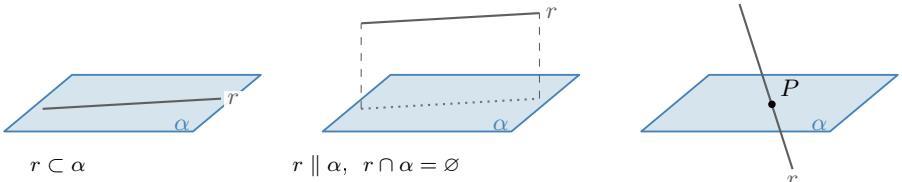
Duas retas são **coplanares** (e então *concorrentes* ou *paralelas*) ou **reversas**, quando não existe plano que contenha ambas.



r e s **reversas**: não existe plano que contenha as duas

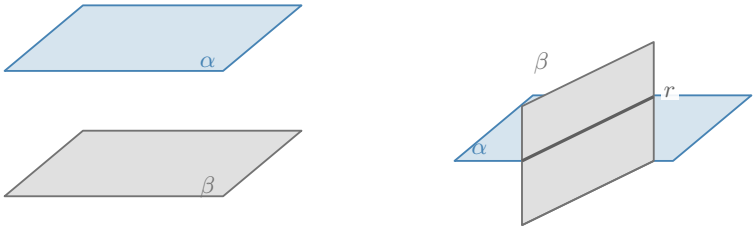
Retas reversas não têm ponto comum *e* não são paralelas. "Sem ponto comum" não significa "paralelas": este é o erro mais frequente nas questões de múltipla escolha deste capítulo.

Reta e plano



$r \subset \alpha$ $\quad r \parallel \alpha,\ r \cap \alpha = \varnothing$ $\quad$ secantes: $r \cap \alpha = \{P\}$

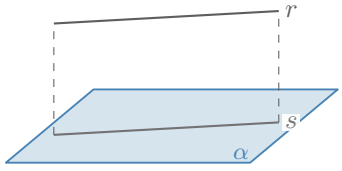
Dois planos



$\alpha \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = \varnothing$ $\quad$ secantes: $\alpha \cap \beta = r$

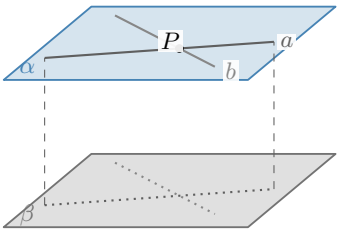
1.3 Paralelismo

(Reta e plano.) Se $r \not\subset \alpha$ e existe $s \subset \alpha$ com $r \parallel s$, então $r \parallel \alpha$. Reciprocamente, se $r \parallel \alpha$, todo plano que contém r e corta α o faz segundo uma reta paralela a r.



$r \not\subset \alpha,\ s \subset \alpha,\ r \parallel s \ \Rightarrow\ r \parallel \alpha$

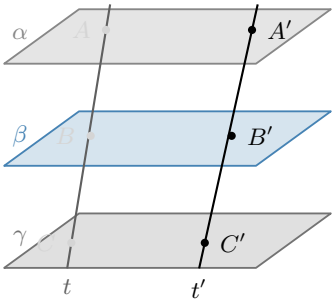
(Dois planos.) Se α contém duas retas *concorrentes* paralelas a β, então $\alpha \parallel \beta$.



$a, b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\},\ a \parallel \beta,\ b \parallel \beta \ \Rightarrow\ \alpha \parallel \beta$

Duas retas *paralelas* de α paralelas a β **não** garantem $\alpha \parallel \beta$: são necessárias duas *concorrentes*. Este é o contraexemplo cobrado em prova.

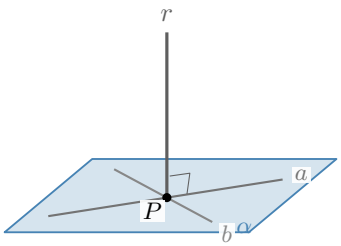
(Tales.) Um feixe de planos paralelos determina, sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

1.4 Perpendicularismo

(Reta e plano.) $r \perp \alpha$ se, e somente se, r é perpendicular a *duas retas concorrentes* de α. Nesse caso r é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo seu traço e ortogonal a todas as demais.



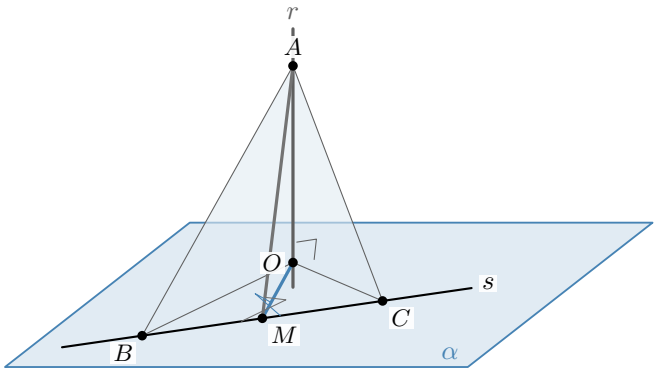
$r \perp a,\ r \perp b,\ a \cap b = \{P\},\ a, b \subset \alpha \ \Rightarrow\ r \perp \alpha$

Na prática. O prumo do pedreiro materializa uma reta perpendicular ao plano do chão. Se você quiser conferir se um poste está mesmo em pé, olhar de uma direção só não resolve: ele pode estar inclinado justamente para o lado de quem olha, e aí a inclinação não aparece. Por isso se afere o prumo de duas posições, uma a cerca de 90° da outra — é a hipótese do teorema

acima, as *duas retas concorrentes*.

(Teorema das três perpendiculares.) Seja $r \perp \alpha$ em O e seja $s \subset \alpha$ uma reta que *não* passa por O. Se $OM \perp s$, com $M \in s$, então, para todo ponto A de r,

$$AM \perp s.$$



$r \perp \alpha$ em O, $s \subset \alpha$ com $O \notin s$, $OM \perp s \implies AM \perp s$

Demonstração. Tomem-se em s os pontos B e C simétricos em relação a M. Como OM é mediatriz de $\overline{BC}$ em α, tem-se $OB = OC$; e como as oblíquas AB e AC a α têm projeções iguais, vale $AB = AC$. Logo o triângulo ABC é isósceles e sua mediana AM é também altura: $AM \perp s$. ■

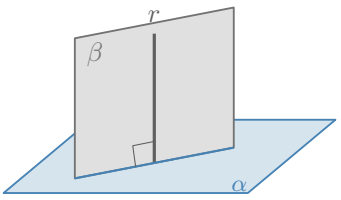
Recíprocas.

1. Se de um ponto de uma reta perpendicular a um plano se traça a perpendicular a uma reta do plano, a reta formada pelos pés das duas perpendiculares é perpendicular àquela reta do plano.
2. Se de um ponto exterior a um plano se traça a perpendicular a uma reta do plano e, pelo pé dessa perpendicular, se traça, *no plano*, a perpendicular àquela reta, então a perpendicular baixada do ponto exterior a esta última é perpendicular ao plano.

Com as notações da figura, AOM e AMB são retângulos, de modo que

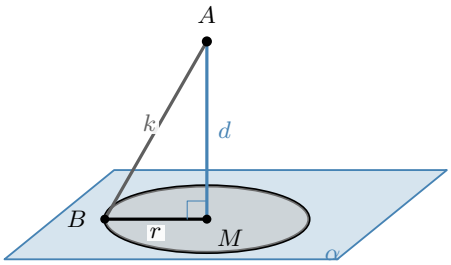
$$AM^2 = AO^2 + OM^2 \qquad \text{e} \qquad AB^2 = AM^2 + MB^2 = AO^2 + OM^2 + MB^2.$$

(Planos perpendiculares.) $\beta \perp \alpha$ se, e somente se, β contém uma reta perpendicular a α. Se $\beta \perp \alpha$, toda reta de β perpendicular à interseção é perpendicular a α.



$r \subset \beta$ e $r \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

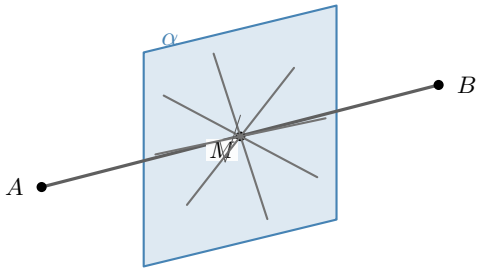
(Oblíquas e projeções.) Dado um ponto A exterior a α, com $AM \perp \alpha$ em M: oblíquas de projeções iguais são iguais, e, de duas oblíquas, é maior a de maior projeção. Em consequência, o **lugar geométrico** dos pontos de α que distam k de A é um **círculo** de centro M e raio $\sqrt{k^2 - d^2}$, onde $d = AM$; ele existe se, e somente se, $k > d$.



$r = \sqrt{k^2 - d^2}$ (existe se, e só se, $k > d$)

1.5 Plano mediador e lugares geométricos

(Plano mediador.) O plano perpendicular a $\overline{AB}$ em seu ponto médio M é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e de B.

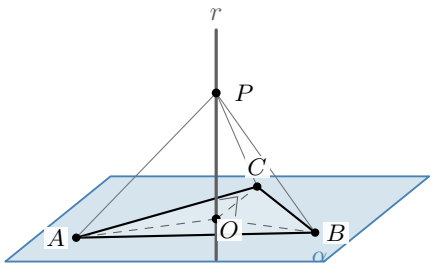


$\alpha \perp AB$ em seu ponto médio M: $P \in \alpha \iff PA = PB$

Três consequências para os lugares geométricos.

1. O lugar dos pontos equidistantes dos três vértices de um triângulo ABC é a **reta perpendicular ao plano** (A, B, C) **pelo circuncentro**, a interseção dos três planos mediadores dos lados.
2. Logo, essa reta é o lugar dos **centros de todas as superfícies esféricas que passam por** A**,** B **e** C.
3. Dados quatro pontos **não coplanares**, existe **um, e só um**, ponto equidistante deles, o centro da esfera circunscrita. É a interseção da reta do item 1 com o plano mediador de um quarto segmento.

Se os pontos forem *colineares*, os planos mediadores são paralelos e o lugar é **vazio**.



O = circuncentro; $PA = PB = PC$ para todo $P \in r$

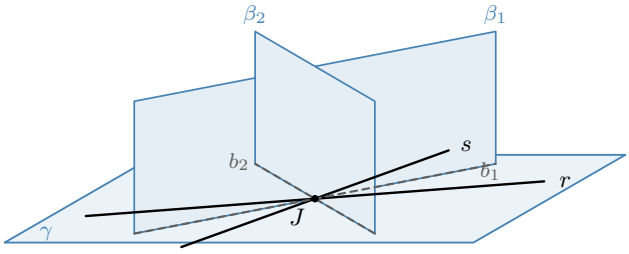
Planos bissetores

(Bissetor de um diedro.) O semiplano que divide um diedro em dois diedros congruentes é o lugar geométrico dos pontos do diedro equidistantes das suas duas faces.

Demonstração. Seja P um ponto do bissetor e tome o plano perpendicular à aresta por P: ele corta o diedro segundo um ângulo plano e o bissetor segundo a sua bissetriz. As distâncias de P às duas faces são medidas nesse plano (teorema das três perpendiculares) e são as distâncias de P aos lados do ângulo; a bissetriz é, na geometria plana, o lugar desses pontos. ■

Dois planos secantes. Os pontos equidistantes de dois planos secantes α e β formam **dois planos bissetores**, perpendiculares entre si: um por cada par de diedros opostos pela aresta. Se $\alpha \parallel \beta$, o lugar é o plano paralelo equidistante dos dois; e se $\alpha = \beta$, é o próprio plano.

(Equidistância a duas retas concorrentes.) Dadas duas retas concorrentes r e s, de plano γ, o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de r e de s é o par de planos β_1 e β_2, perpendiculares a γ e conduzidos pelas bissetrizes dos ângulos de r e s. Esses dois planos são perpendiculares entre si.



os pontos do espaço equidistantes das concorrentes r e s formam os dois planos β_1 e β_2, perpendiculares entre si, erguidos sobre as bissetrizes

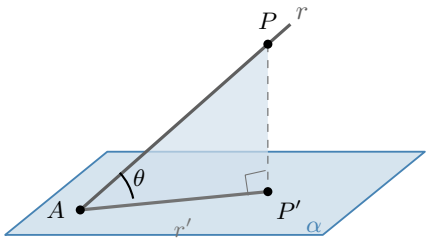
Demonstração. Seja P um ponto qualquer e P' a sua projeção sobre γ. Chamando d_r e d_s as distâncias de P' a r e a s, o teorema das três perpendiculares dá, para as distâncias de P às duas retas,

$$d(P,r) = \sqrt{PP'^2 + d_r^2}, \qquad d(P,s) = \sqrt{PP'^2 + d_s^2},$$

de modo que $d(P,r) = d(P,s)$ equivale a $d_r = d_s$, isto é, a P' pertencer a uma das duas bissetrizes. O lugar é, portanto, a reunião das duas perpendiculares a γ conduzidas por essas bissetrizes — os planos β_1 e β_2 —, e eles são perpendiculares entre si porque as bissetrizes o são. ■

Esse é o instrumento padrão dos problemas de lugar geométrico no espaço: *equidistar de dois pontos* dá um plano (o mediador), *equidistar de duas retas concorrentes* ou *de dois planos secantes* dá dois planos, e cada condição adicional corta o lugar anterior. Combinando duas condições obtêm-se, em geral, uma reta; combinando três, um ponto.

1.6 Projeção ortogonal, distâncias e ângulos



r' = projeção ortogonal de r sobre α; $\theta = \angle(r, \alpha)$

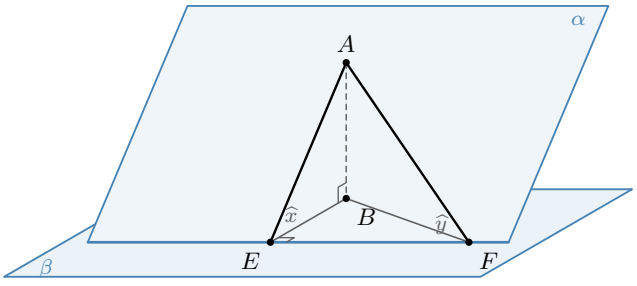
O ângulo entre uma reta oblíqua r e um plano α é o ângulo entre r e sua projeção ortogonal r' sobre α; é o *menor* ângulo que r forma com as retas de α.

Projeção de áreas. Se uma figura plana de área S contida em α se projeta ortogonalmente sobre β, e θ é o ângulo entre os planos, então a área da projeção é

$$S' = S \cdot \cos\theta.$$

A reta de máximo declive

Sejam α e β dois planos não paralelos. De todas as retas de α, as que formam com β o maior ângulo são as **perpendiculares à interseção** dos dois planos. Cada uma delas chama-se **reta de máximo declive** de α em relação a β.



$\overline{AE}$, perpendicular à interseção, é a reta de máximo declive de α em relação a β: $\widehat{x} > \widehat{y}$ para toda outra reta $\overline{AF}$

Demonstração. Tome A em α, fora da interseção, e seja B a sua projeção ortogonal sobre β. Seja E o pé, na interseção, da perpendicular baixada de A, e seja F outro ponto qualquer da interseção. Pelo teorema das três perpendiculares, $\overline{BE}$ também é perpendicular à interseção; logo, no triângulo retângulo BEF,

$$BE < BF.$$

Os ângulos $\widehat{x} = \widehat{AEB}$ e $\widehat{y} = \widehat{AFB}$ são os ângulos que $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ formam com β, e os triângulos ABE e ABF são retângulos em B, com o cateto $\overline{AB}$ comum:

$$\operatorname{tg}\widehat{x} = \frac{AB}{BE}, \qquad \operatorname{tg}\widehat{y} = \frac{AB}{BF} \implies \operatorname{tg}\widehat{x} > \operatorname{tg}\widehat{y} \implies \widehat{x} > \widehat{y}. \qquad \blacksquare$$

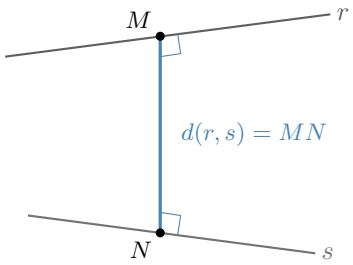
Três leituras.

1. O ângulo $\widehat{x}$ da reta de máximo declive com β é o **ângulo dos dois planos**: as retas de máximo declive são perpendiculares à aresta, e o ângulo entre elas é o ângulo plano do diedro.
2. Há *infinitas* retas de máximo declive de α em relação a β, todas paralelas entre si: única é a *direção* de maior declive.
3. A projeção, sobre β, de uma reta de máximo declive de α também é perpendicular à interseção e é, reciprocamente, de máximo declive de β em relação a α.

Na prática. É a reta que a água segue num telhado e a que o pedreiro chama de "caimento". Numa rampa de garagem, a inclinação anunciada — os 20% da placa — é medida na direção de maior declive; quem sobe a rampa na diagonal enfrenta uma inclinação menor, e é exatamente por isso que uma estrada de montanha sobe em ziguezague em vez de atacar a encosta de frente.

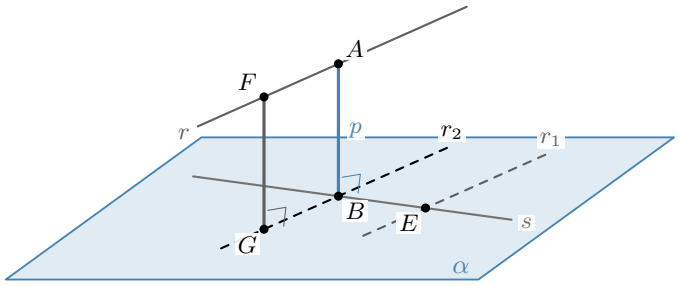
Um plano α fica determinado quando se dão o plano β e uma reta r oblíqua a β, sabendo-se que r é de máximo declive de α em relação a β: a interseção procurada tem de passar pelo traço de r em β e ser perpendicular a r, o que a determina; e ela, com r, fixa α. Se r fosse paralela a β, nenhum plano a teria por reta de máximo declive.

(Perpendicular comum.) Duas retas reversas r e s admitem *uma, e somente uma*, perpendicular comum. Além disso, de todos os segmentos com um extremo em r e outro em s, o da perpendicular comum é o **menor**; seu comprimento é, por definição, a **distância** entre r e s.



duas reversas admitem *uma única* perpendicular comum

Construção. Por um ponto E de s trace $r_1 \parallel r$; o plano $\alpha = (s, r_1)$ é paralelo a r. Por um ponto F de r baixe $FG \perp \alpha$ e, por G, trace $r_2 \parallel r$, que corta s em B. A paralela a FG por B encontra r em A: o segmento $\overline{AB}$ é a perpendicular comum procurada. Ela é única porque B é o único ponto obtido por essa construção.



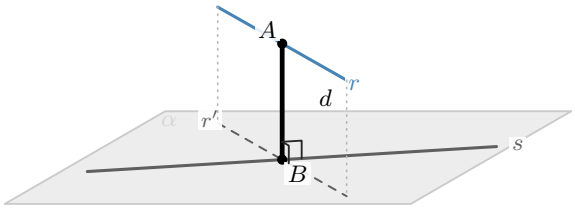
AB é a perpendicular comum às reversas r e s — e é única

Distância entre duas reversas

O comprimento da perpendicular comum é a distância entre as reversas, mas quase nunca se calcula traçando a perpendicular comum. Na prática usa-se um destes três caminhos.

Como calcular $d(r,s)$, com r e s reversas.

1. **Plano paralelo.** Se $\alpha \supset s$ e $\alpha \parallel r$, então $d(r,s) = d(P,\alpha)$, com P *qualquer* ponto de r.
2. **Planos paralelos.** Se $\alpha \supset r$, $\beta \supset s$ e $\alpha \parallel \beta$, então $d(r,s) = d(\alpha,\beta)$.
3. **Projeção.** Projetando ortogonalmente sobre um plano $\pi \perp s$, a reta s vira um *ponto* S' e r vira r'; então $d(r,s) = d(S', r')$.



Caso particular importante. Se uma das reversas é **perpendicular a um plano que contém a outra**, a perpendicular comum está *dentro desse plano*. Em símbolos: se $s \perp \pi$, $r \subset \pi$ e $\{O\} = s \cap \pi$, basta baixar de O a perpendicular a r dentro de π; seu pé P dá a perpendicular comum $\overline{OP}$. O problema espacial vira, assim, um problema de geometria **plana** na seção π, desenhada em verdadeira grandeza.

Em coordenadas. Se $r\colon A + t\,\vec{u}$ e $s\colon B + \lambda\,\vec{v}$, então

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

O numerador é o volume do paralelepípedo gerado por $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$; o denominador, a área da base.

Exercício resolvido — uma seção no cubo. No cubo $ABCDEFGH$ de aresta a (base $ABCD$, com E, F, G, H sobre A, B, C, D, respectivamente), calcule a distância entre a diagonal AG *do cubo* e a diagonal BD *da base*.

1. Escolher a seção. No quadrado $ABCD$, $BD \perp AC$. Além disso $AE \perp$ plano da base, logo

$AE \perp BD$. Então BD é perpendicular a duas retas concorrentes do plano $ACGE$ e, portanto,

$$BD \ \perp \ \text{plano } ACGE.$$

Essa é a **seção diagonal** do cubo, e ela contém AG.

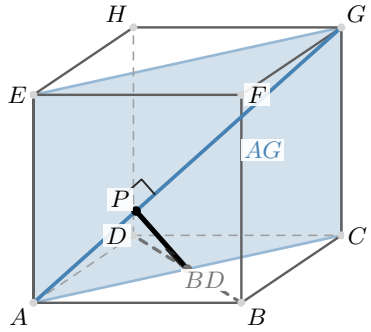
2. Aplicar o caso particular. BD fura a seção em O, centro do quadrado $ABCD$. Como $BD \perp ACGE$, qualquer segmento de O contido nessa seção já é perpendicular a BD. Basta então baixar de O a perpendicular a AG, *dentro da seção*: o pé P dá a perpendicular comum, e $d = OP$.

3. Resolver no plano. A seção $ACGE$ é o retângulo de lados $AC = a\sqrt{2}$ e $CG = a$; nela, $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e $AG = a\sqrt{3}$. No triângulo AOP, retângulo em P, o ângulo em A é o próprio $\widehat{GAC}$, e $\operatorname{sen}\widehat{GAC} = CG/AG = 1/\sqrt{3}$. Logo

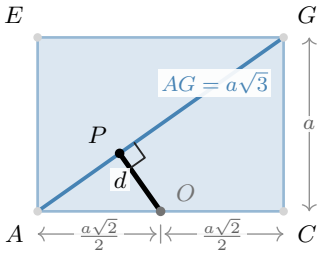
$$d = OP = AO \cdot \operatorname{sen}\widehat{GAC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}} \approx 0{,}408\,a.$$

Consequência. $AP = AO\cos\widehat{GAC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{AG}{3}$: o pé da perpendicular cai exatamente no **primeiro terço** da diagonal do cubo.

Conferência vetorial. Com A na origem, $\vec{u} = (1,1,1)$ (direção de AG), $\vec{v} = (-1,1,0)$ (direção de BD) e $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$: $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,-1,2)$, $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$ e $d = \dfrac{|-1|}{\sqrt{6}}\,a = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. ✓

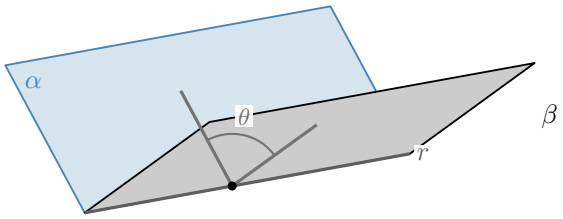


a seção diagonal $ACGE$ contém AG e é $\perp BD$



Teorema da projetividade do ângulo reto. A projeção ortogonal de um ângulo reto é um ângulo reto se, e somente se, um de seus lados é paralelo ao plano de projeção (ou está contido nele) e o outro não lhe é perpendicular.

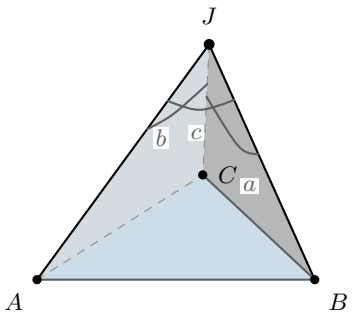
1.7 Diedros, triedros e ângulos poliédricos



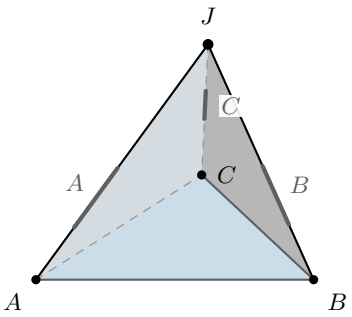
a medida do diedro é a da sua *seção reta* (plano $\perp$ à aresta r)

Triedro: notação

Triedro é o ângulo sólido de três arestas, e é sempre convexo, pois todo plano que corta as três arestas produz um triângulo. Num triedro $J-ABC$ há *seis* elementos: três **ângulos faces**, designados por letras minúsculas iguais às da aresta *oposta*, e três **ângulos diedros**, designados pelas maiúsculas das arestas correspondentes.



ângulos **faces**: a, b, c



ângulos **diedros**: A, B, C

Tipos notáveis

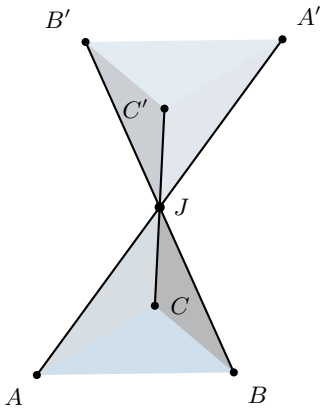
Simétricos. Dois triedros são simétricos quando as arestas de um são os prolongamentos das arestas do outro. Têm faces iguais (opostas pelo vértice) e diedros iguais (opostos pela aresta), mas, em geral, *não* são superponíveis.

Suplementares. Dois triedros são suplementares quando as faces de cada um são os suplementos dos diedros do outro:

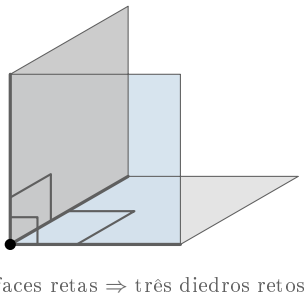
$$a + A' = 180^\circ, \quad b + B' = 180^\circ, \quad c + C' = 180^\circ,$$
$$a' + A = 180^\circ, \quad b' + B = 180^\circ, \quad c' + C = 180^\circ.$$

Isósceles. Um triedro com duas faces iguais tem também dois diedros iguais: os planos das faces iguais são simétricos em relação ao plano bissetor da terceira face.

Trirretângulo. Tem as três faces retas; daí os três diedros também são retos, e todos os triedros trirretângulos são iguais entre si.



arestas prolongadas além de J:
faces e diedros respectivamente iguais



três faces retas ⇒ três diedros retos

Relações entre as faces

Em todo triedro, cada ângulo face é **menor que a soma** e **maior que a diferença** dos outros dois; e a soma das três faces é menor que quatro retos.

Dados três ângulos $a > b > c$, eles são as faces de um triedro se, e somente se,

$$a + b + c < 360^\circ, \qquad a < b + c, \qquad c > a - b.$$

Basta verificar as desigualdades para a *maior* e a *menor* face: as demais seguem por maioria de razão.

A cota $a + b + c < 360^\circ$ obtém-se prolongando a aresta JA além de J, formando o triedro adjacente, cujas faces são a, $180^\circ - b$ e $180^\circ - c$. Aplicando a ele "cada face é menor que a soma das outras duas",

$$a < (180^\circ - b) + (180^\circ - c) \implies a + b + c < 360^\circ.$$

O mesmo argumento, num ângulo poliédrico convexo de n arestas, dá $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 360^\circ$ e $a_i < \sum_{j \neq i} a_j$.

Relações entre os diedros

Em todo triedro,

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ \qquad \text{e} \qquad A + 180^\circ > B + C.$$

Demonstração. Aplique as relações das faces ao triedro *suplementar*. De $A + a' = B + b' = C + c' = 180^\circ$ vem $A + B + C = 540^\circ - (a' + b' + c')$; como $0 < a' + b' + c' < 360^\circ$, sai a dupla desigualdade.

E de $a' < b' + c'$, isto é, $180° - A < (180° - B) + (180° - C)$, sai $A + 180° > B + C$. ■

O triedro suplementar. Toda relação entre *faces* tem uma correspondente entre *diedros*, obtida trocando cada elemento pelo seu suplemento. As duas desigualdades correspondentes são:

$$\underbrace{a < b + c}_{\text{faces}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underbrace{A + 180° > B + C}_{\text{diedros}}$$

Igualdade de triedros

Dois triedros são iguais quando têm, igualmente dispostos:

1. uma face igual compreendida entre dois diedros iguais;
2. um diedro igual compreendido entre duas faces iguais;
3. as três faces respectivamente iguais;
4. os três diedros respectivamente iguais.

O caso 4 não tem análogo na geometria plana: dois triângulos de ângulos iguais são apenas *semelhantes*, mas dois triedros de diedros iguais são *iguais*.

As relações trigonométricas

Lei dos cossenos das faces

$$\cos a = \cos b \, \cos c + \operatorname{sen} b \, \operatorname{sen} c \, \cos A$$

Lei dos cossenos dos diedros (a anterior aplicada ao suplementar)

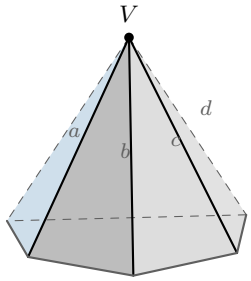
$$\cos A = -\cos B \, \cos C + \operatorname{sen} B \, \operatorname{sen} C \, \cos a$$

Lei dos senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

No triedro trirretângulo, $a = b = c = 90°$ e a lei dos cossenos dá $\cos A = 0$: os três diedros são retos. E, se $A = 90°$, ela se reduz a $\cos a = \cos b \, \cos c$ — o **Pitágoras esférico**.

Ângulo poliédrico convexo

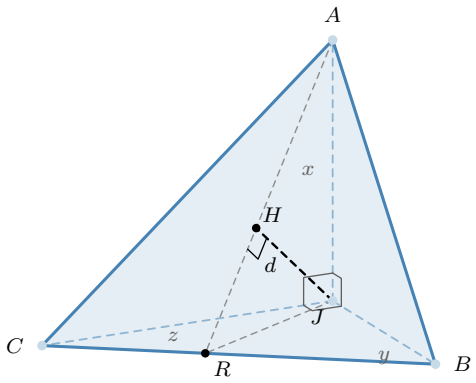


$a + b + c + d + \cdots < 360°$

Roteiro dos problemas de triedro. Para achar o intervalo de variação de uma face x, imponha as *três* condições e intersecte: $0 < x < 180°$; $x <$ soma das outras duas; soma das três $< 360°$ (esta última dá a cota superior). Para diedros, use $A + B < C + 180°$ e $180° < A + B + C < 540°$.

1.8 O triedro trirretângulo

Um triedro é **trirretângulo** quando suas três faces são ângulos retos , o "canto de sala". Um plano que corte suas três arestas determina o triângulo-seção ABC, e três teoremas clássicos governam essa configuração.



triedro trirretângulo de vértice J:
H é o ortocentro de ABC e $JH \perp ABC$

1. (Ortocentro.) A projeção ortogonal H do vértice J sobre o plano secante é o **ortocentro** do triângulo ABC.

De fato, $JA \perp$ plano JBC e $JH \perp$ plano ABC; as duas são ortogonais a BC, logo o plano (J, A, H) é perpendicular a BC e, portanto, $AH \perp BC$: a aresta JA projeta-se segundo a *altura* de ABC relativa a A. O mesmo vale para as outras duas arestas, e H é o ponto comum às três alturas.

2. (Relação dos inversos.) Sendo $x = JA$, $y = JB$, $z = JC$ e $d = JH$ a distância do vértice

ao plano secante,

$$\boxed{\frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$$

Basta aplicar duas vezes a relação métrica do triângulo retângulo. Sendo R o pé da altura de ABC relativa a A, o triângulo JAR é retângulo em J e dá $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{JR^2}$; o triângulo JBC, retângulo em J, dá $\dfrac{1}{JR^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$. Substituindo, sai a fórmula.

3. (Teorema de De Gua.) O quadrado da área de uma figura contida no plano secante é igual à soma dos quadrados das áreas de suas projeções ortogonais sobre as três faces do triedro:

$$\boxed{S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

Em particular, para o próprio triângulo ABC: (área $ABC)^2 =$ (área $JBC)^2 +$ (área $JAC)^2 +$ (área $JAB)^2$ — o "Pitágoras do tetraedro".

Com α, β, γ os ângulos do plano secante com as três faces, $S_i = S\cos(\cdot)$ e, como $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (os cossenos diretores da normal), segue o resultado.

Essa mesma identidade $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ vale para os ângulos que *qualquer* reta pelo vértice forma com as três arestas do triedro trirretângulo — é o Pitágoras do paralelepípedo retângulo escrito com cossenos.

Origem do nome. Jean Paul de Gua de Malves (1713–1785), matemático francês, publicou o resultado em **1783** nas *Mémoires* da Academia de Ciências de Paris — daí "teorema de **De** Gua" (o *De* é partícula nobiliárquica, e não preposição).
O teorema, porém, é bem mais antigo que o nome: já era conhecido de **Johann Faulhaber** (1580–1635) e de **Descartes**. De Gua ficou com o crédito por tê-lo enunciado e demonstrado em publicação, um exemplo da *lei de Stigler*, segundo a qual nenhuma descoberta científica leva o nome de quem a fez primeiro. Foi também De Gua quem propôs ao editor Le Breton o projeto original da *Encyclopédie*, depois assumido por Diderot e d'Alembert.

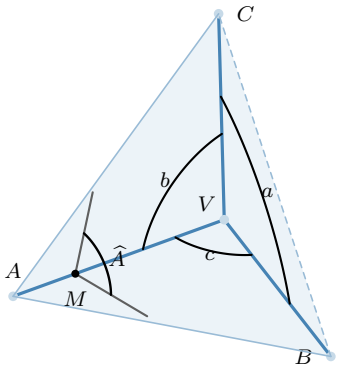
1.9 Trigonometria do triedro

As relações da seção anterior são *desigualdades*: dizem quando três ângulos podem ser as faces de um triedro, mas não calculam nada. As identidades que fazem esse trabalho são três, e são o análogo espacial da lei dos cossenos e da lei dos senos do triângulo.

Fixe o triedro $V-ABC$ e tome sobre as arestas os vetores unitários $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. As faces são

$$a = \widehat{(\vec{v},\vec{w})}, \qquad b = \widehat{(\vec{u},\vec{w})}, \qquad c = \widehat{(\vec{u},\vec{v})},$$

e $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ são os diedros das arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.



faces a, b, c e o diedro $\widehat{A}$ da aresta VA,
lido na seção reta por M

(Lei dos cossenos do triedro.) Em todo triedro,

$$\cos a = \cos b\,\cos c + \operatorname{sen} b\,\operatorname{sen} c\,\cos\widehat{A},$$

e as duas relações análogas obtidas por permutação circular.

Demonstração. Escolha os eixos de modo que $\vec{u} = (1,0,0)$ e que $\vec{v}$ esteja no plano Oxy, com segunda coordenada positiva:

$$\vec{v} = (\cos c,\ \operatorname{sen} c,\ 0).$$

O vetor $\vec{w}$ faz ângulo b com $\vec{u}$, logo sua primeira coordenada é $\cos b$; a parte de $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ tem comprimento $\operatorname{sen} b$ e forma, com a parte de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u}$, exatamente o diedro $\widehat{A}$ — é a definição de ângulo diedro, lida na seção reta da aresta $\vec{u}$. Portanto

$$\vec{w} = (\cos b,\ \operatorname{sen} b\cos\widehat{A},\ \operatorname{sen} b\operatorname{sen}\widehat{A}).$$

Basta agora calcular $\cos a = \vec{v}\cdot\vec{w}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \cos c\cos b + \operatorname{sen} c\operatorname{sen} b\cos\widehat{A},$$

como se queria demonstrar. ■

Com $\widehat{A} = 90^\circ$ a relação vira $\cos a = \cos b\cos c$: é o **teorema de Pitágoras do triedro trirretângulo em uma aresta**. Com $b = c = 90^\circ$ vira $a = \widehat{A}$: as faces adjacentes a uma aresta, quando retas, transportam o diedro para a terceira face.

(Lei dos senos do triedro.) Em todo triedro,

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen} c}.$$

Demonstração. Com as coordenadas acima,

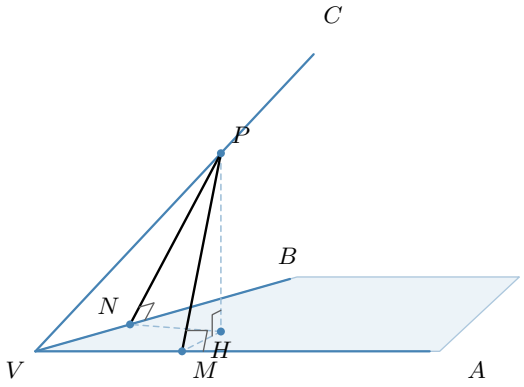
$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos c & \operatorname{sen} c & 0 \\ \cos b & \operatorname{sen} b\cos\widehat{A} & \operatorname{sen} b\operatorname{sen}\widehat{A} \end{pmatrix} = \operatorname{sen} b\,\operatorname{sen} c\,\operatorname{sen}\widehat{A}.$$

Mas o produto misto não depende de qual aresta foi escolhida para o eixo Ox: repetindo a construção a partir de $\vec{v}$ e de $\vec{w}$ obtêm-se o mesmo número. Logo

$$\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen} c\operatorname{sen} a\operatorname{sen}\widehat{B} = \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\widehat{C},$$

e basta dividir tudo por $\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c$, que é positivo. ■

Segunda demonstração, sem vetores. Tome na aresta VC um ponto P com $VP = 1$. Seja H o pé da perpendicular baixada de P ao plano da face AVB, e sejam M e N os pés das perpendiculares de P às arestas VA e VB.



$PM \perp VA$ e $HM \perp VA$;
logo $P\widehat{M}H$ é o diedro de aresta VA

Como $\overline{PH}$ é perpendicular ao plano e $\overline{PM} \perp VA$, o teorema das três perpendiculares (seção 1.4) dá $\overline{HM} \perp VA$. Logo o ângulo $P\widehat{M}H$ é medido na seção reta da aresta VA: é o diedro $\widehat{A}$. Do mesmo modo, $P\widehat{N}H = \widehat{B}$.

No triângulo VMP, retângulo em M, o ângulo em V é a face b — o ângulo entre VC e VA —, e de $VP = 1$ vem $PM = \operatorname{sen} b$. No triângulo PHM, retângulo em H,

$$PH = PM\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen} b\operatorname{sen}\widehat{A}.$$

Repetindo o argumento com a aresta VB, o ângulo em V do triângulo VNP é a face a, de modo que $PN = \operatorname{sen} a$ e

$$PH = PN\operatorname{sen}\widehat{B} = \operatorname{sen} a\operatorname{sen}\widehat{B}.$$

A altura PH é uma só, logo

$$\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen} a\operatorname{sen}\widehat{B} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen} b},$$

e um ponto tomado na aresta VA, em vez de VC, fornece a terceira igualdade. ■

Quando o triedro é muito aberto, H pode cair fora do ângulo $A\widehat{V}B$, e então $P\widehat{M}H$ é o *suplemento* do diedro. Como os dois ângulos têm o mesmo seno, e é o seno que entra em $PH = PM\,\operatorname{sen} P\widehat{M}H$, a conclusão não muda.

Volume do triedro unitário. O produto misto comum às três leituras vale

$$D = \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c},$$

expressão simétrica nas três faces. Daí, para arestas de comprimentos p, q, r sobre as três semirretas,

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{p\,q\,r}{6}\,D.$$

Demonstração. Eleve ao quadrado a lei dos cossenos: $\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c\cos^2\widehat{A} = (\cos a-\cos b\cos c)^2$. Então

$$D^2 = \operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2\widehat{A} = \operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2,$$

e desenvolver o segundo membro, usando $\operatorname{sen}^2 = 1-\cos^2$, dá exatamente $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$. ■

(Lei dos cossenos dos diedros.) Em todo triedro,

$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\operatorname{sen}\widehat{B}\operatorname{sen}\widehat{C}\cos a.$$

Demonstração. Aplique a lei dos cossenos das faces ao triedro *suplementar*, cujas faces são $a' = 180^\circ-\widehat{A}$, $b' = 180^\circ-\widehat{B}$, $c' = 180^\circ-\widehat{C}$ e cujos diedros são $\widehat{A'} = 180^\circ-a$, e análogos (seção 1.7):

$$\cos a' = \cos b'\cos c'+\operatorname{sen} b'\operatorname{sen} c'\cos\widehat{A'}.$$

Substituindo $\cos a' = -\cos\widehat{A}$, $\cos b' = -\cos\widehat{B}$, $\cos c' = -\cos\widehat{C}$, $\operatorname{sen} b' = \operatorname{sen}\widehat{B}$, $\operatorname{sen} c' = \operatorname{sen}\widehat{C}$ e $\cos\widehat{A'} = -\cos a$:

$$-\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B}\cos\widehat{C}-\operatorname{sen}\widehat{B}\operatorname{sen}\widehat{C}\cos a,$$

que é a relação anunciada. ■

A segunda lei dos cossenos não tem análogo no plano, e é ela que explica a **rigidez** do triedro: conhecidos os três *diedros*, as três faces ficam determinadas. No plano, três ângulos determinam a forma mas não o tamanho de um triângulo; no triedro não há "tamanho" a determinar — e por isso não existem triedros semelhantes e diferentes.

O diedro do tetraedro regular. Num tetraedro regular as três faces do triedro de um vértice medem 60°. Pela lei dos cossenos,

$$\cos 60^\circ = \cos^2 60^\circ+\operatorname{sen}^2 60^\circ\cos\widehat{A} \;\Longrightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\widehat{A} \;\Longrightarrow\; \cos\widehat{A} = \frac{1}{3},$$

isto é, $\widehat{A} = \arccos\frac{1}{3} \approx 70^\circ 32'$. Pela lei dos senos, os três diedros são iguais, como já se sabia por simetria. E o produto misto vale

$$D = \sqrt{1-3\cdot\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de onde $V = \dfrac{a^3}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$, o valor conhecido.

Exercícios

1. (EsPCEx) Considere as afirmações:

I. Dois planos distintos que se intersectam são chamados de planos secantes.

II. Se duas retas não têm ponto em comum, então elas só podem ser paralelas.

III. Se dois planos não coincidentes têm um ponto em comum, então eles têm uma reta em comum.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta desse plano.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) I b) II e IV c) I e IV d) III e) I e III

2. (ESA) Analise as assertivas:

I. Se duas retas de um plano, distintas e concorrentes, são paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos entre si.

II. Duas ou mais retas são coplanares quando existe um plano que contém todas elas.

III. Quando uma reta é perpendicular a um plano, todos os planos que a contêm são perpendiculares a esse plano.

IV. A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano pode ser um segmento ou um ponto.

a) Apenas I e IV são verdadeiras.
b) Apenas II e III são verdadeiras.
c) Apenas I, II e III são verdadeiras.
d) Todas são verdadeiras.

3. (EsPCEx) Analise as proposições:

I. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente ao outro.

II. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas desse plano.

III. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles são secantes.

IV. Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

V. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

a) apenas a II e a III são verdadeiras.
b) apenas a II, a III e a IV são verdadeiras.
c) apenas a I e a IV são falsas.
d) apenas a IV e a V são falsas.

4. (AFA) Se a reta r é paralela ao plano α, então

a) todas as retas de α são paralelas a r.
b) existem em α retas paralelas e perpendiculares a r.
c) a reta r não pode ser comparada com nenhuma reta de α.
d) existem em α retas paralelas a r e retas reversas a r.

5. (AFA) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.
b) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
c) Por um ponto qualquer é possível traçar uma reta que intercepta duas retas reversas dadas.
d) Se duas retas concorrentes de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas de outro plano, então estes planos são paralelos.

6. (ITA 1987) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.

b) Um ponto e uma reta determinam um plano.

c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.

d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.

e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano que é paralela a r não será paralela a s.

7. (FUVEST) Dados um plano α e uma reta r, podemos afirmar que

a) existe um plano β que contém r e é perpendicular a α.

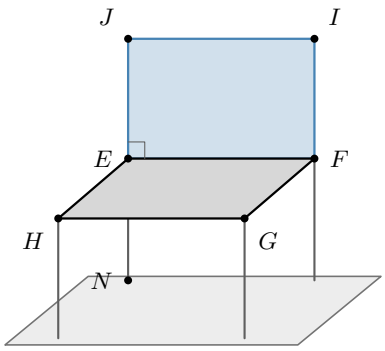
b) existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α.

c) existe um plano β que contém r e é paralelo a α.

d) existe um único plano β que contém r e é paralelo a α.

e) qualquer plano β que contém r intercepta o plano α.

8. Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



a) Os planos EFI e HGF são paralelos.

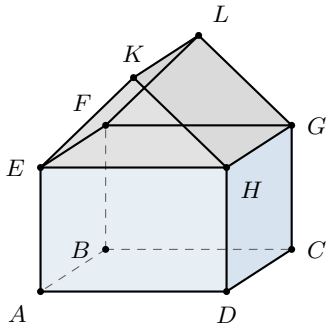
b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFI e EFH.

c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.

d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFI e EHG.

e) As retas IJ e EF são reversas.

9. (EsPCEx) O sólido abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma triangular reto, com uma face em comum.



As posições relativas dos pares de retas AH e DE; AD e KL; EF e HG são, respectivamente,

a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

c) concorrentes; reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

10. (UECE) O número de planos que contêm mais de dois dos oito vértices de um paralelepípedo retângulo é

a) 16 b) 10 c) 12 d) 20

11. (EsPCEx) Dado um cubo, o número de pares distintos de retas reversas que podemos traçar, de tal forma que cada reta contenha uma aresta desse cubo, é igual a

a) 24 b) 30 c) 36 d) 42 e) 48

12. (UFMS) Considere uma pirâmide de base hexagonal regular. A quantidade de pares de arestas reversas é

a) maior que 24.
b) igual a 24.
c) maior que 12 e menor que 24.
d) igual a 12.
e) menor que 12.

13. Quantos pares de retas reversas são formados pelas retas suportes das arestas de um tetraedro?

a) Um par. b) Dois pares. c) Três pares. d) Quatro pares. e) Cinco pares.

14. Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s, reversas. Seja t a perpendicular comum a r e s. Então

a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.

b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.

c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.

d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.

e) t é perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

15. (Escola Naval) Seja r oblíqua a um plano φ pelo ponto A. Considere que $s \subset \varphi$ é a projeção ortogonal de r sobre φ e que $t \subset \varphi$ passa por A. Se θ é o ângulo entre r e s, e β é o ângulo entre r e t, então

a) $\theta < \beta$ b) $\theta = \beta$ c) $\beta < \theta$ d) $\theta = 2\beta$ e) $2\beta < \theta$

16. Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.

b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

17. (EN) O lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de três pontos colineares distintos é

a) uma reta. b) um plano. c) uma esfera. d) um ponto. e) vazio.

18. (EN) Se α é um plano e P é um ponto não pertencente a α, quantos planos e quantas retas, respectivamente, contêm P e são perpendiculares a α?

a) 1 plano e 1 reta
b) infinitos planos e nenhuma reta
c) infinitos planos e 1 reta
d) nenhum plano e 1 reta
e) infinitos planos e infinitas retas

19. (AFA) Assinale a única alternativa **falsa**.

a) Se um plano β é perpendicular a um plano α, então existem infinitas retas contidas em β e perpendiculares a α.

b) Se α e β são perpendiculares entre si e γ é perpendicular à reta comum a α e β, então $r = \gamma \cap \alpha$ e $s = \gamma \cap \beta$ são perpendiculares entre si.

c) Se duas retas r e s são reversas, então não existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

d) Duas retas do espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

20. Identifique o lugar geométrico dos pontos do espaço:

a) equidistantes de duas retas paralelas dadas;

b) equidistantes de dois planos paralelos dados.

21. Duas faces de um triedro medem, respectivamente, 100° e 135°. Determine o intervalo de variação da medida da terceira face.

22. Dois diedros de um triedro medem, respectivamente, 60° e 110°. Determine o intervalo de variação da medida do terceiro diedro.

23. As faces de um ângulo poliédrico convexo medem x, $90° - x$, 10°, 20° e 30°. O intervalo de variação de x é

a) $10° < x < 90°$ b) $0° < x < 90°$ c) $15° < x < 90°$ d) $0° < x < 75°$ e) $15° < x < 75°$

24. Num triedro, as duas maiores faces medem 70° e 120°. Qual das alternativas apresenta um valor possível para a terceira face?

a) 40° b) 50° c) 60° d) 70° e) 90°

25. Os dois maiores ângulos diedros de um triedro medem 90° e 110°. Que valores pode assumir o terceiro ângulo diedro?

26. Dados três pontos não colineares, determinar os planos equidistantes dos três pontos dados. Quantos planos existem?

27. Determinar os planos equidistantes de quatro pontos não coplanares dados. Quantos planos existem?

28. Dados os pontos O e P, identificar o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P aos planos que passam por O.

29. Dado o ponto P exterior à reta r, achar o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas por P aos planos que contêm r.

30. Dados dois pontos A e B e o número k ($k > 0$ e $k \neq 1$), identifique o lugar geométrico do ponto P do espaço tal que

$$\frac{PA}{PB} = k.$$

31. Dados dois planos secantes α e β, identifique o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja razão das distâncias a α e a β é constante.

32. Dados dois pontos A e B e uma reta r, obter o plano equidistante de A e B que contém r, nos seguintes casos:

i) r concorrente com AB;

ii) r paralela a AB;

iii) r reversa com AB.

33. Um ponto A interior a um diedro dista 4 m de sua aresta, 2 m de uma face e $2\sqrt{2}$ m da outra face. O valor do ângulo retilíneo do diedro é

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

34. Se a partir de um ponto P interior a um diedro forem traçadas semirretas perpendiculares às faces, o ângulo formado por elas é 105°. O ângulo do diedro é

a) 15° b) 45° c) 60° d) 75° e) 105°

35. Qual é o ângulo diedro formado por duas faces de um tetraedro regular?

36. (FUVEST) São dados cinco pontos não coplanares A, B, C, D, E. Sabe-se que $ABCD$ é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas

a) EA e EB b) EC e CA c) EB e BA d) EA e AC e) AC e BE

37. Dado um quadrado $ABCD$, toma-se AJ perpendicular ao plano do quadrado, com $AJ = AB$. O ângulo entre os planos AJC e BJC vale

a) 90° b) 60° c) 45° d) 30° e) 75°

38. No plano P tem-se um ângulo $B\hat{A}C = 60°$. O ponto S dista 25 cm do vértice A, 7 cm do lado AB e 20 cm do lado AC. Calcule a distância do ponto S ao plano P.

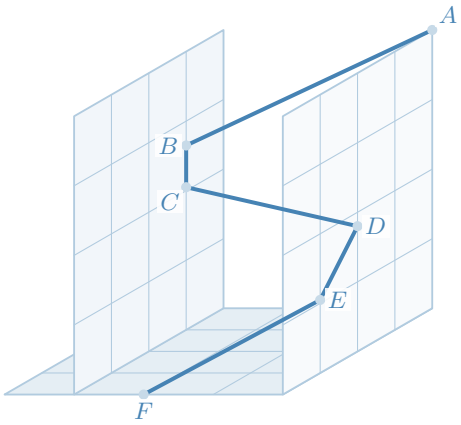
39. Uma semirreta de origem no vértice de um triedro trirretângulo forma com as três arestas um mesmo ângulo agudo, cujo cosseno vale

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

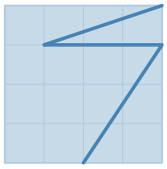
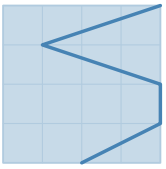
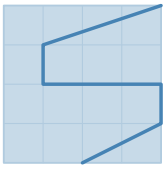
40. Qual o intervalo de variação do ângulo diedro entre faces laterais adjacentes de uma pirâmide regular cuja base é um polígono de n lados?

a) $\left(\frac{(n-2)\pi}{n},\ \pi\right)$
b) $\left(\frac{(n-1)\pi}{n},\ \pi\right)$
c) $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$
d) $\left(\frac{(n-2)\pi}{n},\ \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$
e) $\left(\frac{\pi}{n},\ \pi\right)$

41. (ENEM) Em um jogo virtual para celular, um personagem pode percorrer trajetórias retilíneas voando ou se deslocando ao longo de paredes. Considere que o personagem descreve a trajetória $ABCDEF$, em que os pontos A, D e E estão em um plano paralelo ao que contém os pontos B e C, sendo esses dois planos ortogonais ao plano da base, que contém o ponto F, conforme a figura.



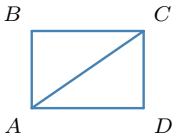
A projeção ortogonal, sobre o plano da base, da trajetória $ABCDEF$ descrita pelo personagem é

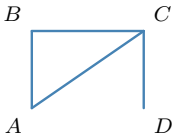
a)  b)  c)  d)  e) 

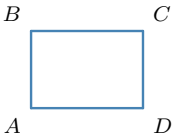
42. (ENEM PPL) Um inseto percorreu, sobre a superfície de um objeto em formato de prisma reto $ABCDEFGH$ de base retangular, a trajetória poligonal de vértices

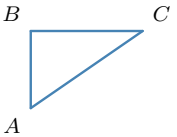
$$A - X - Y - G - F - E - X - G - E,$$

nessa ordem, sendo X um ponto da aresta BF e Y um ponto da aresta CG. A representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto sobre o plano da base do prisma é

a) 

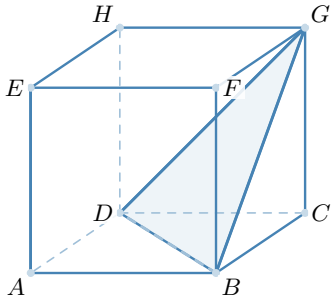
b) 

c) 

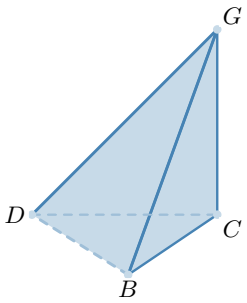
d) 

e) 

43. (UERJ) Um cubo de base $ABCD$, com arestas laterais AE, BF, CG e DH, foi seccionado pelo plano BDG. Com a secção, formou-se o sólido S, de vértices B, C, D e G.



o plano BDG secciona o cubo

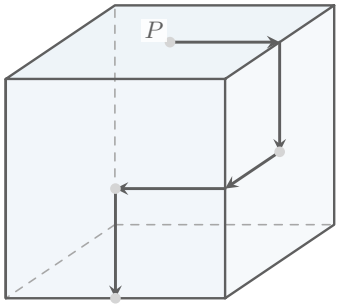


sólido S (vértices B, C, D, G)

Sabendo que o cubo tem aresta 1, o volume do sólido S é igual a

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$

44. (ENEM) Um robô, que tem um ímã em sua base, desloca-se sobre a superfície externa de um cubo metálico ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces. Ele inicia o deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da seguinte, converte à direita e continua, sempre alternando entre conversões à esquerda e à direita ao alcançar o centro de uma face. O robô só termina a movimentação quando retorna a P. A figura mostra os deslocamentos iniciais.



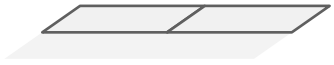
deslocamentos iniciais do robô

A projeção ortogonal do trajeto descrito pelo robô sobre o plano da base, após terminada a movimentação, vista da posição em que se enxerga o cubo, é

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

45. (Escola Naval) Analise as afirmativas abaixo.

I. Se uma reta e um plano são concorrentes, então a reta é concorrente com qualquer reta do plano.

II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

III. Duas retas ou são coplanares ou são reversas.

IV. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

a) Apenas a III é verdadeira.
b) Apenas III e IV são verdadeiras.
c) Todas são falsas.
d) Apenas a I é verdadeira.
e) Apenas a II é falsa.

46. (Escola Naval) Um quadrado $ABCD$ de lado 4 cm tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos AP e CQ, perpendiculares a α e de mesmo lado, medindo respectivamente 3 cm e 7 cm. A distância PQ, em centímetros, mede

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$

47. Num triedro, duas faces medem 100° e 140°. Entre que valores pode variar a medida da terceira face?

Aprofundamento

48. (ITA 2013) Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes.

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas.

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo.

é(são) verdadeira(s) apenas

a) III. b) I e III. c) II e III. d) III e IV. e) I, II e IV.

49. Prove que um plano paralelo às diagonais de um quadrilátero reverso divide seus lados em partes proporcionais.

50. (ITA 2022) Considere as afirmações:

I. Se α e β são planos paralelos distintos e r é uma reta tal que $r \cap \alpha \neq \varnothing$, então $r \cap \beta \neq \varnothing$.

II. Se r é uma reta e P, Q são pontos distintos, então existem infinitos planos equidistantes de P e Q que contêm r.

III. Dados quatro pontos no espaço, existe um único ponto equidistante deles.

É(são) verdadeira(s)

a) nenhuma delas. b) apenas I. c) apenas II. d) apenas III. e) I, II e III.

51. Dado o ponto A exterior ao plano α, considere um ponto móvel $B \in \alpha$ e identifique o lugar geométrico do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão dada.

52. (UECE) Sejam R_1 e R_2 duas retas reversas fixadas. Avalie:

I. Existe uma reta perpendicular a R_1 e a R_2.

II. Existem esferas tangentes a R_1 e a R_2.

III. Não existe ponto P equidistante de R_1 e de R_2.

IV. Toda reta paralela a R_1 é reversa em relação a R_2.

V. Existem infinitas retas simultaneamente reversas a R_1 e a R_2.

O número exato de afirmações verdadeiras é

a) 4 b) 2 c) 5 d) 3

53. Dada a reta r paralela ao plano α, considere os pontos variáveis $A \in r$ e $B \in \alpha$ e identifique o lugar geométrico do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão dada.

54. (ITA 1999) Um triedro trirretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo de lados 8 m, 10 m e 12 m. O volume, em m^3, do sólido formado é

a) $15\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{30}$ c) $6\sqrt{15}$ d) $30\sqrt{6}$ e) $45\sqrt{6}$

55. Identificar a condição para que uma reta forme ângulos congruentes com duas retas reversas dadas.

56. (FUVEST) O ângulo θ formado por dois planos α e β é tal que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. O ponto P pertence a α e a distância de P a β vale 1. Então a distância de P à reta interseção de α e β é igual a

a) 3 b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{8}$

57. Identificar a condição para que um plano forme ângulos congruentes com duas retas reversas dadas.

58. Sejam α, β e γ os ângulos que uma reta passando pelo vértice de um triedro trirretângulo forma com as três arestas. Prove que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

59. Prove que todo plano pertencente ou paralelo à bissetriz de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes inclina-se igualmente em relação às duas retas.

60. (Teorema de De Gua.) Sejam S, S_1, S_2 e S_3, respectivamente, as áreas das faces ABC, VBC, VAC e VAB de um tetraedro $V-ABC$ cujo triedro em V é trirretângulo. Prove que

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

61. (IME) Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M' tais que o ângulo $M\hat{O}M' = 90°$, sendo O um ponto fixo dado.

a) Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis porém fixo o ponto médio I de MM'?

b) Considere outro ponto fixo O' tal que também $M\hat{O}'M' = 90°$. Sendo M fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

62. (IME) Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tomam-se pontos A, B, C, D de α e, por cada um deles, traçam-se retas ortogonais a β que o interceptam em A', B', C', D'. Sabendo que $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal AC é paralela a r, a razão entre as áreas de $A'B'C'D'$ e $ABCD$ é

a) 1 b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$

63. (IME) Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo e sobre ela fixa-se um ponto S. Por B passa-se um plano que intercepta SC em C' e é perpendicular a SC; esse plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

64. (IME) Dá-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semiespaço de π, sendo

i) $AB = \ell$;

ii) a e b as cotas de A e B em relação a π;

iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade de existência desse triângulo e o número de soluções.

65. (ITA 2020) Considere as afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \varnothing$, então $r \cap s \cap t \neq \varnothing$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela a r e concorrente com s e com t.

É(são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas I e II. d) apenas I e III. e) nenhuma.

66. (ITA 2021) Considere as afirmações:

I. Se a medida do ângulo agudo entre uma reta r e um plano α é $45°$, então existe uma reta s contida em α tal que a medida do ângulo agudo entre r e s é $30°$.

II. Se uma reta r é perpendicular a duas retas distintas s e t contidas em um plano α, então r é perpendicular a α.

III. Sejam r, s e t as três retas distintas determinadas por três pontos não colineares. Então existe um único ponto equidistante de r, s e t.

IV. Se P e Q são pontos à mesma distância de um plano α, então o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ pertence a α.

É(são) verdadeira(s)

a) nenhuma. b) apenas I e II. c) apenas I e III. d) apenas III e IV. e) apenas II, III e IV.

67. (ITA) Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$ e estão em planos distintos. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se $MN = CN = 2$ cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em centímetros,

a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

68. Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço dos quais se podem traçar a uma esfera de raio R três tangentes que formem um ângulo triédrico com os três ângulos planos retos.

69. São dados um plano P e dois pontos A e B fora dele, do mesmo lado. Traçam-se todas as esferas possíveis que passam por A e B e são tangentes a P. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato.

70. Determine o lugar geométrico dos centros das seções de uma esfera por planos que passam por uma reta dada l. Examine os casos em que a reta corta a esfera, é tangente a ela ou não tem com ela pontos comuns.

71. Determine o lugar geométrico dos centros das seções de uma esfera por planos que passam por um ponto dado C. Examine os casos em que C está fora da esfera, sobre a sua superfície ou dentro dela.

72. Os quatro lados de um trapézio isósceles são tangentes a um cilindro cujo eixo é perpendicular aos lados paralelos do trapézio. As bases medem a e b e a altura mede h. Determine o ângulo formado pelo plano do trapézio e o eixo do cilindro.

73. De um ponto de uma esfera de raio R traçam-se três cordas iguais que formam entre si, duas a duas, o ângulo α. Determine o comprimento dessas cordas.

74. Uma formiga parte de um vértice de um cubo de aresta a e caminha *pela superfície* até o vértice oposto. O menor percurso possível mede

a) $a\sqrt{2}$ b) $a\sqrt{3}$ c) $a\sqrt{5}$ d) $2a$ e) $3a$

75. Numa caixa de dimensões $1 \times 2 \times 3$, qual é o menor percurso *pela superfície* entre dois vértices opostos?

a) $\sqrt{14}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{26}$ e) 6

76. Num cubo de aresta a, determine os ângulos que a diagonal do cubo forma

a) com uma diagonal de face concorrente;

b) com uma aresta concorrente;

c) com outra diagonal do cubo.

77. Determine a distância entre a diagonal de um cubo de aresta a e uma aresta que não a encontra.

a) $\dfrac{a}{2}$ b) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e) a

78. Numa superfície cilíndrica de revolução de raio R e altura h, A é um ponto da base e B é o ponto do topo diametralmente oposto. Determine o menor caminho de A a B traçado sobre a superfície lateral.

79. Determine a distância entre os centros de duas faces adjacentes de um cubo de aresta a, e mostre que os seis centros são equidistantes do centro do cubo.

80. Pela hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles traca-se um plano P que forma ângulo α com o plano do triângulo. Sendo c a hipotenusa, determine o perímetro e a área da projeção ortogonal do triângulo sobre P.

81. Num triedro, duas faces medem $60°$ cada uma e o ângulo diedro oposto à terceira face é reto. Calcule a terceira face e, em seguida, o diedro oposto a ela quando a terceira face mede $90°$.

82. Num cubo de aresta a, o plano perpendicular a uma diagonal do cubo pelo seu ponto médio recorta um hexágono regular. Calcule a área desse hexágono e a área de sua projeção ortogonal sobre uma face do cubo, conferindo o resultado por um segundo caminho.

83. No cubo $ABCD-A'B'C'D'$ de aresta a, calcule a distância entre a diagonal $\overline{AC'}$ do cubo e a aresta $\overline{BB'}$.

84. As três faces de um triedro medem $60°$. Calcule o ângulo que cada aresta forma com o plano das outras duas.

85. Num tetraedro regular $ABCD$ de aresta a, sejam M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Calcule MN e o ângulo entre a reta MN e a aresta $\overline{AC}$.

86. (IME) No cubo $ABCD-EFGH$ a aresta mede ℓ. O ponto B_1, sobre a aresta $\overline{AB}$, é tal que $AB_1 = \frac{\ell}{3}$; o ponto D_1, sobre a aresta $\overline{AD}$, é tal que $AD_1 = \frac{\ell}{3}$; e o ponto H_1, sobre a aresta $\overline{GH}$, é tal que $GH_1 = \frac{\ell}{3}$. A área do triângulo $B_1D_1H_1$ é

a) $\dfrac{\ell^2}{9}$
b) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{18}$
c) $\dfrac{11\ell^2\sqrt{3}}{18}$
d) $\dfrac{\ell^2\sqrt{2}}{9}$
e) $\dfrac{\ell^2\sqrt{34}}{18}$

87. (IME) Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente sobre um plano, gerando um triângulo isósceles cujo ângulo desigual mede 30°. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é

a) $2\sqrt{3}-3$ b) $4-2\sqrt{3}$ c) $2-\sqrt{3}$ d) $1-\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

88. (IME) Considere as afirmações abaixo:

I. se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II. se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III. se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam seis planos;

IV. duas retas não paralelas determinam um plano;

V. se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações,

a) apenas uma é verdadeira. b) apenas duas são verdadeiras. c) apenas três são verdadeiras. d) apenas quatro são verdadeiras. e) todas são verdadeiras.

89. (IME) Sejam r e r' duas retas ortogonais e não coplanares. Tomam-se sobre r dois pontos fixos A e B, e sobre r' dois pontos variáveis M e M', de modo que a projeção de M' sobre o plano do triângulo MAB seja o ortocentro H desse triângulo. Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMM'$.

90. (IME) Seja c um círculo de raio r, cujo plano é paralelo a um plano π e dele dista h, e seja I o traço em π do eixo de c. Seja ainda P um ponto fixo de π com $\overline{IP} = h$. Liga-se P a um ponto M que percorre toda a circunferência de c e considera-se o plano variável σ, normal a π, que contém sempre $\overline{PM}$. Na interseção de σ com π existem dois pontos que distam $h\sqrt{3}$ de M; seja A aquele cuja distância a P é a maior. Determine (a) o lugar geométrico de A e (b) o valor máximo de $\overline{IA}$.

91. (IME) São dados um cone de revolução de vértice S, cuja base circular está num plano π, e um ponto P exterior ao cone e não pertencente a π. Determine, pelo ponto P, os planos tangentes ao cone.

92. As bases $\overline{BC}$ e $\overline{RS}$ de dois triângulos isósceles ABC e ARS estão contidas em retas reversas. Estabeleça o lugar geométrico dos vértices A.

93. São dados cinco pontos A, B, C, R e S, não coplanares. Determine o ponto J que, equidistando de A, B e C, guarda distâncias iguais a R e a S, e discuta o número de soluções.

94. São dados dois pontos A e B e duas retas concorrentes r e s. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A e por B e cujos centros equidistam de r e de s.

95. São dadas duas retas concorrentes r e s e uma terceira reta a, reversa a ambas. Determine os pontos de a equidistantes de r e de s, e discuta quantos podem ser.

96. São dados dois planos secantes α e β e um ponto J exterior a ambos. Construa o plano γ que contém J, é perpendicular a α e corta α e β segundo duas retas paralelas.

97. São dados um plano α, dois pontos J e L exteriores a ele e dois comprimentos k_1 e k_2, maiores que as distâncias de J e de L a α. Determine os pontos P de α tais que $JP = k_1$ e $LP = k_2$, e discuta quantos podem ser.

98. São dadas três retas r, s e t, reversas duas a duas. Construa um segmento $\overline{AB}$ com A em r, B em s e ponto médio em t, e discuta quando o problema é impossível ou indeterminado.

99. Construa a reta que passa por um ponto dado J e é ortogonal a duas retas reversas dadas a e b.

100. Estabeleça o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos paralelos e que distam de um ponto fixo J um valor igual à distância entre os dois planos. Discuta.

101. Construa a reta que contém um ponto dado J, é ortogonal a uma reta dada s e paralela a um plano dado α. Em que caso o problema é indeterminado?

102. São dados um ponto A, um plano γ e uma reta r oblíqua a γ. Construa o plano que contém A, é perpendicular a γ e paralelo a r.

103. Determine o plano que contém um ponto dado J e é perpendicular a dois planos secantes dados γ e θ. Justifique que a solução é única.

104. Considere todos os triângulos isósceles de vértice fixo A cujas bases se apóiam num plano horizontal fixo α, com os planos desses triângulos inclinados de $30°$ a $45°$ em relação a α. Sendo d a distância de A a α, estabeleça o lugar geométrico dos baricentros desses triângulos.

105. O vértice A dos triângulos isósceles ABC e APQ equidista de dois planos secantes dados α e γ. Sabendo que as bases $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$ estão em retas reversas e são dadas, determine as posições possíveis de A.

106. São dados quatro pontos A, B, C e D, não coplanares. Construa um feixe de quatro planos paralelos e equidistantes, o primeiro por A, o segundo por B, o terceiro por C e o quarto por D.

107. São dados um plano α e duas retas reversas r e s, todos exteriores entre si. Apoie nas duas reversas uma terceira reta, paralela a α e igualmente inclinada em relação a r e a s.

108. Um plano corta as três arestas de um triedro trirretângulo em pontos que distam 6 cm do vértice. No triângulo-seção inscreve-se um círculo. Calcule a área da projeção ortogonal desse círculo sobre cada uma das faces do triedro.

109. São dados um ponto A, uma reta r e um plano α, exteriores entre si. Construa o plano γ que contém A, é paralelo a r e forma com α um ângulo dado $\widehat{x}$. Discuta o número de soluções conforme o ângulo que r forma com α.

Resoluções · Capítulo 1

1. [E] **I.** Verdadeira, é a definição. **II.** Falsa: duas retas *reversas* também não têm ponto comum. **III.** Verdadeira: é o postulado P5. **IV.** Falsa: r pode ser *reversa* a retas do plano.

2. [D] Todas são verdadeiras. **I** é o teorema do paralelismo entre planos (duas *concorrentes*). **II** é a definição de retas coplanares. **III**: se $r \perp \alpha$, todo plano que contém r é perpendicular a α. **IV**: a projeção degenera num ponto exatamente quando o segmento é ortogonal ao plano.

3. [A] **I.** Falsa: uma reta de α paralela à interseção é paralela a β. **II.** Verdadeira: há infinitas retas de α paralelas a r. **III.** Verdadeira, é a definição. **IV.** Falsa: duas retas perpendiculares a uma terceira podem ser paralelas. **V.** Falsa: só as perpendiculares à interseção.

4. [D] Se $r \parallel \alpha$, em α existem retas paralelas a r (as interseções de α com os planos que contêm r) e retas *reversas* a r; todas as demais. Não existe reta de α concorrente com r.

5. [D] É o teorema do paralelismo entre planos. As outras falham: (a) se r corta o plano dado, não há plano paralelo por r; (b) a reta pode ser paralela à interseção de dois planos secantes; (c) por um ponto genérico não passa reta apoiada nas duas reversas.

6. [E] Se $m \parallel r$ e m fosse paralela a s, então $r \parallel s$, contrariando o fato de r e s serem concorrentes. As demais falham: três pontos *colineares* não determinam plano; um ponto *da* reta com ela não determina plano; dois planos secantes têm uma *reta* comum; e uma reta paralela a um plano é reversa a infinitas retas dele.

7. [A] Basta tomar em r um ponto P e, por P, a perpendicular t a α: o plano (r, t) contém r e é perpendicular a α. Ele é único salvo quando $r \perp \alpha$, caso em que há infinitos; por isso (b) é falsa. E não existe plano paralelo a α contendo r quando r corta α.

8. [D] O encosto está no plano $EFIJ$ e o assento no plano $EFGH$: a reta comum aos dois é exatamente EF; logo (d) é verdadeira. (a) é falsa: EFI (encosto) e HGF (assento) compartilham EF, são *perpendiculares*. (b) é falsa: a reta comum é EF, não HG. (c) é falsa: os planos HIJ e EGN têm normais não paralelas, logo se cortam. (e) é falsa: $IJ \parallel EF$, pois ambas são paralelas a HG.

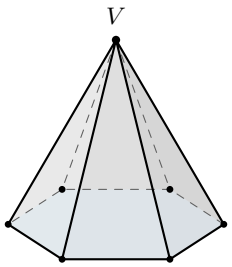
9. [C] AH e DE são as diagonais da face retangular $ADHE$: **concorrentes**. AD é uma aresta da base do bloco e KL é a cumeeira do telhado: não têm ponto comum e não são coplanares, logo são **reversas**. EF e HG são arestas da face superior do bloco na mesma direção: **paralelas**.

10. [D] Cada plano contém pelo menos três vértices. São eles: as 6 faces, os 6 "planos diagonais" (cada um por duas arestas opostas) e, além desses, os planos que contêm exatamente três vértices, um por vértice "cortado", num total de 8. Logo $6 + 6 + 8 = 20$.

11. [A] Cada uma das 12 arestas do cubo é reversa a exatamente 4 outras (as 12 arestas se dividem em 3 direções de 4; uma aresta é paralela a 3, concorrente com 4 e reversa às 4 restantes). Contando cada par duas vezes:

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = 24.$$

12. [B] Para cada uma das 6 arestas da base há 4 arestas reversas (as 2 arestas laterais que a tocam não servem; sobram 4 reversas a ela) e, para cada aresta lateral, contam-se as arestas da base e as laterais reversas. O total é 24 pares.



13. [C] O tetraedro tem 6 arestas, que se agrupam em 3 pares de arestas *opostas*; cada par é reverso, e quaisquer duas arestas não opostas têm vértice comum. Logo há **3** pares.

14. [C] Duas arestas reversas do cubo são perpendiculares entre si e "separadas" por uma terceira aresta que encosta em ambas formando ângulos retos. Essa terceira aresta é, portanto, a perpendicular comum: t contém uma aresta do cubo.

15. [A] Por definição, o ângulo entre a reta oblíqua r e o plano φ é o que r forma com sua projeção s, e ele é o *menor* ângulo entre r e as retas de φ que passam por A. Logo $\theta < \beta$ para toda $t \neq s$.

16. [E] Basta projetar uma circunferência sobre um plano *perpendicular* ao seu: a projeção é um segmento (o diâmetro). As demais falham: a projeção de um segmento é segmento ou ponto; a de uma reta é reta ou ponto; a de uma parábola não pode ser segmento (ela é ilimitada em duas direções); e a de um triângulo é triângulo ou segmento.

17. [E] O lugar dos pontos equidistantes de dois pontos é o plano mediador do segmento. Para três pontos *colineares* A, B, C, os planos mediadores de AB e de BC são perpendiculares à mesma reta em pontos distintos: são **paralelos** e não se cortam. O lugar é *vazio*.

18. [C] Por P passa uma única reta perpendicular a α. Já planos perpendiculares a α por P são *infinitos*: todos os que contêm essa reta.

19. [C] (c) é falsa. Dadas r e s reversas, sempre é possível obter $\alpha \perp \beta$ com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$: tome α contendo r e paralelo a s, e β o plano por s perpendicular a α. As demais são verdadeiras.

20. a) O lugar dos pontos equidistantes de duas retas paralelas a e b é o **plano perpendicular ao plano** (a, b) que passa pela paralela média de a e b.

b) O lugar dos pontos equidistantes de dois planos paralelos é o **plano médio**, o plano paralelo a ambos e equidistante deles.

21. Seja x a terceira face. As condições de existência dão

$$0^\circ < x < 180^\circ, \qquad 100^\circ + 135^\circ + x < 360^\circ \;\Rightarrow\; x < 125^\circ,$$

$$135^\circ - 100^\circ < x < 135^\circ + 100^\circ \;\Rightarrow\; 35^\circ < x < 235^\circ.$$

Intersectando: $\boxed{35^\circ < x < 125^\circ}$.

22. Seja d o terceiro diedro. De $A+B<C+180°$ aplicada convenientemente, $60°+180°>d+110°\Rightarrow d<130°$; e de $180°<60°+110°+d<540°$ vem $d>10°$. Logo $\boxed{10°<d<130°}$.

23. **[E]** A soma das faces $\big[x+(90°-x)+10°+20°+30°\big]=150°<360°$ está sempre satisfeita. Falta impor que cada face seja menor que a soma das demais:

$$x<(90°-x)+60°\Rightarrow x<75°,\qquad 90°-x<x+60°\Rightarrow x>15°.$$

Logo $15°<x<75°$.

24. **[C]** Com x a terceira face: $70°+120°+x<360°\Rightarrow x<170°$ e $120°-70°<x\Rightarrow x>50°$. Além disso x não pode ser a maior, logo $x\le 70°$. O único valor listado em $(50°,70°]$ é **60°**.

25. Seja d o terceiro diedro, o menor. De $90°+110°<d+180°$ vem $d>20°$; e $d\le 90°$ por ser o menor. Logo $\boxed{20°<d\le 90°}$.

26. Um plano equidista de A, B e C quando contém dois dos pontos médios dos segmentos determinados por eles (deixando um ponto de um lado e dois do outro), ou quando é paralelo ao plano (A,B,C); estes últimos são os que deixam os três pontos do mesmo lado, e não existem além do próprio plano (A,B,C) e seus paralelos equidistantes. Como cada escolha admite uma família contínua de inclinações, existem **infinitos** planos.

27. Com quatro pontos não coplanares A, B, C, D, um plano equidistante deve separá-los em $1+3$ ou em $2+2$. Há $\binom{4}{1}=4$ separações do primeiro tipo e $\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$ do segundo, e cada uma determina *um* plano (contendo respectivamente 3 ou 4 pontos médios de arestas do tetraedro). Logo existem

$$4+3=\boxed{7}\text{ planos.}$$

28. Se M é o pé da perpendicular baixada de P a um plano que passa por O, então $PM\perp OM$, isto é, o ângulo $P\hat{M}O$ é reto. O lugar dos pontos que "veem" $\overline{OP}$ sob ângulo reto é a **superfície esférica de diâmetro $\overline{OP}$**.

29. Seja O o pé da perpendicular baixada de P à reta r. Para todo plano que contém r, o pé M da perpendicular baixada de P satisfaz $PM\perp r$ e $OM\perp r$; logo M pertence ao plano π que passa por O e é perpendicular a r. Nesse plano, $P\hat{M}O=90°$. O lugar é a **circunferência de diâmetro $\overline{PO}$ contida em π**.

30. Introduzindo coordenadas, $PA^2=k^2\,PB^2$ é uma equação do segundo grau em que os termos quadráticos aparecem com o mesmo coeficiente $1-k^2\neq 0$: ela representa uma **superfície esférica** — a **esfera de Apolônio**. Seu diâmetro tem por extremos os conjugados harmônicos de A e B na razão k, isto é, os pontos da reta AB que dividem $\overline{AB}$ interna e externamente nessa razão.

31. Sejam d_α e d_β as distâncias de P aos planos e $k=d_\alpha/d_\beta$ constante. Em coordenadas, d_α e d_β são funções lineares (a menos de módulo), e $d_\alpha=k\,d_\beta$ dá duas equações lineares, uma para cada escolha de sinal. O lugar é o **par de planos que contêm a interseção $\alpha\cap\beta$**, a generalização dos planos bissetores (caso $k=1$).

32. O lugar dos pontos equidistantes de A e B é o plano mediador μ de $\overline{AB}$. O plano procurado deve conter r e ser equidistante de A e B:

i) r concorrente com AB: o plano é o **plano** (r,AB): nele A e B estão *contidos*, logo ambos distam zero.

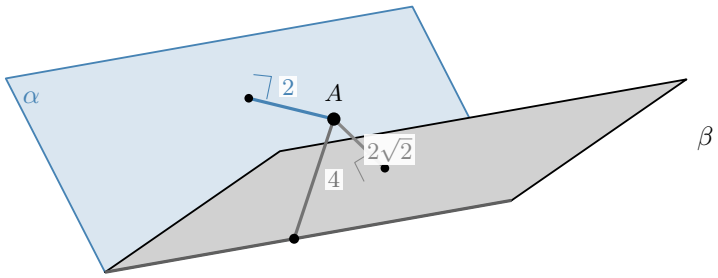
ii) r paralela a AB: **qualquer plano que contenha r e seja paralelo a AB**, pois nele A e B ficam simetricamente colocados; em particular o plano (r,AB) serve.

iii) r reversa com AB: o **plano que contém r e o ponto médio de $\overline{AB}$** (contido em μ), ou o **plano que contém r e é paralelo a AB**.

33. [D] Na seção reta do diedro, o segmento de A até a aresta mede 4 e os segmentos até as faces medem 2 e $2\sqrt{2}$. Logo

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ, \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_2 = 45^\circ.$$

O diedro é $\theta_1 + \theta_2 = 75^\circ$.



34. [D] As duas semirretas perpendiculares às faces e a seção reta do diedro formam ângulos de lados respectivamente perpendiculares: são congruentes ou suplementares. Como o ângulo obtido é 105°, o diedro mede $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

35. Seja $ABCD$ o tetraedro de aresta a e M o ponto médio de CD. Como AM e BM são perpendiculares a CD, o ângulo $A\hat{M}B$ é a seção reta do diedro de aresta CD. Sendo $AM = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $AB = a$, a lei dos cossenos dá

$$a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2\cdot\frac{3a^2}{4}\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{1}{3}.$$

Logo $\theta = \arccos\dfrac{1}{3} \approx 70^\circ 32'$.

36. [D] De $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$ segue $AE \perp$ plano $ABCD$. Logo AE é perpendicular a *toda* reta desse plano que passa por A, em particular a AC. As demais não são necessariamente perpendiculares.

37. [B] Tome $A = (0,0,0)$, $B = (a,0,0)$, $C = (a,a,0)$, $D = (0,a,0)$ e $J = (0,0,a)$. Um vetor normal ao plano AJC é $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AJ} \times \overrightarrow{AC} = (-a^2, a^2, 0)$ e um normal ao plano BJC é $\vec{n}_2 = \overrightarrow{BJ} \times \overrightarrow{BC} = (-a^2, 0, -a^2)$. Então

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{a^4}{a^2\sqrt{2}\cdot a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \varphi = 60^\circ.$$

38. Sejam $SL \perp AB$, $SK \perp AC$ e $SM \perp P$. Nos triângulos retângulos SLA e SKA:

$$AL = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24, \qquad AK = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

Prolongando KM até cortar AB em Q, obtém-se $A\hat{Q}K = 30^\circ$ e, daí, $AQ = 30$ e $LQ = 30 - 24 = 6$. Logo $LM = 6\operatorname{tg}30^\circ = 2\sqrt{3}$ e, no triângulo SML,

$$SM = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{49 - 12} = \boxed{\sqrt{37}\text{ cm}}.$$

39. [D] Se a semirreta forma o mesmo ângulo α com as três arestas, a relação $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ dá

$$3\cos^2\alpha = 1 \implies \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

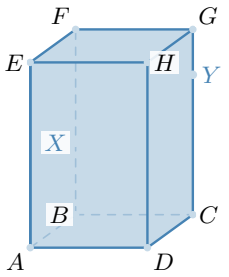
40. [A] Fixe a base de n lados e deixe o vértice deslizar sobre o eixo. No limite inferior a pirâmide achata-se sobre a base e os diedros tendem a π; no limite superior ela se alonga num prisma infinito e os diedros tendem ao ângulo interno do polígono regular, $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$. O intervalo é $\left(\dfrac{(n-2)\pi}{n},\ \pi\right)$.

41. [C] Chame de π_1 o plano vertical que contém A, D, E e de π_2 o que contém B, C. Como ambos são ortogonais à base, cada um se projeta sobre uma *reta* da base: A', D', E' ficam alinhados numa reta, e B', C' na reta paralela. Além disso $\overline{BC}$ é vertical, logo $B' = C'$ é um único ponto, e $\overline{DE}$ também é vertical na parte em que desce pela parede, o que produz o **segmento vertical** na projeção. Percorrendo $A' \to B'{=}C' \to D' \to E' \to F'$ obtém-se exatamente a poligonal da alternativa [C] As demais erram o número de vértices ou perdem o trecho vertical.

42. [D] Projete vértice por vértice sobre a base: $A \mapsto A$; $X \in BF \mapsto B$; $Y \in CG \mapsto C$; $G \mapsto C$; $F \mapsto B$; $E \mapsto A$. A trajetória A–X–Y–G–F–E–X–G–E vira

$$A \to B \to C \to C \to B \to A \to B \to C \to A,$$

cujos traços são apenas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ — nenhum trecho cai sobre $\overline{AD}$ ou $\overline{CD}$. É a alternativa [D].



43. [A] O sólido S é o tetraedro de vértices B, C, D, G. Tome como base o triângulo BCD, contido na base do cubo: como BCD é metade do quadrado $ABCD$, sua área é $\dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$. A altura relativa a essa base é $\overline{CG} = 1$, pois CG é aresta lateral, perpendicular à base. Logo

$$V_S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

Observação. O plano BDG fica determinado por três pontos não colineares, pelo postulado da determinação do plano; e a seção BDG é um triângulo equilátero de lado $\sqrt{2}$.

44. [A] Ponha o cubo em $[0,1]^3$. Os centros das faces são $T = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$, $Bo = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $Fr = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $Ba = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$, $Le = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $Ri = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Alternando as conversões, o robô percorre o circuito fechado

$$T \to Ri \to Fr \to Bo \to Le \to Ba \to T,$$

passando pelos pontos médios das seis arestas intermediárias: ele visita as *seis* faces e volta a P.

Projetando sobre a base ($z = 0$), cada centro de face lateral cai no ponto médio do lado correspondente do quadrado da base, e T e Bo caem no centro. Os doze trechos projetam-se assim:

$$\underbrace{\left(\tfrac12,\tfrac12\right)\to\left(1,\tfrac12\right)\to(1,0)\to\left(\tfrac12,0\right)\to\left(\tfrac12,\tfrac12\right)}_{\text{um quadrante}},\qquad \underbrace{\left(\tfrac12,\tfrac12\right)\to\left(0,\tfrac12\right)\to(0,1)\to\left(\tfrac12,1\right)\to\left(\tfrac12,\tfrac12\right)}_{\text{o quadrante oposto}}.$$

A projeção é, portanto, a reunião de **dois quadrantes opostos pelo centro** da base, que se tocam apenas nesse centro. É a alternativa [A].

45. [A] **I.** Falsa: a reta pode ser reversa com retas do plano que não passam pelo ponto de interseção. **II.** Falsa: duas retas paralelas a um mesmo plano podem ser concorrentes ou reversas. **III.** Verdadeira: é a dicotomia que define reversas. **IV.** Falsa: os planos podem ser secantes segundo uma reta paralela à dada.

46. [E] AP e CQ são perpendiculares a α, logo são paralelos entre si e $APQC$ é um trapézio retângulo contido no plano (AC, AP). A diagonal do quadrado é $AC = 4\sqrt{2}$, e a diferença das cotas é $7-3=4$. Pelo teorema de Pitágoras nesse trapézio,

$$PQ^2 = AC^2 + (CQ - AP)^2 = 32 + 16 = 48 \implies PQ = 4\sqrt{3}\text{ cm}.$$

47. Duas condições governam o triedro (seção 1.7). Cada face é menor que a soma e maior que a diferença das outras duas:

$$140^\circ - 100^\circ < x < 140^\circ + 100^\circ \implies 40^\circ < x < 240^\circ.$$

E a soma das três faces é menor que 360°:

$$100^\circ + 140^\circ + x < 360^\circ \implies x < 120^\circ.$$

Intersectando, $\boxed{40^\circ < x < 120^\circ}$. É a segunda condição que manda: sozinha, a desigualdade triangular deixaria passar até 240°.

Aprofundamento · questões 48 a 67

48. [D] **I.** Falsa: duas retas coplanares podem ser paralelas. **II.** Falsa: duas paralelas não têm ponto comum e não são reversas. **III.** Verdadeira: tomando por r a paralela $s' \parallel s$ e por s a paralela $r' \parallel r$, os planos (r, s') e (r', s) são os únicos. **IV.** Verdadeira: os pontos médios formam um paralelogramo, pois lados opostos são bases médias paralelas à mesma diagonal.

49. Seja $ABCD$ o quadrilátero reverso e α um plano paralelo às diagonais AC e BD. Conduza por AC o plano $\alpha_1 \parallel \alpha$ e por BD o plano $\alpha_2 \parallel \alpha$. Os planos α_1, α e α_2 formam um *feixe de planos paralelos*; pelo teorema de Tales, ele determina segmentos proporcionais sobre as transversais que contêm os lados de $ABCD$. Logo α divide os quatro lados em partes proporcionais.

50. [A] **I.** Falsa: a reta r pode estar *contida* em α, e então $r \cap \beta = \varnothing$. **II.** Falsa: em geral há apenas *dois* planos equidistantes de P e Q contendo r (o que passa pelo ponto médio de $\overline{PQ}$ e o paralelo a PQ); só há infinitos no caso particular em que r está contida no plano mediador. **III.** Falsa: se os quatro pontos forem coplanares e não concíclicos, não existe tal ponto. Nenhuma é verdadeira.

51. Com B percorrendo α e P dividindo $\overline{AB}$ numa razão dada k, o ponto P é a imagem de B pela homotetia de centro A e razão $\frac{k}{1+k}$ (divisão interna) ou $\frac{k}{k-1}$ (divisão externa). A homotetia leva α num plano paralelo a α. O lugar geométrico é, portanto, o **par de planos paralelos a** α que contêm os conjugados harmônicos de um dos segmentos $\overline{AB}$ na razão dada.

52. [D] **I.** Verdadeira (perpendicular comum). **II.** Verdadeira. **III.** Falsa: existem infinitos pontos equidistantes. **IV.** Falsa: uma paralela a R_1 pode ser concorrente com R_2. **V.** Verdadeira. São **três** verdadeiras.

53. O mesmo argumento de homotetia se aplica com A variável sobre $r \parallel \alpha$: como todos os pontos de r estão a uma mesma distância de α, a razão fixa determina uma cota constante. O lugar é novamente o **par de planos paralelos a** α que contêm os conjugados harmônicos na razão dada.

54. [A] Sejam x, y, z as arestas do triedro trirretângulo em D. Do teorema de Pitágoras nas três faces:

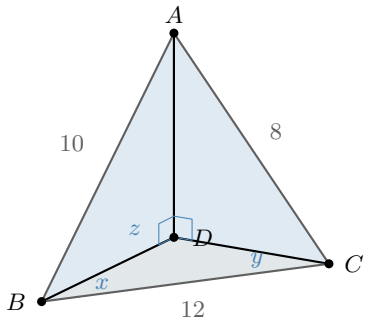
$$x^2 + z^2 = 10^2, \qquad y^2 + z^2 = 8^2, \qquad x^2 + y^2 = 12^2.$$

Somando as três: $2(x^2 + y^2 + z^2) = 308$, logo $x^2 + y^2 + z^2 = 154$ e daí

$$z^2 = 154 - 144 = 10, \qquad y^2 = 154 - 100 = 54, \qquad x^2 = 154 - 64 = 90.$$

Portanto

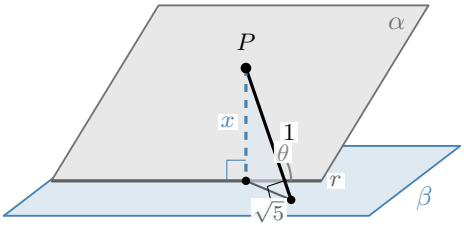
$$V = \frac{xyz}{6} = \frac{\sqrt{90}\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{48\,600}}{6} = \frac{90\sqrt{6}}{6} = 15\sqrt{6}\ \text{m}^3.$$



55. Por um ponto P qualquer tracem-se $r_1 \parallel r$ e $s_1 \parallel s$. O ângulo que uma reta forma com r e com s é o mesmo que ela forma com r_1 e s_1. Portanto a reta procurada deve ser **paralela a (ou pertencer a) uma das bissetrizes dos ângulos formados por** r_1 **e** s_1.

56. [C] Seja x a distância de P à reta $r = \alpha \cap \beta$ e y a distância, medida em β, do pé da perpendicular até r. Como $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, vem $y = \sqrt{5}$. Pelo teorema das três perpendiculares o triângulo é retângulo, e

$$x^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 = 6 \implies x = \sqrt{6}.$$



57. O ângulo de um plano com uma reta é o complemento do ângulo da reta com a normal ao plano. Assim, o plano forma ângulos congruentes com r e s exatamente quando sua normal os forma e, pela questão anterior, isso ocorre quando o plano é **perpendicular a uma das bissetrizes dos ângulos formados por** r_1 **e** s_1.

58. Seja V o vértice e P um ponto da reta, com $VP = d$. Projetando P sobre as três arestas obtêm-se segmentos $VA = d\cos\alpha$, $VB = d\cos\beta$, $VC = d\cos\gamma$. Como as arestas são duas a duas perpendiculares, esses três segmentos são as arestas de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal é VP. Portanto

$$d^2 = d^2\cos^2\alpha + d^2\cos^2\beta + d^2\cos^2\gamma \implies \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

59. Sejam $O = a \cap b$, j a bissetriz de um dos ângulos formados por a e b, e α um plano que contém (ou é paralelo a) j. Marque $A \in a$ e $B \in b$ com $OA = OB$ e sejam A', B' suas projeções ortogonais sobre α. Como j é eixo de simetria da configuração e α a contém, tem-se $AA' = BB'$; com $OA = OB$ e os ângulos retos em A' e B', os triângulos OAA' e OBB' são congruentes. Logo $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$, isto é, a e b formam ângulos iguais com α.

60. Sejam λ, μ, ν os ângulos entre o plano ABC e os planos VBC, VAC, VAB, respectivamente. Como cada face lateral se projeta ortogonalmente sobre ABC,

$$S_1 = S\cos\lambda, \qquad S_2 = S\cos\mu, \qquad S_3 = S\cos\nu.$$

Traçando a altura VH do tetraedro, o teorema das três perpendiculares mostra que λ, μ e ν são exatamente os ângulos que VH forma com as três arestas do triedro trirretângulo. Pela questão anterior, $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, e portanto

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) = S^2.$$

61. **a)** Com I fixo e $M\hat{O}M' = 90°$, o ponto O "vê" $\overline{MM'}$ sob ângulo reto, logo IO é a mediana relativa à hipotenusa: $IO = IM = IM'$. Portanto M' descreve a **superfície esférica de centro I e raio IO**, excetuados O e o ponto diametralmente oposto (que dariam triângulo degenerado).

b) Com M fixo, $M\hat{O}M' = 90°$ obriga M' ao plano α que passa por O e é perpendicular a MO; analogamente $M\hat{O}'M' = 90°$ o obriga ao plano β que passa por O' e é perpendicular a MO'. O lugar é a **reta** $\alpha \cap \beta$.

62. **[C]** $A'B'C'D'$ é a projeção ortogonal de $ABCD$ sobre β, e o ângulo entre os planos é $\pi/6$. Logo

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(A diagonal $AC \parallel r$ garante que a figura se projeta sem "dobras": a razão vale para a área toda.)

63. Como $BS \perp$ plano ABC e $AC \perp AB$, o teorema das três perpendiculares dá $AC \perp SA$, ou seja, $S\hat{A}C = 90°$. Da semelhança $\triangle SC'A' \sim \triangle SAC$ (ângulo comum em S; o plano por B é perpendicular a SC, logo o ângulo reto do triângulo menor está em C') vem

$$SC' \cdot SC = SA' \cdot SA = SB^2.$$

Da segunda igualdade, BA' é a altura relativa à hipotenusa no triângulo retângulo SBA, logo $BA' \perp SA$; como também $BA' \perp AC$, conclui-se $BA' \perp$ plano SAC e portanto $B\hat{A}'C = 90°$. Assim os ângulos $B\hat{A}C$, $B\hat{A}'C$ e $B\hat{C}'C$ são todos retos: os cinco pontos A, B, C, A' e C' estão na **esfera de diâmetro** $\overline{BC}$.

64. Sejam A' e B' as projeções ortogonais de A e B sobre π e M' o ponto médio de $\overline{A'B'}$. Com $C \in \pi$, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em C quando $CA = CB$ e $CA^2 + CB^2 = \ell^2$, ou seja $CA = CB = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$. Escrevendo $CA^2 = CA'^2 + a^2$ e $CB^2 = CB'^2 + b^2$:

$$CA'^2 + CB'^2 = \ell^2 - (a^2 + b^2), \qquad CA'^2 - CB'^2 = b^2 - a^2.$$

A primeira condição situa C numa **circunferência de centro** M' e raio $\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - (a+b)^2}$; a segunda, numa **reta perpendicular a** $A'B'$ distante $\dfrac{b^2 - a^2}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}}$ de M'. O ponto C é a interseção desses dois lugares.

Discussão. A condição geral de existência é $\ell > a+b$. Comparando a distância $d = \dfrac{b^2 - a^2}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}}$ com o raio $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - (a+b)^2}$:

$$d > \rho \;\Rightarrow\; \text{nenhuma solução}; \qquad d = \rho \;\Rightarrow\; \text{uma solução}; \qquad d < \rho \;\Rightarrow\; \text{duas soluções}.$$

65. [A] **I.** Verdadeira. Se $P \in r \cap s$, então P pertence aos três planos (pois r e s são interseções de pares deles), logo $P \in \pi_2 \cap \pi_3 = t$. Três planos secantes dois a dois têm suas retas de interseção *concorrentes ou paralelas*, sem meio-termo.

II. Falsa. Se r e s forem perpendiculares a π, cada projeção é um *ponto*; e se r e s estiverem num mesmo plano perpendicular a π, as projeções **coincidem**.

III. Falsa. Tome r, s, t reversas duas a duas com s e t ambas paralelas ao plano que passa por um ponto e tem a direção de r: a reta u procurada teria de estar no único plano que passa por s com a direção de r, e esse plano pode ser paralelo a t, caso em que u não existe.

66. [A] **Todas falsas.**

I. O ângulo entre r e α é o *menor* dos ângulos entre r e as retas de α (seção 1.6). Se esse mínimo é $45°$, nenhuma reta de α forma $30°$ com r.

II. Faltou exigir que s e t sejam **concorrentes**. Se $s \parallel t$, a reta r pode ser perpendicular a ambas sem ser perpendicular ao plano.

III. As três retas são os lados (prolongados) de um triângulo. No próprio plano do triângulo já há **quatro** pontos equidistantes das três retas: o incentro e os três ex-incentros. Não é único.

IV. Os pontos podem estar no **mesmo** semiespaço; aí o ponto médio dista de α o mesmo que eles e não pertence a α. A afirmação só valeria com P e Q em semiespaços opostos.

67. [A] Seja $AB = a$. Como ABC e ABD são equiláteros de lado a e M é o ponto médio de $\overline{AB}$,

$$MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

e o triângulo MCD é isósceles, de modo que a mediana $\overline{MN}$ é também altura: $MN \perp CD$. No triângulo MNC, retângulo em N,

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \implies \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \implies a^2 = \frac{32}{3}.$$

No triângulo ACD tem-se $AC = AD = a$, logo ele é isósceles e sua altura relativa a $\overline{CD}$ cai em N. Com $CD = 2\,CN = 4$:

$$h = AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{\frac{32}{3} - 4} = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{60}}{3}}\ \text{cm}.$$

68. Seja P o ponto procurado e tome em P um sistema de eixos ao longo das três tangentes, que são duas a duas perpendiculares. Sendo $O = (x, y, z)$ o centro da esfera nesse sistema, o fato de cada eixo ser tangente significa que a distância de O a ele vale R:

$$y^2 + z^2 = R^2, \qquad z^2 + x^2 = R^2, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Somando as três, $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 3R^2$, isto é

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}2247\, R.$$

Reciprocamente, cada uma das equações acima dá $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$, de modo que todo ponto a essa distância admite um tal triedro. O lugar é a **esfera concêntrica de raio** $\frac{R\sqrt{6}}{2}$.

69. Seja $T \in P$ o ponto de contato de uma esfera que passa por A e B.

Caso geral: AB encontra P em D. A potência de D em relação à esfera calcula-se de duas maneiras: pela secante AB, vale $DA \cdot DB$; pela tangente DT, vale DT^2. Logo

$$DT^2 = DA \cdot DB,$$

que é um número fixo. O lugar é a **circunferência de centro D e raio** $\sqrt{DA \cdot DB}$ contida em P — e, reciprocamente, todo ponto dessa circunferência serve, pois a esfera pelos três pontos A, B, T com centro no plano mediador de AB e sobre a perpendicular a P por T é tangente a P.

Caso $AB \parallel P$. O centro está no plano mediador de AB, que agora é perpendicular a P; como T é o pé da perpendicular do centro sobre P, também T está nesse plano. O lugar é a **reta** interseção do plano mediador de AB com P.

70. Seja O o centro da esfera e C o pé da perpendicular baixada de O sobre l. O centro M da seção determinada por um plano $\pi \supset l$ é o pé da perpendicular baixada de O sobre π; logo $OM \perp \pi$ e, em particular, $OM \perp MC$, pois $MC \subset \pi$.

Assim M vê o segmento OC sob ângulo reto, e além disso $OM \perp l$, de modo que M pertence ao plano σ que passa por O e é perpendicular a l. O lugar está contido na **circunferência de diâmetro OC situada em σ**.

Reciprocamente, cada ponto M dessa circunferência é o centro da seção pelo plano π determinado por l e M, desde que esse plano corte efetivamente a esfera, isto é, desde que $OM < R$. Se $OC \le R$ a reta l é secante ou tangente à esfera e toda a circunferência serve; se $OC > R$, apenas o arco correspondente a $OM < R$.

71. Seja O o centro da esfera e C o ponto dado. Se π é um plano por C e M o centro da seção, então $OM \perp \pi$ e, como $MC \subset \pi$, tem-se $OM \perp MC$: o ponto M vê OC sob ângulo reto.

Logo M pertence à **esfera de diâmetro OC**, e reciprocamente todo ponto M dessa esfera é centro da seção pelo plano por C perpendicular a OM, desde que $OM < R$.

Discussão: se C é interior à esfera dada ($OC < R$), toda a esfera de diâmetro OC serve, pois nela $OM \le OC < R$. Se C é exterior, serve apenas a parte da esfera de diâmetro OC interior à esfera dada. Se $C = O$, o lugar reduz-se ao próprio ponto O.

72. Projete tudo ortogonalmente sobre um plano perpendicular ao eixo. O cilindro projeta-se no círculo de raio ϱ e cada lado do trapézio, sendo tangente ao cilindro, projeta-se numa reta tangente a esse círculo: a projeção do trapézio é um trapézio *circunscrito* ao círculo.

As bases são perpendiculares ao eixo, logo projetam-se em verdadeira grandeza, a e b, e a distância entre elas na projeção é 2ϱ. Num trapézio isósceles circunscrito, os comprimentos das tangentes tiradas de um vértice valem $\varrho\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ e $\varrho\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ nos dois extremos de um mesmo lado oblíquo (ângulos suplementares), de modo que o seu produto é ϱ^2; como aqui esses comprimentos são $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$,

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=\varrho^2 \implies 2\varrho=\sqrt{ab}.$$

Finalmente, a altura verdadeira h e a sua projeção 2ϱ estão ligadas pelo ângulo α entre o plano do trapézio e o eixo: $2\varrho = h\operatorname{sen}\alpha$. Logo

$$\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{ab}}{h}.$$

73. Seja P o ponto de onde partem as cordas. Uma corda tirada de P que forme ângulo β com o diâmetro PP' tem comprimento $c = 2R\cos\beta$ (o triângulo $PP'X$ é retângulo em X).

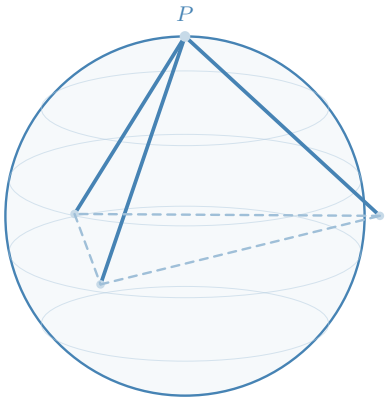
Por simetria, as três cordas formam o mesmo ângulo β com esse diâmetro e estão igualmente espaçadas em torno dele. O ângulo entre duas delas satisfaz

$$\cos\alpha=\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cos 120^\circ=\frac{3\cos^2\beta-1}{2} \implies \cos^2\beta=\frac{1+2\cos\alpha}{3}.$$

Portanto

$$c=2R\cos\beta=\frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

Conferência: para $\alpha=90^\circ$, $c=\frac{2R}{\sqrt{3}}$, o que corresponde a três arestas de um cubo de diagonal $2R$ ✓.

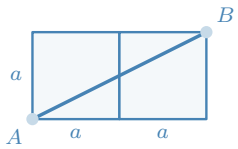


três cordas iguais, duas a duas sob o ângulo α

74. Pela superfície, o caminho atravessa *duas* faces. Planificando essas duas faces, elas formam um retângulo $2a \times a$, e o caminho mais curto é o segmento de reta que liga os dois vértices opostos desse retângulo:

$$\ell = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5} \approx 2{,}24\,a.$$

Qualquer outra planificação dá o mesmo valor, por simetria; e $a\sqrt{5} < 3a$, o comprimento do caminho que segue as arestas. **[C]**



duas faces planificadas

75. Há três planificações possíveis, cada uma juntando duas faces:

$$\sqrt{(1+2)^2+3^2} = \sqrt{18}, \quad \sqrt{(1+3)^2+2^2} = \sqrt{20}, \quad \sqrt{(2+3)^2+1^2} = \sqrt{26}.$$

O menor é $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ — obtido somando as **duas menores** dimensões. **[B]**

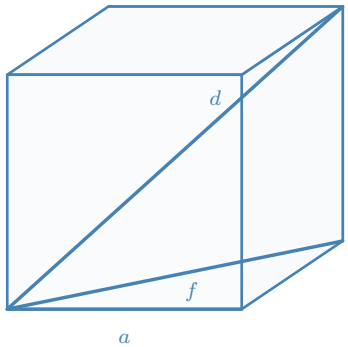
76. Tome o cubo $[0,a]^3$ e o vértice $V = (0,0,0)$. A diagonal do cubo é $\vec{d} = (a,a,a)$, uma diagonal de face concorrente é $\vec{f} = (a,a,0)$ e uma aresta concorrente é $\vec{u} = (a,0,0)$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{f}}{|\vec{d}||\vec{f}|} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, logo $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 35°16'$.

b) $\cos\beta = \dfrac{a^2}{a\sqrt{3}\cdot a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\beta \approx 54°44'$.

c) Com $\vec{d}' = (a,a,-a)$: $\cos\gamma = \dfrac{a^2+a^2-a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{3}$, logo $\gamma = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°32'$.

Vale $\alpha + \beta = 90°$ (a diagonal, a diagonal de face e a aresta formam um triângulo retângulo) e que γ é exatamente o ângulo diedro do tetraedro regular.



$d = a\sqrt{3}$, $f = a\sqrt{2}$

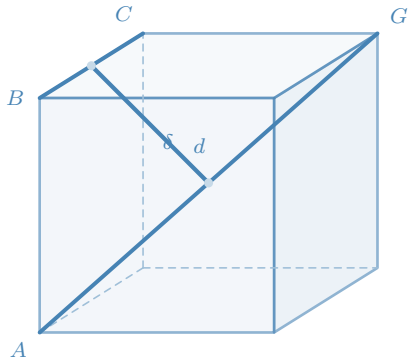
77. No cubo $[0,a]^3$, tome a diagonal r por $(0,0,0)$ com direção $\vec{u}=(1,1,1)$, e a aresta s por $(a,0,0)$ com direção $\vec{v}=(0,1,0)$ — elas são reversas. A distância entre reversas é

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|},\qquad \overrightarrow{AB}=(a,0,0).$$

Como $\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,1)\times(0,1,0)=(-1,0,1)$, com $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2}$,

$$d=\frac{|-a|}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

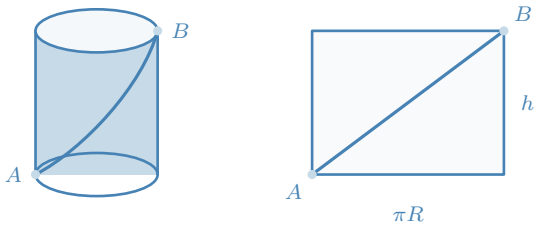
Sinteticamente: a perpendicular comum liga os pontos médios da diagonal e da aresta. **[B]**



78. Planificando a superfície lateral, ela vira um retângulo de base $2\pi R$ (a circunferência) e altura h. Como B está diametralmente oposto a A, na planificação ele fica a *meia* circunferência de distância horizontal:

$$\ell=\sqrt{(\pi R)^2+h^2}=\sqrt{\pi^2R^2+h^2}.$$

Na superfície, esse segmento reto corresponde a um arco de **hélice**. (Ir pela outra metade dá o mesmo comprimento, por simetria.)



planificação da superfície lateral

79. Ponha o cubo em $[0,a]^3$, com centro $O=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. Os centros de duas faces adjacentes são, por exemplo, $F_1=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$ e $F_2=\left(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2}\right)$:

$$F_1F_2=\sqrt{0+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Já a distância de O a qualquer centro de face é $\frac{a}{2}$: os seis centros estão numa esfera de raio $\frac{a}{2}$ — por isso formam um octaedro regular (questão 66).

80. A hipotenusa AB está contida em P, logo se projeta sobre si mesma: o lado $A'B'$ da projeção mede c.

Num triângulo retângulo isósceles a altura relativa à hipotenusa vale $c/2$ e cai no ponto médio M de AB. O vértice C dista $c/2$ da reta AB, medido perpendicularmente a ela no plano do triângulo; como $MC \perp AB$, a projeção C' de C satisfaz $MC' \perp AB$ e

$$MC' = MC\cos\alpha = \frac{c}{2}\cos\alpha.$$

A projeção é portanto o triângulo isósceles de base c e altura $\frac{c}{2}\cos\alpha$, donde

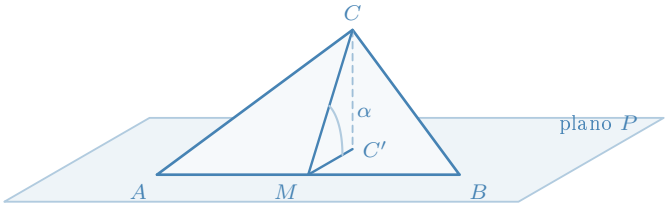
$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,c\cdot\frac{c}{2}\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\cos\alpha}$$

— de acordo com o teorema da área projetada, pois a área do triângulo é $c^2/4$.

Cada lado oblíquo da projeção é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos $c/2$ e $\frac{c}{2}\cos\alpha$:

$$A'C' = B'C' = \frac{c}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}, \qquad \boxed{2p = c\left(1+\sqrt{1+\cos^2\alpha}\right).}$$

Note-se que o perímetro *não* fica multiplicado por $\cos\alpha$: só a área obedece a essa lei.



81. Com $b = c = 60°$ e $\widehat{A} = 90°$ na lei dos cossenos do triedro,

$$\cos a = \cos 60°\cos 60° + \operatorname{sen} 60°\operatorname{sen} 60°\cos 90° = \frac{1}{4},$$

logo $a = \arccos\frac{1}{4} \approx 75°31'$.

Se agora $a = 90°$ com as mesmas faces $b = c = 60°$,

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\widehat{A} \implies \cos\widehat{A} = -\frac{1}{3} \implies \widehat{A} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109°28',$$

o ângulo do diedro suplementar do tetraedro regular — e o ângulo das ligações do carbono tetraédrico.

82. Os vértices do hexágono são os seis pontos médios das arestas que não concorrem nos extremos da diagonal. Dois vértices consecutivos são pontos médios de duas arestas de uma mesma face, logo distam $\frac{a\sqrt{2}}{2}$: o hexágono é regular de lado $\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \boxed{\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}}.$$

O plano do hexágono tem por normal a diagonal, de cossenos diretores $\frac{1}{\sqrt{3}}$; o ângulo θ com o plano de uma face satisfaz portanto $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, e

$$S' = S\cos\theta = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{3a^2}{4}}.$$

Conferência direta. Projetando cada vértice sobre a face inferior, a sombra do hexágono é o quadrado da face menos dois triângulos retângulos isósceles de catetos $\frac{a}{2}$:

$$S' = a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

o mesmo valor.

83. Ponha $A=(0,0,0)$, $B=(a,0,0)$, $C'=(a,a,a)$ e $B'=(a,0,a)$. As duas retas têm vetores diretores $\vec{p}=(1,1,1)$ e $\vec{q}=(0,0,1)$, e

$$\vec{p}\times\vec{q} = (1,-1,0), \qquad \overrightarrow{AB} = (a,0,0).$$

A distância entre reversas é a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre a perpendicular comum:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{p}\times\vec{q})\right|}{|\vec{p}\times\vec{q}|} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{a\sqrt{2}}{2}}.$$

Leitura geométrica. $\vec{p}\times\vec{q}$ é horizontal, de modo que d é a distância, *no plano da base*, do ponto B à diagonal AC do quadrado: metade da diagonal do quadrado de lado a vista de lado, ou seja $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

84. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ unitários nas arestas, com $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}$. Escolha $\vec{v}=(1,0,0)$ e $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$; então $\vec{u}=(x,y,z)$ cumpre

$$x = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \implies y = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

e de $|\vec{u}|=1$ vem $z^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$, isto é, $z = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

O ângulo φ de $\vec{u}$ com o plano Oxy das outras duas arestas tem $\operatorname{sen}\varphi = z$:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \boxed{\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 44'}.$$

Observação. É o mesmo ângulo que a diagonal de um cubo forma com uma face, porque as três faces de 60° são as do triedro de um tetraedro regular, e esse tetraedro se inscreve no cubo.

85. Tome $A=(0,0,0)$, $B=(a,0,0)$, $C=\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $D=\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$. Então

$$M = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right), \qquad N = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{6}\right).$$

Daí $\overrightarrow{MN} = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$ e

$$MN = a\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = a\sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{a\sqrt{2}}{2}}.$$

Com $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

isto é, $\boxed{\alpha = 45^\circ}$.

Sem coordenadas. $\overline{MN}$ é bimediana, logo passa pelo baricentro e é perpendicular às duas arestas opostas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Projetando $\overline{AC}$ sobre a direção de $\overline{MN}$ obtém-se metade de CD contra $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, o que reproduz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

86. [E] Com A na origem e os eixos ao longo de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$,

$$B_1 = \left(\frac{\ell}{3}, 0, 0\right), \quad D_1 = \left(0, \frac{\ell}{3}, 0\right), \quad H_1 = \left(\frac{2\ell}{3}, \ell, \ell\right),$$

pois H_1 está sobre $\overline{GH}$, a $\frac{\ell}{3}$ de $G = (\ell, \ell, \ell)$. Daí

$$D_1B_1 = \frac{\ell\sqrt{2}}{3}, \qquad D_1H_1 = \frac{\ell\sqrt{17}}{3}, \qquad B_1H_1 = \frac{\ell\sqrt{19}}{3}.$$

Como $\frac{2\ell^2}{9} + \frac{17\ell^2}{9} = \frac{19\ell^2}{9}$, o triângulo é retângulo em D_1, e

$$S = \frac{D_1B_1 \cdot D_1H_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{17}}{3} = \boxed{\frac{\ell^2\sqrt{34}}{18}}.$$

87. [A] Na projeção ortogonal, comprimentos paralelos à interseção dos planos conservam-se e comprimentos na direção de maior declive ficam multiplicados por $\cos\varphi$. Para que a imagem seja isósceles, o eixo de simetria do triângulo equilátero deve estar numa dessas duas direções.

Se a *altura* do triângulo fosse a direção encurtada, a base ficaria inalterada e o ângulo do vértice *aumentaria*, jamais chegando a 30°. Logo é a *base* que encurta. Tomando o lado 2, a altura vale $\sqrt{3}$ e a base passa a $2\cos\varphi$; então

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}} \implies \cos\varphi = \sqrt{3}\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3}) = \boxed{2\sqrt{3} - 3} \approx 0{,}4641.$$

(Usámos $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.) Conferindo: com esse fator os ângulos da imagem são 30°, 75° e 75°.

88. [B] **I.** Verdadeira: por três pontos colineares passam infinitos planos, e em particular passa um. **II.** Falsa: a reta pode ser secante ao plano, com um único ponto comum. **III.** Falsa: quatro pontos não coplanares determinam $\binom{4}{3} = 4$ planos, um por terno. **IV.** Falsa: duas retas não paralelas podem ser *reversas*, e reversas não determinam plano algum. **V.** Verdadeira: é o postulado da interseção de planos.

São verdadeiras apenas I e V: duas afirmações.

89. Tome a perpendicular comum a r e r', de pés I em r e K em r', e ponha I na origem, r sobre Ox, a perpendicular comum sobre Oz e r' paralela a Oy à altura $p = \overline{IK}$. Assim $A = (a, 0, 0)$, $B = (b, 0, 0)$, $M = (0, m, p)$ e $M' = (0, m', p)$.

A condição do enunciado. O pé da perpendicular baixada de M' sobre o plano MAB é o ortocentro de MAB exatamente quando o tetraedro é **ortocêntrico**, isto é, quando os três pares de arestas opostas são perpendiculares. O par $\left(\overline{AB}, \overline{MM'}\right)$ já o é, por hipótese; e

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM'} = (-a, m, p) \cdot (-b, m', p) = ab + mm' + p^2,$$

expressão simétrica em (m, m'), de modo que os dois pares restantes dão a mesma condição:

$$mm' = -\left(ab + p^2\right).$$

O centro da esfera. Ele equidista de A e B, logo está no plano $x = \frac{a+b}{2}$; e equidista de M e M', logo está no plano $y = \frac{m+m'}{2}$. Escrevendo $C = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{m+m'}{2}, z\right)$ e impondo $\overline{CA} = \overline{CM}$, os termos em z^2 se cancelam e sobra

$$-ab + mm' + 2zp - p^2 = 0.$$

Com $mm' = -\left(ab + p^2\right)$,

$$2zp = 2ab + 2p^2 \implies z = p + \frac{ab}{p},$$

que não depende de m. Já $\frac{m+m'}{2} = \frac{1}{2}\left(m - \frac{ab+p^2}{m}\right)$ percorre toda a reta real quando m varia.

Logo o lugar geométrico é a **reta paralela a** r' contida no plano mediador de $\overline{AB}$, à distância $p + \dfrac{\overline{IA}\cdot\overline{IB}}{p}$ de r medida na direção da perpendicular comum (distâncias de A e B a I tomadas com sinal). ■

90. Seja M' a projeção ortogonal de M sobre π: quando M percorre c, M' percorre a circunferência c' de centro I e raio r. A interseção $\sigma \cap \pi$ é a reta $\overleftrightarrow{PM'}$, e um ponto X dessa reta satisfaz $\overline{XM}^2 = \overline{XM'}^2 + h^2$; de $\overline{XM} = h\sqrt{3}$ vem $\overline{XM'} = h\sqrt{2}$. Os dois pontos são, pois, os que distam $h\sqrt{2}$ de M' sobre essa reta, e A é o que fica do lado oposto a P:

$$\overline{PA} = \overline{PM'} + h\sqrt{2}.$$

(a) A obtém-se de M' afastando-o de P, sobre a reta PM', de um comprimento constante $h\sqrt{2}$: o lugar geométrico de A é a **conchoide da circunferência** c', de polo P e módulo $h\sqrt{2}$. Em coordenadas polares de polo P, com o eixo polar na direção $\overrightarrow{PI}$, a circunferência c' tem equação $\varrho = h\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi}$, e portanto

$$\varrho = h\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi} + h\sqrt{2}.$$

(No caso particular $r = h$, em que P pertence a c', a curva é um caracol de Pascal.)

(b) Como $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IM'} + h\sqrt{2}\,\vec{u}$, com $\vec{u}$ unitário, a desigualdade triangular dá

$$\overline{IA} \le \overline{IM'} + h\sqrt{2} = r + h\sqrt{2},$$

com igualdade exatamente quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido de $\overrightarrow{IM'}$, isto é quando P, I e M' estão alinhados com M' do lado oposto a P. Esse caso ocorre sempre, e

$$\boxed{\overline{IA}_{\max} = r + h\sqrt{2}.}$$

91. Todo plano tangente a um cone contém uma geratriz e, portanto, passa pelo vértice S. Um plano tangente que passe por P contém então os dois pontos S e P, isto é, contém a reta $\overleftrightarrow{SP}$. Isso já resolve o problema:

1. Determine o traço Q da reta $\overleftrightarrow{SP}$ no plano π.
2. Em π, trace por Q as duas tangentes à circunferência da base, de pontos de tangência T_1 e T_2.
3. Os planos procurados são (S, P, T_1) e (S, P, T_2), tangentes ao cone ao longo das geratrizes $\overline{ST_1}$ e $\overline{ST_2}$.

De fato, um plano que passa por S corta π numa reta por Q, e ele é tangente ao cone exatamente quando essa reta é tangente à circunferência da base. Como P é exterior ao cone, a reta $\overleftrightarrow{SP}$ fura π fora do círculo da base, de modo que Q é exterior a ele e existem duas tangentes: o problema tem **duas** soluções.

Se $\overleftrightarrow{SP}$ for paralela a π não há traço Q; nesse caso os planos procurados são os que contêm $\overleftrightarrow{SP}$ e cortam π segundo as duas tangentes à base paralelas a $\overleftrightarrow{SP}$.

92. Para que ABC seja isósceles de base $\overline{BC}$ é preciso que $AB = AC$, isto é, que A pertença ao plano mediador α de $\overline{BC}$; e para que ARS seja isósceles de base $\overline{RS}$, que A pertença ao plano mediador β de $\overline{RS}$.

Como $\overline{BC}$ e $\overline{RS}$ estão em retas reversas, as suas direções são distintas; logo α e β, perpendiculares a essas direções, não são paralelos e se cortam.

O lugar geométrico pedido é a **reta** $\alpha \cap \beta$, excetuados os eventuais pontos dela que estejam alinhados com B e C ou com R e S — no máximo dois, pois cada uma dessas retas corta um plano mediador em um ponto.

93. Equidistar de A, B e C coloca J na reta r perpendicular ao plano (A, B, C) pelo circuncentro desse triângulo; equidistar de R e de S coloca J no plano mediador α de $\overline{RS}$. Logo

$$J = r \cap \alpha.$$

Discussão. Em geral a reta e o plano são secantes e o problema tem **uma única** solução. O caso de exceção é aquele em que $\overline{RS}$ é paralela ao plano (A, B, C): então α é perpendicular a esse plano e, portanto, paralelo a r ou contendo r. No primeiro caso o problema é **impossível**; no segundo, **todos** os pontos de r servem, e as soluções são infinitas.

94. Passar por A e por B põe o centro no plano mediador γ de $\overline{AB}$; equidistar das concorrentes r e s põe o centro em um dos dois planos bissetores β_1 e β_2 definidos na seção 1.5.

O lugar geométrico é, portanto, o par de retas

$$x = \gamma \cap \beta_1 \qquad \text{e} \qquad y = \gamma \cap \beta_2,$$

desde que γ não seja paralelo a nenhum deles. Se $\overline{AB}$ for paralela à aresta de um dos bissetores, aquela interseção desaparece e resta apenas uma reta; e se γ contiver um bissetor, o lugar passa a ser um plano inteiro.

95. Os pontos do espaço equidistantes de r e de s formam os dois planos bissetores β_1 e β_2. Os pontos procurados são, pois, os traços de a nesses dois planos:

$$J_1 = a \cap \beta_1, \qquad J_2 = a \cap \beta_2.$$

Discussão. São **dois** pontos no caso geral. Se a for paralela a um dos bissetores, resta **um**; se for paralela aos dois — o que só acontece se a for paralela à reta comum a β_1 e β_2, isto é, à perpendicular ao plano de r e s pelo ponto comum —, **nenhum**. E se a estiver contida em um dos bissetores, todos os seus pontos servem.

96. Para ser perpendicular a α, o plano γ precisa conter uma reta perpendicular a α; trace-a por J e chame-a r. Para cortar α e β segundo retas paralelas, γ precisa ser paralelo à interseção $\alpha \cap \beta$ — pois, se γ corta dois planos segundo paralelas, essas paralelas e a reta $\alpha \cap \beta$ são, duas a duas, interseções de três planos, e portanto todas paralelas. Trace, então, por J, a reta s paralela a $\alpha \cap \beta$.

O plano $\gamma = (r, s)$ é a solução, e ela é única, pois r e s são únicas. Se J estivesse sobre a reta $\alpha \cap \beta$, as duas seções passariam por J e não poderiam ser paralelas.

97. Os pontos de α que distam k_1 de J formam a circunferência de centro O_1, projeção ortogonal de J sobre α, e raio

$$\rho_1 = \sqrt{k_1^2 - d(J,\alpha)^2},$$

pois o triângulo JO_1P é retângulo em O_1. Analogamente, os que distam k_2 de L formam a circunferência de centro O_2 e raio $\rho_2 = \sqrt{k_2^2 - d(L,\alpha)^2}$.

Os pontos procurados são as interseções dessas duas circunferências de α: **dois** no caso geral, **um** se elas forem tangentes e **nenhum** se forem exteriores ou interiores uma à outra, isto é, conforme $|\rho_1 - \rho_2| < O_1O_2 < \rho_1 + \rho_2$ ou não.

98. O lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que se apóiam, pelos extremos, em duas retas reversas r e s é o plano π paralelo a ambas e delas equidistante. Para construí-lo, tome P em r e Q em s, marque o ponto médio N de $\overline{PQ}$ e trace por N as paralelas a r e a s: elas definem π.

O ponto médio M procurado deve estar em π e em t: logo M é o traço de t em π. Obtido M, o plano (M, s) corta r em A, e a reta AM encontra s em B: o segmento $\overline{AB}$ é a solução.

Discussão. Se t for paralela a π sem lhe pertencer, não há solução; se t estiver contida em π, cada ponto de t fornece uma, e o problema é indeterminado.

99. Ser ortogonal a a obriga a reta procurada a pertencer ao plano α, conduzido por J perpendicularmente a a; ser ortogonal a b a obriga a pertencer ao plano γ, conduzido por J perpendicularmente a b. Como a e b são reversas, suas direções são distintas, α e γ são secantes, e

$$r = \alpha \cap \gamma$$

é a única solução.

Há um caminho mais curto: por um ponto qualquer trace $b_1 \parallel b$ e considere o plano $\theta = (a, b_1)$; a perpendicular a θ por J já é ortogonal às duas direções e resolve o problema.

100. Equidistar dos dois planos paralelos coloca o ponto no plano μ equidistante deles. Distar de J o valor R — a distância entre os dois planos — coloca o ponto na superfície esférica de centro J e raio R.

O lugar é, pois, $\mu \cap$ esfera: uma **circunferência**, se $d(J,\mu) < R$; um **único ponto**, se $d(J,\mu) = R$; e **vazio**, se $d(J,\mu) > R$.

101. Ser ortogonal a s põe a reta num plano γ perpendicular a s por J; ser paralela a α põe-na no plano α_1, paralelo a α por J. A solução é

$$r = \gamma \cap \alpha_1.$$

Se s for perpendicular a α, os planos γ e α_1 coincidem e *todas* as retas de α_1 por J servem, salvo a que une J ao traço de s em α_1 — essa é perpendicular, e não apenas ortogonal, a s.

102. O plano procurado fica determinado por duas retas concorrentes em A: a perpendicular p a γ, que garante a perpendicularidade dos planos, e a paralela r_1 a r, que garante o paralelismo com r. Como r é oblíqua a γ, as retas p e r_1 são distintas, e o plano (p, r_1) é a única solução.

103. Um plano é perpendicular a outro quando contém uma perpendicular a ele. Trace por J a reta $r \perp \gamma$ e a reta $s \perp \theta$: o plano (r, s) é perpendicular aos dois.

Como γ e θ são secantes, as direções de r e s são distintas e determinam um único plano; logo a solução existe e é única. Ela é, alias, o plano perpendicular à reta $\gamma \cap \theta$ conduzido por J.

104. Em cada triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também altura e é perpendicular à base; sendo a base a interseção do plano do triângulo com α, essa mediana é justamente a **reta de máximo declive** do plano do triângulo em relação a α — e, por isso, o ângulo que ela forma com α é o ângulo dos dois planos.

Sendo O a projeção de A sobre α e M o pé da mediana, o triângulo AOM é retângulo em O e dá $OM = \dfrac{d}{\operatorname{tg}\theta}$. Para θ variando de 30° a 45°,

$$OM \text{ varia de } d\sqrt{3} \text{ a } d,$$

de modo que os pontos M varrem a coroa circular de centro O e raios d e $d\sqrt{3}$.

O baricentro G está sobre $\overline{AM}$ com $AG = \frac{2}{3}AM$: é o homotético de M no polo A e razão $\frac{2}{3}$. Logo o lugar de G é a homotética daquela coroa: a **coroa circular** contida no plano paralelo a α a distância $\dfrac{d}{3}$ dele, de centro na perpendicular AO e raios

$$\frac{2d}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2d\sqrt{3}}{3}.$$

105. Ser vértice dos dois triângulos isósceles coloca A na reta r, interseção dos planos mediadores de $\overline{BC}$ e de $\overline{PQ}$. Equidistar de α e γ coloca A em um dos dois planos bissetores β_1 e β_2 desses planos.

Há, pois, **duas** posições: os traços de r em β_1 e em β_2. Se r for paralela a um dos bissetores, resta uma; se for paralela à interseção dos dois, nenhuma; e se estiver contida em um deles, qualquer ponto de r serve.

106. Uma transversal a um feixe de planos paralelos e equidistantes fica dividida por eles em partes iguais. A reta AD é uma dessas transversais: divida o segmento $\overline{AD}$ em três partes iguais, obtendo R e S nessa ordem.

Então R deve estar no plano de B e S no plano de C. Logo as retas BR e CS têm, cada uma, dois pontos de um mesmo plano do feixe, e fixam a direção comum: o plano (BR, CS) — ou, se essas retas forem reversas, o plano por B paralelo a ambas — dá a direção do feixe. Basta, por fim, conduzir por A, B, C e D os quatro planos dessa direção.

107. Uma reta forma ângulos iguais com duas reversas r e s quando é paralela a um dos planos bissetores dos ângulos formados por duas concorrentes respectivamente paralelas a r e a s.

Tome, então, um ponto J qualquer, trace $r_1 \parallel r$ e $s_1 \parallel s$ e construa os dois planos bissetores β_1 e β_2 dos ângulos de r_1 e s_1. As interseções $a = \beta_1 \cap \alpha$ e $b = \beta_2 \cap \alpha$ dão as duas direções possíveis: paralelas a α e igualmente inclinadas sobre r e s.

Para construir a transversal com a direção de a, por exemplo, conduza por r o plano γ paralelo a a; o ponto $A = \gamma \cap s$ é um extremo, e a paralela a a por A corta r no outro. A direção de b fornece a segunda solução.

108. As três arestas do triedro trirretângulo são perpendiculares duas a duas, de modo que cada lado do triângulo-seção é hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos 6:

$$AB = BC = CA = 6\sqrt{2},$$

e a seção é equilátera. O raio do círculo nela inscrito é um terço da altura:

$$\rho = \frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \quad\Longrightarrow\quad S = \pi\rho^2 = 6\pi \text{ cm}^2.$$

Pela simetria da configuração, as três projeções do círculo têm a mesma área S'; e o teorema de De Gua dá

$$S^2 = 3S'^2 \quad\Longrightarrow\quad S' = \frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{6\pi}{\sqrt{3}} = \boxed{2\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2} \approx 10{,}88 \text{ cm}^2.$$

109. Todos os planos que passam por A e formam o ângulo $\widehat{x}$ com α tangenciam um mesmo cone de revolução de vértice A, eixo perpendicular a α e base em α, cujas geratrizes formam $\widehat{x}$ com α.

Por outro lado, para ser paralelo a r, o plano γ deve conter a reta s, paralela a r por A. Seja H o traço de s em α: o plano procurado é determinado por s e por uma tangente à base do cone conduzida por H.

Discussão. Chamando $\widehat{\varphi}$ o ângulo de r com α:

- se $\widehat{\varphi} < \widehat{x}$, o ponto H é exterior à base do cone e há **duas** tangentes, logo **duas** soluções;
- se $\widehat{\varphi} = \widehat{x}$, H está sobre a base e há **uma**;
- se $\widehat{\varphi} > \widehat{x}$, H é interior à base e o problema é **impossível**.

No caso particular de r ser paralela a α, as duas soluções correspondem às duas tangentes paralelas à base, e os dois planos se cortam segundo a paralela a r por A.