IME 2026/2027 — Matemática

Prova discursiva — gabarito completo

Concurso de Admissão ao Curso de Formação e Graduação

Dez questões resolvidas · 5ª questão com pedido de anulação

Gabarito

#	frente	resposta
1	Números complexos / Geometria plana	$12\sqrt{3}-18 \approx 2{,}785$
2	Números complexos / Probabilidade	$\dfrac{2}{5}$
3	Funções / Séries	$x = 7$
4	Polinômios	1345
5	Progressões / Logaritmos	**anulação pedida** — 10 912 com 5440; $\approx$ 11 196,4994 com 5540 impresso
6	Probabilidade / Permutações	$\dfrac{1}{3}$
7	Matrizes / Combinatória	$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{2026}{1001}$, divisível por 1013
8	Trigonometria	identidade demonstrada (soma telescópica)
9	Geometria analítica	$\left(\pm 2\sqrt{3},\ \pm\frac{1}{7}\right)$ — quatro pontos
10	Geometria espacial	$V_{\max} = 192\sqrt{3}$ cm^3; cubo de aresta $4\sqrt{3}$ cm

Resoluções

1ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · números complexos e geometria plana

Enunciado. *Sejam $z_0, z_1, \ldots, z_{11}$ as doze raízes complexas da equação $z^{12} = 1$, representadas no plano de Argand-Gauss. O hexágono regular $\mathcal{P}$ tem por vértices as raízes de índice par, e o hexágono regular $\mathcal{I}$ as de índice ímpar. Determine a área da região coberta pela união $\mathcal{P} \cup \mathcal{I}$.*

Resolução. As raízes são $z_k = \operatorname{cis}\dfrac{k\pi}{6}$, $k = 0, \ldots, 11$, igualmente espaçadas de 30° sobre a circunferência unitária. As de índice par têm argumentos $0°, 60°, \ldots, 300°$ e as de índice ímpar, $30°, 90°, \ldots, 330°$: $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ são hexágonos regulares congruentes, de circunraio 1, um girado de 30° em relação ao outro.

(i) Área de cada hexágono. Seis triângulos equiláteros de lado 1:

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{I}] = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

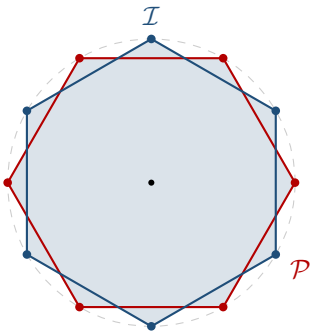
(ii) A interseção é um dodecágono regular. Um hexágono regular de circunraio 1 é a interseção de seis semiplanos cujas retas-suporte distam do centro o apótema $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com normais espaçadas de 60°. Reunindo os seis semiplanos de $\mathcal{P}$ aos seis de $\mathcal{I}$, obtêm-se doze semiplanos, todos à mesma distância $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ do centro e com normais espaçadas de 30°: a interseção é um dodecágono regular de apótema $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como um polígono regular de n lados e apótema m tem área $n\,m^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, e $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$,

$$[\mathcal{P} \cap \mathcal{I}] = 12 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 18 - 9\sqrt{3}.$$

(iii) Inclusão–exclusão.

$$[\mathcal{P} \cup \mathcal{I}] = [\mathcal{P}] + [\mathcal{I}] - [\mathcal{P} \cap \mathcal{I}] = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(18 - 9\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 18 + 9\sqrt{3}$$

$$\boxed{[\mathcal{P} \cup \mathcal{I}] = 12\sqrt{3} - 18 \ \approx\ 2{,}785}$$



A união é a estrela de doze pontas da figura: o dodecágono central mais doze triângulos. Conferência independente: cada triângulo da ponta tem área $\frac{[\mathcal{P}]-[\mathcal{P}\cap\mathcal{I}]}{6}$, e $12\sqrt{3}-18=\left(18-9\sqrt{3}\right)+12\cdot\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\left(18-9\sqrt{3}\right)}{6}$.

2ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · números complexos e probabilidade

Enunciado. *Seja a equação $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$, com $z\in\mathbb{C}$. Ao escolher ao acaso uma raiz qualquer dessa equação, qual a probabilidade dela satisfazer $\left|z-\frac{3}{2}\right|\le\frac{\sqrt{7}}{2}$?*

Resolução. **(i) As raízes.** Como $z=1$ não é raiz (a soma daria 6), pode-se multiplicar por $z-1$:

$$(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5\right)=z^6-1=0.$$

Logo as raízes são as seis raízes sextas da unidade *exceto* $z=1$:

$$z_k=\operatorname{cis}\frac{k\pi}{3},\quad k=1,2,3,4,5\implies \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -1.$$

(ii) A condição. $\left|z-\frac{3}{2}\right|\le\frac{\sqrt{7}}{2}$ é o disco fechado de centro $\left(\frac{3}{2},0\right)$ e raio $\frac{\sqrt{7}}{2}$; basta comparar $\left|z-\frac{3}{2}\right|^2$ com $\frac{7}{4}$:

raiz	$\left\|z-\frac{3}{2}\right\|^2$	valor	no disco?
$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$(-1)^2+\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	sim (na borda)
$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$(-2)^2+\frac{3}{4}$	$\frac{19}{4}$	não
-1	$\left(-\frac{5}{2}\right)^2$	$\frac{25}{4}$	não

As duas raízes de parte real $\frac{1}{2}$ estão *exatamente sobre* a circunferência; como a desigualdade não é estrita, elas contam.

(iii) São 5 raízes equiprováveis e 2 favoráveis:

$$\boxed{P=\frac{2}{5}}$$

Armadilha: incluir $z=1$ (que satisfaria a inequação, pois $\left|1-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}$) levaria a $3/6=1/2$ — mas $z=1$ foi introduzido pela multiplicação por $z-1$ e não é raiz da equação dada.

3ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · funções e séries

Enunciado. *Para cada inteiro positivo n, seja $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g_n(x)=0$ se $x\le-\frac{1}{n}$ e $g_n(x)=1$ se $-\frac{1}{n}<x$. Seja $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n(x)}{3}\right)^n$. Determine o menor valor inteiro de x para o qual $f(x)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\ge 0{,}999$.*

Resolução. **(i) Cálculo de f.** Como $g_n(x)\in\{0,1\}$, tem-se $\left(\frac{g_n(x)}{3}\right)^n=3^{-n}$ quando $g_n(x)=1$ e 0 quando $g_n(x)=0$. Resta decidir para quais n vale $g_n(x)=1$:

$$g_n(x)=1\iff x>-\frac{1}{n}.$$

- Se $x \geq 0$: $x > -\frac{1}{n}$ para todo n, logo $f(x) = \sum_{n\geq 1} 3^{-n} = \dfrac{1/3}{1-1/3} = \dfrac{1}{2}$.
- Se $x < 0$, escreva $x = -t$ com $t > 0$. Então $-t > -\frac{1}{n} \iff t < \frac{1}{n} \iff n < \frac{1}{t}$. Assim $g_n(x) = 1$ exatamente para $n = 1, 2, \ldots, M$, onde M é o maior inteiro *estritamente* menor que $\frac{1}{t}$ (e $M = 0$ se $\frac{1}{t} \leq 1$, isto é, se $x \leq -1$). Portanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{M} 3^{-n} = \frac{1}{2}\left(1 - 3^{-M}\right).$$

Em particular $f(x) = 0$ para todo $x \leq -1$, e f assume valores em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(ii) A soma pedida. Como $f \leq \frac{1}{2}$ sempre, a condição $f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \geq 0{,}999$ exige que *ambas* as parcelas sejam próximas de $\frac{1}{2}$.

- Se x é inteiro negativo, então $x \leq -1$ e $f(x) = 0$, de modo que a soma vale no máximo $\frac{1}{2}$. Não serve.
- Se x é inteiro positivo, então $f(x) = \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{x} < 0$ com $t = \frac{1}{x}$, logo $\frac{1}{t} = x$ e M é o maior inteiro menor que x, ou seja $M = x - 1$. Assim

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 3^{-(x-1)}\right), \qquad f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{3^{1-x}}{2}.$$

(iii) A desigualdade.

$$1 - \frac{3^{1-x}}{2} \;\geq\; 0{,}999 \iff \frac{3^{1-x}}{2} \leq \frac{1}{1000} \iff 3^{x-1} \;\geq\; 500.$$

Como $3^5 = 243 < 500$ e $3^6 = 729 \geq 500$, vem $x - 1 \geq 6$, isto é

$$\boxed{x = 7}$$

Conferência: $x = 6$ dá $1 - \frac{1}{2\cdot 243} = 0{,}99794 < 0{,}999$ e $x = 7$ dá $1 - \frac{1}{2\cdot 729} = 0{,}99931 \geq 0{,}999$.

4ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · polinômios

Enunciado. *Determine o valor de* $(y_1 + x_1)(y_1 + x_2)(y_2 + x_1)(y_2 + x_2)(y_3 + x_1)(y_3 + x_2)$, *em que* (y_1, y_2, y_3) *e* (x_1, x_2) *são respectivamente as raízes das equações* $y^3 - 4y - 2 = 0$ *e* $x^2 - 7x - 3 = 0$.

Resolução. **(i) Reduzir o produto duplo a um produto simples.** Seja $P(y) = y^3 - 4y - 2 = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$. Para cada j,

$$\prod_{i=1}^{3}(y_i + x_j) = \prod_{i=1}^{3}\left[-\left(-x_j - y_i\right)\right] = (-1)^3 P(-x_j) = -P(-x_j).$$

Como $P(-x) = -x^3 + 4x - 2$, segue $-P(-x_j) = x_j^3 - 4x_j + 2$, e o produto procurado é

$$\Pi = \left(x_1^3 - 4x_1 + 2\right)\left(x_2^3 - 4x_2 + 2\right).$$

(ii) Rebaixar o grau. De $x_j^2 = 7x_j + 3$ vem

$$x_j^3 = 7x_j^2 + 3x_j = 7\left(7x_j + 3\right) + 3x_j = 52x_j + 21,$$

logo $x_j^3 - 4x_j + 2 = 48x_j + 23$ e

$$\Pi = (48x_1 + 23)(48x_2 + 23) = 48^2 x_1 x_2 + 48 \cdot 23\,(x_1 + x_2) + 23^2.$$

(iii) Girard. Em $x^2-7x-3=0$: $x_1+x_2=7$ e $x_1x_2=-3$. Então

$$\Pi = 2304\cdot(-3)+1104\cdot 7+529 = -6912+7728+529$$

$$\boxed{\Pi = 1345}$$

5ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · progressões e logaritmos

Enunciado. *Sejam $x_1,x_2,\ldots,x_9$ números reais positivos tais que $\log_2 x_1,\log_2 x_2,\ldots,\log_2 x_9$ formam uma progressão aritmética de razão positiva. Sabe-se que $x_1x_3x_5x_7x_9=2^{45}$ e que $x_2+x_4+x_6+x_8=5540$. Determine $x_1+x_3+x_5+x_7+x_9$.*

Resolução. **(i) A sequência é uma PG.** Se $\log_2 x_k = a+(k-1)d$ com $d>0$, então $x_k = 2^a\left(2^d\right)^{k-1}$: os x_k formam uma progressão geométrica de primeiro termo $x_1=2^a$ e razão $q=2^d>1$.

(ii) O produto dá o termo central. Os índices $1,3,5,7,9$ têm expoentes $a,\ a+2d,\ a+4d,\ a+6d,\ a+8d$, cuja soma é $5(a+4d)$. De

$$x_1x_3x_5x_7x_9 = 2^{\,5(a+4d)} = 2^{45} \implies a+4d=9 \implies \boxed{x_5 = 2^9 = 512}$$

(ou, diretamente, $x_1x_9=x_3x_7=x_5^2$, donde o produto é x_5^5).

(iii) Uma equação na variável $u=q+\frac{1}{q}$. Escrevendo os termos de índice par em torno de x_5, isto é $x_2=x_5q^{-3}$, $x_4=x_5q^{-1}$, $x_6=x_5q$, $x_8=x_5q^3$:

$$x_2+x_4+x_6+x_8 = 512\left(q^{-3}+q^{-1}+q+q^3\right) = 512\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right) = 512\,u\left(u^2-2\right),$$

pois $q^2+q^{-2}=u^2-2$. Logo

$$512\left(u^3-2u\right)=5540 \implies u^3-2u-\frac{1385}{128}=0 \implies 128u^3-256u-1385=0.$$

Não há raiz racional: pelas candidatas $\pm\frac{p}{r}$ com $p\mid 1385=5\cdot277$ e $r\mid 128$, nenhuma anula o polinômio. A equação é, porém, uma **cúbica reduzida** — resolve-se por Cardano.

(iv) Cardano. Em $u^3+pu+Q=0$ com $p=-2$ e $Q=-\frac{1385}{128}$, o discriminante é

$$\Delta = \left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{1385}{256}\right)^2-\frac{8}{27} = \frac{51\,267\,787}{1\,769\,472}>0,$$

de modo que há *uma* raiz real (as outras duas são complexas conjugadas), dada por

$$\boxed{u=\sqrt[3]{\frac{1385}{256}+\frac{\sqrt{153\,803\,361}}{2304}}+\sqrt[3]{\frac{1385}{256}-\frac{\sqrt{153\,803\,361}}{2304}}} \approx 2{,}511\,600\,10,$$

onde se usou $\sqrt{\Delta}=\dfrac{\sqrt{51\,267\,787}}{768\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{153\,803\,361}}{2304}$. Dessa raiz saem a razão e a razão da PA:

$$q^2-uq+1=0 \implies q=\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2}\approx 2{,}015\,427\,4, \qquad d=\log_2 q\approx 1{,}011\,085\,8.$$

(v) A soma pedida. Pondo $v=q^2+\dfrac{1}{q^2}=u^2-2$, tem-se $x_1+x_9=x_5\left(v^2-2\right)$ e $x_3+x_7=x_5v$, logo

$$x_1+x_3+x_5+x_7+x_9 = 512\left(v^2+v-1\right), \qquad v=u^2-2\approx 4{,}308\,135\,1,$$

$$\boxed{x_1+x_3+x_5+x_7+x_9 \approx 11\,196{,}4994}$$

valor que é a única raiz real de

$$2S^3 + 1024S^2 + 60\,858\,912\,S - 3\,616\,999\,189\,281 = 0$$

(polinômio obtido eliminando-se v entre $v^3+2v^2 = \left(\frac{1385}{128}\right)^2$ e $S = 512\left(v^2+v-1\right)$). Conferência: com esse q, $x_2+x_4+x_6+x_8 = 5540$ exatamente.

Nota. A questão *tem* solução exata com o enunciado original — só que irracional, de grau 3. É bastante provável, porém, que a intenção fosse $x_2+x_4+x_6+x_8 = 5440$: nesse caso $u^3-2u = \frac{85}{8}$, ou $8u^3-16u-85=0$, que tem a raiz racional $u = \frac{5}{2}$ (fatorando, $(2u-5)\left(4u^2+10u+17\right)=0$, e o segundo fator tem $\Delta = 100-272<0$); daí $q+\frac{1}{q} = \frac{5}{2}$ dá $q=2$ (pois $q = 2^d > 1$), $d=1$, $a=5$, a sequência $32, 64, 128, \ldots, 8192$ e a resposta redonda

$$x_1+x_3+x_5+x_7+x_9 = 512\left(q^{-4}+q^{-2}+1+q^2+q^4\right) = 512\cdot\frac{341}{16} = 10\,912.$$

Vale o recurso pedindo a correção das duas respostas.

6ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · probabilidade e permutações

Enunciado. *Seja $\mathcal{S} = \{1,2,\ldots,9\}$. Escolhe-se ao acaso uma função bijetora $f:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$. Sabendo que $f^{(9)} = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{9\ \text{vezes}}$, qual a probabilidade de que $f^{(9)}(1)=1$?*

Resolução. **(i) Tradução em ciclos.** Uma bijeção de $\mathcal{S}$ é uma permutação; o elemento 1 pertence a um único ciclo, de comprimento L. Aplicando f repetidamente a 1, percorre-se esse ciclo, e

$$f^{(k)}(1) = 1 \iff L \mid k.$$

Logo $f^{(9)}(1)=1 \iff L\mid 9 \iff L\in\{1,3,9\}$.

(ii) Distribuição de L. Afirmação: numa permutação aleatória de n elementos, o comprimento do ciclo que contém um elemento fixado é *uniforme* em $\{1,2,\ldots,n\}$. De fato, o número de permutações de $\mathcal{S}$ em que o ciclo de 1 tem comprimento exatamente L é

$$\underbrace{\binom{n-1}{L-1}}_{\text{escolha dos outros do ciclo}} \cdot \underbrace{(L-1)!}_{\text{ciclos com esses } L} \cdot \underbrace{(n-L)!}_{\text{permuta o resto}} = \frac{(n-1)!}{(L-1)!\,(n-L)!}\,(L-1)!\,(n-L)! = (n-1)!,$$

quantidade que *não depende de* L. Assim $P(L=k) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ para todo $k=1,\ldots,n$.

(iii) Com $n=9$, há três valores favoráveis ($L=1,3,9$):

$$P = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Simulação com 2×10^5 permutações aleatórias: frequência 0,332.

7ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · matrizes e combinatória

Enunciado. *Com $m>n$ inteiros positivos, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times(n+2)}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{(n+2)\times 3}$ têm entradas $a_{1j} = \binom{m}{j-3}$, $a_{2j} = \binom{m}{j-2}$, $a_{3j} = \binom{m}{j-1}$ para $1\le j\le n+2$, e $b_{i1} = b_{i2} = \binom{n}{n+2-i}$, $b_{i3} = \binom{n+1}{n+2-i}$ para $1\le i\le n+2$, com a convenção $\binom{a}{c} = 0$ se $c<0$ ou $c>a$. Mostre que, para $m = 2^{10}$ e $n = 10^3$, o traço de $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ é divisível por 1013.*

Resolução. **(i) As três entradas da diagonal.** Por definição de produto, $(\mathbf{AB})_{kk} = \sum_{j=1}^{n+2} a_{kj}b_{jk}$. Usa-se a identidade de Vandermonde $\sum_t \binom{m}{t}\binom{n}{s-t} = \binom{m+n}{s}$.

$$(\mathbf{AB})_{11} = \sum_j \binom{m}{j-3}\binom{n}{n+2-j} \overset{t=j-3}{=} \sum_t \binom{m}{t}\binom{n}{(n-1)-t} = \binom{m+n}{n-1},$$

$$(\mathbf{AB})_{22} = \sum_j \binom{m}{j-2}\binom{n}{n+2-j} \overset{t=j-2}{=} \sum_t \binom{m}{t}\binom{n}{n-t} = \binom{m+n}{n},$$

$$(\mathbf{AB})_{33} = \sum_{j} \binom{m}{j-1}\binom{n+1}{n+2-j} \overset{t=j-1}{=} \sum_{t} \binom{m}{t}\binom{n+1}{(n+1)-t} = \binom{m+n+1}{n+1}.$$

(ii) Somar com Stifel. Pela relação de Stifel $\binom{N}{s-1} + \binom{N}{s} = \binom{N+1}{s}$, aplicada duas vezes:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{m+n}{n-1} + \binom{m+n}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1}.$$

(iii) O caso pedido. Com $m = 2^{10} = 1024$ e $n = 10^3 = 1000$:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \binom{1024+1000+2}{1001} = \binom{2026}{1001}.$$

Note que 1013 é primo e $2026 = 2 \cdot 1013$. Pela fórmula de Legendre, o expoente de 1013 em $N!$ é $\sum_{r\geq 1} \lfloor N/1013^r \rfloor$, e como $1013^2 = 1\,026\,169 > 2026$ basta o primeiro termo:

$$\nu_{1013}(2026!) = \left\lfloor \frac{2026}{1013} \right\rfloor = 2, \quad \nu_{1013}(1001!) = 0, \quad \nu_{1013}(1025!) = \left\lfloor \frac{1025}{1013} \right\rfloor = 1.$$

Portanto

$$\nu_{1013}\left[\binom{2026}{1001}\right] = \nu_{1013}(2026!) - \nu_{1013}(1001!) - \nu_{1013}(1025!) = 2 - 0 - 1 = 1 \ \geq \ 1,$$

ou seja, 1013 divide $\operatorname{tr}(\mathbf{AB})$. ■

Conferência da fórmula do traço por cálculo direto do produto matricial: $(m,n) = (7,3) \to 495 = \binom{12}{4}$; $(9,4) \to 3003 = \binom{15}{5}$; $(12,5) \to 27\,132 = \binom{19}{6}$.

8ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · trigonometria

Enunciado. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ e $\cos(j\alpha) \neq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Mostre que* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos((n+1)\alpha)}$.

Resolução. (i) Fatorar o denominador. Por prostaférese, $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ com $A = (2k+1)\alpha$ e $B = \alpha$:

$$\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha = 2\cos\left((k+1)\alpha\right)\cos\left(k\alpha\right),$$

não nulo pelas hipóteses ($k = 1, \ldots, n$ exige $\cos(j\alpha) \neq 0$ para $j = 1, \ldots, n+1$).

(ii) Transformar em diferença de tangentes. Como

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left((k+1)\alpha - k\alpha\right) = \operatorname{sen}\left((k+1)\alpha\right)\cos\left(k\alpha\right) - \cos\left((k+1)\alpha\right)\operatorname{sen}\left(k\alpha\right),$$

dividindo por $\cos(k\alpha)\cos((k+1)\alpha)$ vem

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(k\alpha)\cos((k+1)\alpha)} = \operatorname{tg}\left((k+1)\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(k\alpha\right),$$

isto é,

$$\frac{1}{\cos\alpha + \cos(2k+1)\alpha} = \frac{1}{2\cos(k\alpha)\cos((k+1)\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\left((k+1)\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(k\alpha\right)}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

(iii) Telescopar.

$$S_n = \frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{tg}\left((k+1)\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(k\alpha\right)\right] = \frac{\operatorname{tg}\left((n+1)\alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

(iv) Reagrupar. Pondo as tangentes sobre denominador comum,

$$\operatorname{tg}((n+1)\alpha) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}((n+1)\alpha)\cos\alpha - \cos((n+1)\alpha)\operatorname{sen}\alpha}{\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha}.$$

Logo

$$S_n = \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\cos((n+1)\alpha)} = \boxed{\frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos((n+1)\alpha)}} \qquad \blacksquare$$

9ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · geometria analítica

Enunciado. *A normal no ponto P da elipse $x^2+4y^2=16$ intercepta o eixo x no ponto Q. Se M é o ponto médio do segmento PQ, determine os pontos em que o lugar geométrico de M intersecta as retas $x=+c$ e $x=-c$, sabendo que $2c$ é a distância entre os focos da elipse dada.*

Resolução. **(i) Elementos da elipse.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, com $a=4$, $b=2$ e

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \implies c = 2\sqrt{3}.$$

(ii) A normal e o ponto Q. Derivando implicitamente $x^2+4y^2=16$: $2x+8y\,y'=0$, logo a tangente em $P=(x_0,y_0)$, com $y_0\neq 0$, tem coeficiente angular $-\dfrac{x_0}{4y_0}$ e a normal, $\dfrac{4y_0}{x_0}$ (supondo $x_0\neq 0$):

$$y - y_0 = \frac{4y_0}{x_0}(x - x_0).$$

Fazendo $y=0$: $-y_0 = \dfrac{4y_0}{x_0}(x-x_0) \Rightarrow x - x_0 = -\dfrac{x_0}{4}$, ou seja

$$Q = \left(\frac{3x_0}{4},\, 0\right).$$

(iii) O lugar geométrico de M.

$$M = \left(\frac{x_0 + \frac{3x_0}{4}}{2},\ \frac{y_0}{2}\right) = \left(\frac{7x_0}{8},\ \frac{y_0}{2}\right) \implies x_0 = \frac{8x}{7}, \quad y_0 = 2y.$$

Substituindo na elipse original:

$$\left(\frac{8x}{7}\right)^2 + 4\,(2y)^2 = 16 \implies \frac{64x^2}{49} + 16y^2 = 16 \implies \boxed{\frac{4x^2}{49} + y^2 = 1},$$

uma elipse de semieixos $\frac{7}{2}$ e 1.

(iv) Interseção com $x=\pm c=\pm 2\sqrt{3}$.

$$\frac{4\cdot 12}{49} + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49} \implies y = \pm\frac{1}{7}.$$

São, portanto, quatro pontos:

$$\boxed{\left(2\sqrt{3},\ \tfrac{1}{7}\right),\ \left(2\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{7}\right),\ \left(-2\sqrt{3},\ \tfrac{1}{7}\right),\ \left(-2\sqrt{3},\ -\tfrac{1}{7}\right)}$$

Coerência: $2\sqrt{3}\approx 3{,}464 < \frac{7}{2} = 3{,}5$, de modo que as retas $x=\pm c$ realmente cortam o lugar geométrico. Os casos excluídos acima estão contemplados por continuidade: $x_0=0$ dá normal vertical, com Q na origem e $M=(0,\pm 1)$, que satisfaz a equação obtida; $y_0=0$ dá normal sobre o próprio eixo x, com $P=Q=M=(\pm 4,0)$, e $\left(\pm\frac{7}{2},0\right)$ é o limite correspondente do lugar.

10ª QUESTÃO

Valor: 1,0 · geometria espacial

Enunciado. *Considere um prisma quadrangular reto, completamente contido em uma esfera $\mathcal{S}$ de raio 6 cm. Sabe-se que os quatro vértices de uma das faces do prisma pertencem à superfície da esfera $\mathcal{S}$. Determine: (a) o volume máximo que esse prisma pode assumir; (b) a altura e as dimensões da base do prisma correspondentes a esse volume máximo.*

Resolução. Sejam $R = 6$ cm, h a altura do prisma e O o centro da esfera. Tome o eixo z perpendicular às bases, com origem em O, e suponha a face *apoiada* na esfera no plano $z = t$, com $t > 0$ (o caso $t < 0$ é simétrico e $t = 0$ daria um prisma degenerado).

(i) A face apoiada. Seus quatro vértices estão na circunferência de interseção da esfera com o plano $z = t$, de raio $r = \sqrt{R^2 - t^2}$. Entre os quadriláteros inscritos numa circunferência de raio r, o de maior área é o quadrado: se d_1, d_2 são as diagonais e θ o ângulo entre elas,

$$[\text{base}] = \tfrac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta \le \tfrac{1}{2}(2r)(2r) = 2r^2,$$

com igualdade só quando as duas diagonais são diâmetros perpendiculares, isto é, quando a base é um quadrado de lado $a = r\sqrt{2}$.

(ii) Até onde a outra face pode ir. A outra face está no plano $z = t - h$, e seus vértices distam de O

$$\sqrt{r^2 + (t-h)^2} \le R = \sqrt{r^2 + t^2} \iff (t-h)^2 \le t^2 \iff 0 \le h \le 2t.$$

Como o volume cresce com h, o máximo ocorre em $h = 2t$ — e então a segunda face também tem seus vértices sobre a esfera: *o prisma ótimo é inscrito.*

(iii) Maximizar. Com $h = 2t$ e $a^2 = 2r^2 = 2\left(R^2 - t^2\right)$, o vínculo escreve-se

$$R^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{4}, \qquad V = a^2 h.$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nas três parcelas,

$$\frac{R^2}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{h^2}{4}} \implies \frac{R^6}{27} \ge \frac{a^4 h^2}{64} \implies V^2 = a^4 h^2 \le \frac{64R^6}{27} \implies V \le \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3,$$

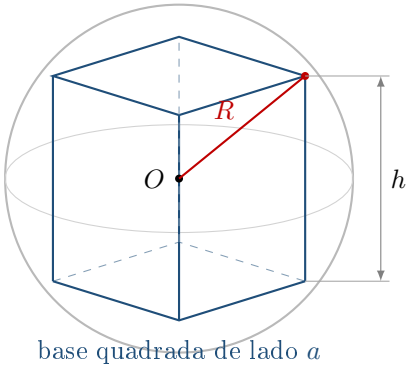
com igualdade se, e somente se, $\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{h^2}{4}$, ou seja $a = h$: o prisma de volume máximo é um **cubo**.

(a) Com $R = 6$:

$$V_{\max} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot 216 = \boxed{192\sqrt{3}\ \text{cm}^3} \approx 332{,}55\ \text{cm}^3.$$

(b) De $R^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$ vem $a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ (o que confere com a diagonal do cubo ser um diâmetro: $a\sqrt{3} = 2R$):

$$\boxed{\text{altura } h = 4\sqrt{3}\ \text{cm}; \quad \text{base quadrada } 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}\ \text{cm}} \qquad (4\sqrt{3} \approx 6{,}93\ \text{cm}).$$



base quadrada de lado a

A 5ª questão — o pedido de anulação

A resolução acima mostra que a 5ª questão **tem** solução com o enunciado tal como foi impresso. O problema não é a ausência de resposta: é a *natureza* dela.

O que o enunciado impresso produz. Com $x_2+x_4+x_6+x_8=5540$, a variável $u=q+\frac{1}{q}$ satisfaz $128u^3-256u-1385=0$. Pelo teste das raízes racionais — candidatas $\pm\frac{p}{r}$ com $p\mid 1385=5\cdot 277$ e $r\mid 128$ — nenhuma anula o polinômio. A cúbica é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, e suas raízes geram uma extensão de grau 3. A resposta só sai por Cardano, e sai irracional:

$$x_1+x_3+x_5+x_7+x_9=512\left(v^2+v-1\right)\approx 11\,196{,}4994, \qquad v=u^2-2.$$

O que um único algarismo muda. Trocando 5540 por 5440, a mesma substituição leva a $8u^3-16u-85=0$, que fatora como $(2u-5)\left(4u^2+10u+17\right)$ — o segundo fator tem discriminante $100-272<0$. Logo $u=\frac{5}{2}$, $q=2$, $d=1$, e a progressão é 32, 64, 128, …, 8192, com

$$x_1+x_3+x_5+x_7+x_9=512\cdot\frac{341}{16}=10\,912.$$

O argumento. Uma resposta irracional de grau 3, obtida por Cardano, é incompatível com o padrão de uma questão de progressões e logaritmos valendo 1,0 ponto numa prova de dez questões. Todo o restante do enunciado — o produto que fecha em 2^{45}, a razão positiva, os nove termos — está calibrado para a progressão de razão 2. A troca de um algarismo converte um exercício de PA e PG numa cúbica irredutível.

O candidato que leu o enunciado impresso e foi até o fim chegou a $\approx 11\,196{,}50$; o que reconheceu a intenção chegou a 10 912. **As duas leituras são legítimas**, e é exatamente isso que sustenta o pedido: não há gabarito único defensável.

Efeito na nota

Com a 5ª anulada, restam nove questões efetivas valendo 1,0 cada. As duas práticas usuais:

critério	nota	observação
ponto atribuído a todos	$N=\sum_{i\neq 5} n_i+1{,}0$	preserva a escala de 0 a 10
redistribuição proporcional	$N=\frac{10}{9}\sum_{i\neq 5} n_i$	premia quem foi bem nas demais

O primeiro critério é o mais comum em bancas militares e o mais favorável a quem deixou a questão em branco; o segundo é o mais favorável a quem resolveu bem as outras nove. A diferença entre eles chega a 1,0 ponto para um candidato de nota alta, o que no IME costuma valer dezenas de posições na classificação.

Mapa por frente

#	frente dominante	ferramenta decisiva
1	Geometria plana	inclusão–exclusão + dodecágono de mesma apótema
2	Números complexos	raiz estranha em $z^6=1$; desigualdade não estrita
3	Funções / Séries	soma geométrica truncada; $3^5<500<3^6$
4	Polinômios	rebaixamento por $x^2=7x+3$ + Girard
5	Progressões / Logaritmos	$u=q+\frac{1}{q}$; cúbica reduzida
6	Probabilidade	comprimento do ciclo que contém o 1 é uniforme
7	Matrizes / Combinatória	Vandermonde + Stifel; Legendre em $p=1013$
8	Trigonometria	prostaférese e soma telescópica de tangentes
9	Geometria analítica	normal à elipse e lugar geométrico do ponto médio
10	Geometria espacial	quadrado maximiza entre inscritos; MA–MG

Quatro das dez questões (1, 2, 7 e 10) exigem combinar duas frentes distintas num único encadeamento — a marca da prova discursiva do IME. Nenhuma delas é resolvida por fórmula direta.