Matemática — 2ª fase 2027

Questões resolvidas

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

Enunciados

Convenções da prova: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais; $m(AB)$ denota o comprimento do segmento AB.

Questão 01

Descreva todas as progressões aritméticas de 10 números naturais cuja soma resulte em 435.

Questão 02

Determine todos os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $|\log_2(2^x + 2)| > |2x|$.

Questão 03

Seja r um número real positivo. No plano complexo, considere o polígono cujos vértices são as oito raízes da equação $r + iz^8 = 0$. Sabendo que a área desse polígono é $\sqrt{2}$, determine o comprimento de seus lados e o valor de r.

Questão 04

Considere o polinômio $p(x) = x^7 + 3ax^6 - x^5 - 5ax^4 + 7x^3 - 7ax^2 + 9x + a$, em que a é um número real. Sabendo que $p(x)$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^3 - 3x - 2$, determine todas as raízes de $p(x)$.

Questão 05

Seja ABC um triângulo no plano cartesiano com vértices na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 6$. Sabendo que os vértices A e B têm abscissa 1 e que o perímetro de ABC é 10, determine a abscissa do vértice C.

Questão 06

Determine quantas sêxtuplas ordenadas de números naturais $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 52, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 7x_6 = 76. \end{cases}$$

Questão 07

Determine todos os valores inteiros n tais que o quociente

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 52n + 90}{n^2 - 2n - 27}$$

seja um número inteiro.

Questão 08

Considere um retângulo $ABCD$ cujos lados medem $m(AB) = 10$ e $m(BC) = 6$. Um retângulo $EFGH$ é inscrito em $ABCD$, com E pertencente ao lado AB e distinto de A e B, e F pertencente ao lado BC e distinto de B e C.

a) Se x representa a distância do ponto A ao ponto E, determine os possíveis valores de x.

b) Se a área de $EFGH$ é 30, determine as medidas de seus lados.

Questão 09

Considere uma pirâmide reta cuja base é um hexágono regular de lado 4. As faces laterais dessa pirâmide são triângulos isósceles cujo ângulo do vértice superior é $\frac{\pi}{6}$. Traça-se uma seção plana na pirâmide de modo que essa seção passa pela diagonal maior da base e é paralela a uma das faces laterais. Calcule a área dessa seção.

Questão 10

Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(2x)} + \sqrt{1 - \cos(2x)} - \operatorname{sen}(x) - \cos(x).$$

Determine todos os números inteiros k tais que a equação $f(x) = k$ possua pelo menos uma solução real x pertencente ao primeiro ou ao terceiro quadrante do círculo trigonométrico.

Resoluções

Questão 01

Sejam a o primeiro termo e r a razão. Então

$$S = 10a + \frac{10 \cdot 9}{2}\, r = 10a + 45r = 435 \iff 2a + 9r = 87.$$

Como $2a$ é par e 87 é ímpar, r é ímpar. Todos os termos são naturais; basta impor isso ao primeiro e ao último termo:

$$a = \frac{87 - 9r}{2} \geq 1 \quad \text{e} \quad a + 9r = \frac{87 + 9r}{2} \geq 1 \iff -9 \leq r \leq 9.$$

Logo $r \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9\}$, com $a = \frac{87-9r}{2}$. As progressões crescentes são:

r	a	progressão
1	39	$39, 40, 41, \ldots, 48$
3	30	$30, 33, 36, \ldots, 57$
5	21	$21, 26, 31, \ldots, 66$
7	12	$12, 19, 26, \ldots, 75$
9	3	$3, 12, 21, \ldots, 84$

As progressões com $r = -1, -3, -5, -7, -9$ são essas mesmas sequências em ordem inversa. Não há progressão constante, pois $r = 0$ é par.

Resposta

As 10 progressões: as cinco crescentes acima e as cinco decrescentes correspondentes.

Questão 02

Como $2^x + 2 > 2$, tem-se $\log_2(2^x + 2) > 1 > 0$, e o primeiro módulo pode ser removido. Seja $t = 2^x$, com $t > 0$; então $2x = \log_2 t^2$ e a inequação equivale a

$$|2x| < \log_2(t + 2) \iff -\log_2(t + 2) < \log_2 t^2 < \log_2(t + 2).$$

Sendo a base maior que 1, e como $-\log_2(t + 2) = \log_2 \frac{1}{t+2}$, isso equivale a

$$t^2 < t + 2 \qquad \text{e} \qquad t^2 > \frac{1}{t + 2}.$$

Primeira desigualdade.

$$t^2 - t - 2 < 0 \iff (t - 2)(t + 1) < 0 \iff -1 < t < 2,$$

donde $0 < t < 2$, isto é, $x < 1$.

Segunda desigualdade. Como $t + 2 > 0$,

$$t^2(t + 2) > 1 \iff t^3 + 2t^2 - 1 > 0 \iff (t + 1)(t^2 + t - 1) > 0.$$

Para $t > 0$, o fator $t + 1$ é positivo, e a condição se reduz a $t^2 + t - 1 > 0$:

$$t > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \iff x > \log_2 \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

A Figura 1 mostra os dois membros: $\log_2(2^x + 2)$ fica acima de $|2x|$ entre os dois pontos de encontro.

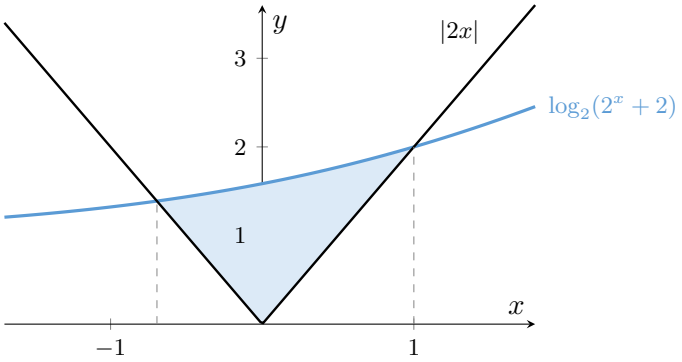


Figura 1 — Os dois membros da inequação.

Resposta

$$\log_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$$

Questão 03

Da equação,

$$z^8 = -\frac{r}{i} = r\,i = r\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

Pela fórmula de De Moivre, as raízes são

$$z_k = \sqrt[8]{r}\,\big(\cos\theta_k + i\,\operatorname{sen}\theta_k\big), \qquad \theta_k = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, \ldots, 7.$$

Todas têm módulo $\rho = \sqrt[8]{r}$, com argumentos em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{4}$. Logo, são os vértices de um octógono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio ρ.

Os raios que ligam a origem aos vértices decompõem o octógono em oito triângulos isósceles congruentes, de lados iguais a ρ e ângulo central $\frac{\pi}{4}$:

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2}\,\rho^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\,\rho^2.$$

Como a área é $\sqrt{2}$,

$$2\sqrt{2}\,\rho^2 = \sqrt{2} \implies \rho^2 = \frac{1}{2} \implies r = \rho^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Assim, $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e as raízes são as de $z^8 = \frac{i}{16}$ (Figura 2).

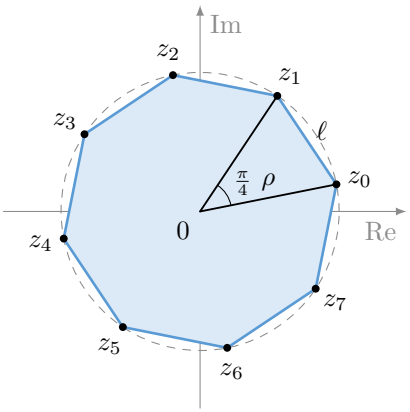


Figura 2 — As oito raízes de $z^8 = \frac{i}{16}$.

O lado é a base de cada um desses triângulos. Pela lei dos cossenos,

$$\ell^2 = \rho^2 + \rho^2 - 2\rho^2 \cos\frac{\pi}{4} = 2\rho^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \qquad \ell = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}.$$

Resposta

$$r = \frac{1}{16} \qquad \text{e} \qquad \ell = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

Questão 04

Fatorando o divisor e reduzindo potências módulo $q(x)$:

$$q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2, \qquad x^3 \equiv 3x + 2 \pmod{q(x)}.$$

Multiplicando sucessivamente por x e substituindo cada x^3 por $3x+2$,

$$\begin{aligned} x^4 &\equiv 3x^2 + 2x, \\ x^5 &\equiv 3x^3 + 2x^2 \equiv 2x^2 + 9x + 6, \\ x^6 &\equiv 2x^3 + 9x^2 + 6x \equiv 9x^2 + 12x + 4, \\ x^7 &\equiv 9x^3 + 12x^2 + 4x \equiv 12x^2 + 31x + 18. \end{aligned}$$

Substituindo em $p(x)$ e agrupando os coeficientes,

$$p(x) \equiv (5a+10)\,x^2 + (26a+52)\,x + (13a+26) = (a+2)\,(5x^2 + 26x + 13) \pmod{q(x)}.$$

O resto é nulo se, e somente se, $a = -2$. Nesse caso,

$$p(x) = (x-2)(x+1)^2\,(x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + 1).$$

O quociente é recíproco e $x = 0$ não é raiz. Dividindo-o por x^2 e fazendo $t = x + \frac{1}{x}$,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \iff t^2 - 6t = 0.$$

Para $t = 0$: $x^2 + 1 = 0$, isto é, $x = \pm i$. Para $t = 6$: $x^2 - 6x + 1 = 0$, isto é, $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Resposta

$$2, \quad -1 \text{ (raiz dupla)}, \quad \pm i, \quad 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Questão 05

Para $x = 1$, a equação da elipse dá $y^2 = 4$. Logo,

$$A = (1,\,2), \qquad B = (1,\,-2), \qquad m(AB) = 4, \qquad m(AC) + m(BC) = 6.$$

O vértice C pertence, então, à elipse de focos A e B e eixo maior 6: centro $(1, 0)$, semieixo maior 3 (vertical), semidistância focal 2 e semieixo menor $\sqrt{5}$:

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Substituindo $y^2 = 6 - 2x^2$,

$$9(x-1)^2 + 5(6 - 2x^2) = 45 \iff x^2 + 18x + 6 = 0 \iff x = -9 \pm 5\sqrt{3}.$$

Os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 6$ satisfazem $|x| \le \sqrt{3}$. A raiz $-9 - 5\sqrt{3}$ não satisfaz essa condição; a raiz $5\sqrt{3} - 9$ satisfaz, pois $-\sqrt{3} \le 5\sqrt{3} - 9 < 0$, o que equivale a $9 \le 6\sqrt{3}$. Para esse valor, $y^2 = 6 - 2x^2 > 0$, com duas posições de C simétricas em relação ao eixo x (Figura 3).

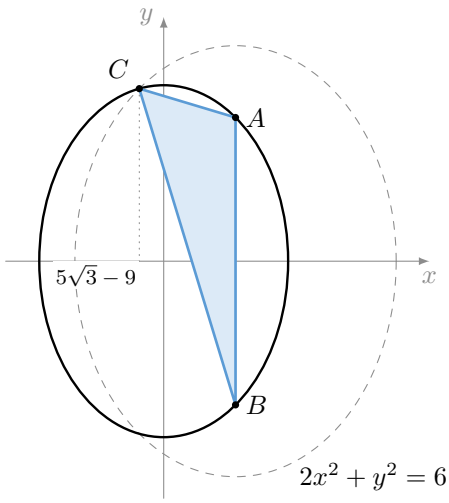


Figura 3 — A elipse $2x^2 + y^2 = 6$ (traço contínuo) e o lugar de C (tracejado).

Resposta

$$x_C = 5\sqrt{3} - 9$$

Questão 06

As incógnitas x_3, x_4 e x_5 têm o mesmo coeficiente em cada equação. Com $S = x_3 + x_4 + x_5$, o sistema se reduz a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S + 3x_6 = 30, \\ x_1 + 2x_2 + 2S + 4x_6 = 52, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3S + 7x_6 = 76. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, e o dobro da primeira da terceira,

$$x_2 + S + x_6 = 22 \qquad \text{e} \qquad S + x_6 = 16.$$

Logo $x_2 = 6$ e $S = 16 - x_6$. Substituindo na primeira equação,

$$x_1 + 6 + (16 - x_6) + 3x_6 = 30 \implies x_1 = 8 - 2x_6.$$

Como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, as condições $x_6 \geq 1$ e $x_1 = 8 - 2x_6 \geq 1$ dão $x_6 \in \{1, 2, 3\}$. Para cada valor de x_6, x_1 e x_2 ficam determinados, e S vale 15, 14 ou 13, respectivamente.

O número de soluções de $x_3 + x_4 + x_5 = S$ em inteiros positivos é o número de maneiras de escolher 2 dos $S-1$ espaços entre S unidades alinhadas para separá-las em três blocos não vazios, isto é, $\binom{S-1}{2}$. Portanto, o total é

$$\binom{14}{2} + \binom{13}{2} + \binom{12}{2} = 91 + 78 + 66 = 235.$$

Resposta

235 sêxtuplas

Questão 07

Dividindo o numerador pelo denominador, obtém-se quociente $2n - 1$ e resto 63:

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 52n + 90}{n^2 - 2n - 27} = 2n - 1 + \frac{63}{n^2 - 2n - 27}.$$

Como $2n-1$ é inteiro, a condição é que $d = n^2 - 2n - 27$ divida 63. Completando o quadrado,

$$(n-1)^2 = 28 + d, \qquad d \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 21, \pm 63\}.$$

Os valores de $28 + d$ são 29, 27, 31, 25, 35, 21, 37, 19, 49, 7, 91 e -35; os únicos quadrados perfeitos são 25 ($d = -3$) e 49 ($d = 21$):

$$(n-1)^2 = 25 \;\Rightarrow\; n \in \{-4,\, 6\}; \qquad (n-1)^2 = 49 \;\Rightarrow\; n \in \{-6,\, 8\}.$$

Resposta

$$n \in \{-6,\, -4,\, 6,\, 8\}$$

Questão 08

Seja $y = m(BF)$, com $0 < x < 10$ e $0 < y < 6$. Os triângulos retângulos EBF e GDH têm hipotenusas iguais ($EF = GH$) e ângulos agudos iguais (lados paralelos), logo são congruentes; do mesmo modo, AEH e CGF são congruentes. Assim, $m(CG) = x$ e $m(DH) = y$ (Figura 4).

Como $\angle HEF = 90°$, os ângulos $\angle AEH$ e $\angle BEF$ são complementares, e os triângulos retângulos AEH e BFE são semelhantes:

$$\frac{AE}{AH} = \frac{BF}{BE} \iff \frac{x}{6-y} = \frac{y}{10-x} \iff x(10-x) = y(6-y).$$

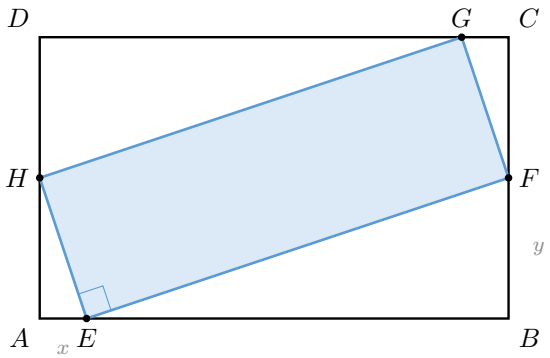


Figura 4 — O caso $x = 1$, $y = 3$.

Item a). Para cada x, y é raiz real de

$$y^2 - 6y + x(10-x) = 0, \qquad \Delta = 36 - 4x(10-x) \geq 0 \iff (x-1)(x-9) \geq 0.$$

As duas raízes têm soma 6 e produto $x(10-x) > 0$, logo ambas estão em $(0, 6)$. Com $0 < x < 10$, obtém-se $0 < x \leq 1$ ou $9 \leq x < 10$.

Item b). A área de $EFGH$ é a de $ABCD$ menos as dos quatro triângulos dos cantos:

$$60 - x(6-y) - y(10-x) = 30 \iff (x-5)(y-3) = 0.$$

Como $x = 5$ não pertence ao intervalo do item a), $y = 3$. Então $x(10-x) = 9$, ou seja, $x = 1$ ou $x = 9$. Para $x = 1$ e $y = 3$,

$$EH = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \qquad EF = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}.$$

O caso $x = 9$ é simétrico e dá as mesmas medidas.

Resposta

a) $0 < x \leq 1$ ou $9 \leq x < 10$ b) $\sqrt{10}$ e $3\sqrt{10}$

Questão 09

Sejam $ABCDEF$ a base, O seu centro, V o vértice e AD a diagonal maior. Os lados BC e EF são paralelos a AD. Tome a seção paralela à face VBC; ela corta as arestas VE e VF nos pontos M e N (Figura 5).

Sejam Q e P os pontos médios de BC e EF. O plano VQP é perpendicular a AD e contém O, ponto médio de QP. Nesse plano, a seção é a reta por O paralela a VQ, que corta VP em seu ponto médio K (base média do triângulo VQP). Como $MN \parallel EF$ passa por K, os pontos M e N são os pontos médios de VE e VF, e $MN = \frac{EF}{2} = 2$.

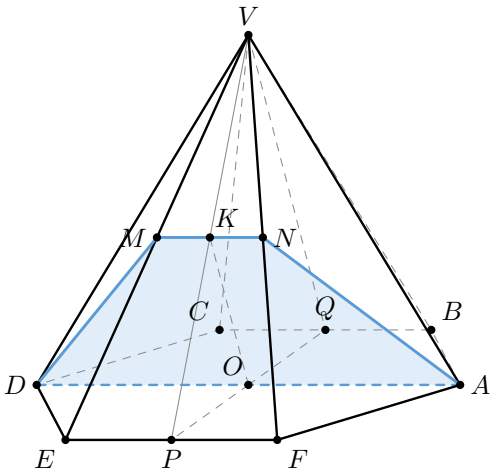


Figura 5 — A seção $ADNM$; arestas ocultas tracejadas.

A seção é o trapézio $ADNM$, de bases $AD = 8$ e $MN = 2$. Sua altura é OK, perpendicular a AD; pela base média, $OK = \frac{VQ}{2} = \frac{g}{2}$, em que g é o apótema da pirâmide. Na face lateral, de base 4 e ângulo do vértice $\frac{\pi}{6}$, a altura relativa à base divide esse ângulo ao meio:

$$g = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 2\,(2+\sqrt{3}).$$

Logo,

$$S = \frac{AD + MN}{2} \cdot OK = \frac{8+2}{2} \cdot \frac{g}{2} = 5\,(2+\sqrt{3}) = 10 + 5\sqrt{3}.$$

Resposta

$$10 + 5\sqrt{3}$$

Questão 10

Como $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ e $1 - \cos 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$,

$$f(x) = \sqrt{2}\,|\cos x| + \sqrt{2}\,|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x - \cos x.$$

Primeiro quadrante. Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, seno e cosseno são positivos e $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$:

$$f(x) = (\sqrt{2}-1)(\operatorname{sen} x + \cos x) = (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\sqrt{2}-1,\ 2-\sqrt{2}\right].$$

Esse intervalo está contido em $(0, 1)$ e não contém inteiros.

Terceiro quadrante. Para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seno e cosseno são negativos e $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$:

$$f(x) = -(\sqrt{2}+1)(\operatorname{sen} x + \cos x) = -(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\sqrt{2}+1,\ 2+\sqrt{2}\right].$$

Como $2 < \sqrt{2}+1 < 3 < 2+\sqrt{2} < 4$, o único inteiro do intervalo é 3, e ele é atingido:

$$f(x) = 3 \iff \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3(2-\sqrt{2})}{2} \in \left[-1,\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

pois $\sqrt{2} < 3(2-\sqrt{2}) \leq 2$. Incluir os eixos não altera a resposta, já que os extremos $\sqrt{2} \pm 1$ não são inteiros. A Figura 6 mostra o gráfico de f em $[0, 2\pi]$ com os dois quadrantes destacados.

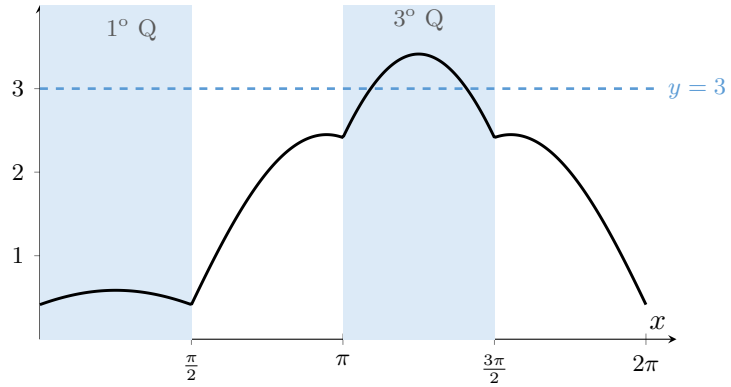


Figura 6 — Gráfico de f; faixas: primeiro e terceiro quadrantes.

Resposta

$$k = 3$$