# Homotetia e o tetraedro órtico

Lista de exercícios · Geometria Espacial

**O que usar.** Homotetia de centro $O$ e razão $k$: $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$. Ela leva reta em reta paralela e plano em plano paralelo, multiplica comprimentos por $|k|$, áreas por $k^2$ e volumes por $|k|^3$. Num tetraedro regular de centro $O$, a homotetia de razão $-\frac{1}{3}$ leva cada vértice no baricentro da face oposta — isto é, no pé da altura correspondente.

## Exercícios

**1.** Num tetraedro regular de aresta $a$, determine a aresta, a área total e o volume do tetraedro órtico.

**2.** Prove que a esfera inscrita num tetraedro regular é a esfera circunscrita ao seu tetraedro órtico.

**3.** Prove que, num tetraedro regular, o circunraio é o triplo do inraio, e que o centro divide cada altura na razão $3:1$ a partir do vértice.

**4.** (ITA) Quatro esferas de mesmo raio $R>0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de $R$, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

**5.** Num cubo de aresta $a$, os centros das seis faces são os vértices de um octaedro regular. Calcule a sua aresta e a razão entre o volume do octaedro e o do cubo.

**6.** Num octaedro regular de aresta $a$, os centros das oito faces são os vértices de um cubo. Calcule a sua aresta e a razão entre o volume do cubo e o do octaedro.

**7.** Três esferas de raio $R$, tangentes duas a duas, estão apoiadas num plano $\alpha$. Determine o raio da esfera tangente ao plano $\alpha$ e às três esferas, situada entre elas.

**8.** Uma pirâmide de volume $V$ é cortada por um plano paralelo à base, a um terço da altura contada a partir do vértice. Calcule os volumes das duas partes.

**9.** Num tetraedro *qualquer* $ABCD$, os baricentros das quatro faces são vértices de um novo tetraedro. Prove que ele é homótetico de $ABCD$ e determine a razão entre os volumes.

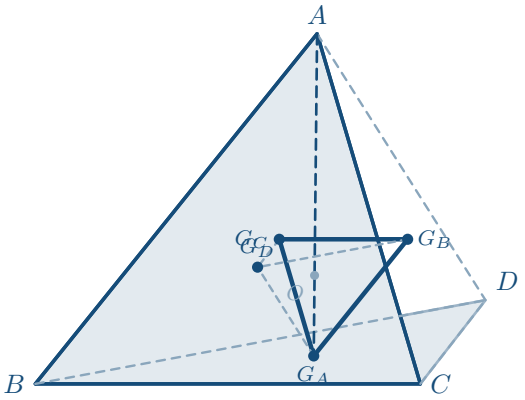
**10.** Partindo de um tetraedro regular de aresta $a$, forma-se o seu órtico, depois o órtico deste, e assim por diante. Determine a aresta do terceiro tetraedro da sequência e a soma dos volumes de todos eles.

**11.** Num cubo de aresta $a$ inscreve-se uma esfera, e nessa esfera inscreve-se um novo cubo. Determine a razão entre as arestas do primeiro e do segundo cubo e entre os seus volumes.

**12.** Num cone de revolução de semiângulo $\alpha$ inscrevem-se esferas, cada uma tangente à superfície lateral e à anterior. Mostre que os raios formam uma progressão geométrica e determine a sua razão.

**1.** A homotetia de centro $O$ e razão $-\frac{1}{3}$ leva o tetraedro no seu órtico. Logo

$$a' = \frac{a}{3}, \qquad A'_t = \frac{1}{9}\,a^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}, \qquad V' = \frac{1}{27}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{324}.$$




$G_AG_BG_CG_D$ é homótetico de $ABCD$: centro $O$, razão $-\frac{1}{3}$

**2.** A esfera inscrita toca cada face num ponto que dista o inraio $r$ do centro $O$; por simetria esse ponto é o centro da face, isto é, o seu baricentro — e os baricentros das faces são justamente os vértices do órtico. Todos eles distam $r$ de $O$, logo estão numa mesma esfera de centro $O$: a inscrita é a circunscrita ao órtico.

Em números: $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ e o circunraio de um tetraedro regular de aresta $\dfrac{a}{3}$ vale $\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. ■

**3.** A homotetia de centro $O$ e razão $-\frac{1}{3}$ leva cada vértice no pé da altura oposta, ou seja, leva a esfera circunscrita na esfera inscrita. Pela propriedade das homotetias, os raios ficam na razão $\left|-\frac{1}{3}\right|$:

$$r = \frac{R}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad R = 3r.$$

Como $O$ está sobre a altura $AG_A$, com $\overline{OA} = R$ e $\overline{OG_A} = r = R/3$,

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OG_A}} = 3.\blacksquare$$

**4.** Duas esferas tangentes externamente têm centros à distância igual à soma dos raios; daí o tetraedro $T_0$ dos centros ter aresta $a_0 = 2R$, com apótema

$$r_0 = \frac{a_0\sqrt{6}}{12} = \frac{R\sqrt{6}}{6}.$$

Cada face do tetraedro circunscrito $T$ é tangente às três esferas cujos centros estão na face correspondente de $T_0$: é o plano paralelo a essa face, afastado de $R$ para fora. As faces de $T$ e de $T_0$ são, portanto, paralelas duas a duas, e os dois tetraedros são homóteticos de centro comum. A razão lê-se nos apótemas:

$$k = \frac{r_0 + R}{r_0} = 1 + \frac{6}{\sqrt{6}} = 1 + \sqrt{6}, \qquad a = k\,a_0 = 2R\left(1 + \sqrt{6}\right).$$

Com $\left(1+\sqrt{6}\right)^3 = 19+9\sqrt{6}$,

$$V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{8R^3\left(19+9\sqrt{6}\right)}{6\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(19+9\sqrt{6}\right)R^3 \approx 38{,}70\,R^3.}$$

**5.** Dois centros de faces adjacentes são pontos médios de duas arestas opostas de um mesmo triângulo retângulo isósceles de catetos $\frac{a}{2}$; a distância entre eles vale

$$\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

O volume do octaedro regular de aresta $\ell$ é $\dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{3}$:

$$V_{\text{octa}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^3 2\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{V_{\text{octa}}}{a^3} = \frac{1}{6}.$$

**6.** Ponha os vértices do octaedro em $(\pm s,0,0)$, $(0,\pm s,0)$, $(0,0,\pm s)$, de modo que a aresta seja $a = s\sqrt{2}$. O baricentro de uma face é $\left(\pm\frac{s}{3},\pm\frac{s}{3},\pm\frac{s}{3}\right)$: os oito baricentros são os vértices de um cubo de aresta

$$\ell = \frac{2s}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Então $V_{\text{cubo}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,a^3}{27}$ e $V_{\text{octa}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$, donde

$$\frac{V_{\text{cubo}}}{V_{\text{octa}}} = \frac{2}{9}.$$

**7.** Os três centros estão à altura $R$ e formam um triângulo equilátero de lado $2R$, cujo circunraio vale $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. A esfera procurada, de raio $r$, tem centro no eixo de simetria, à altura $r$, e é tangente a cada uma das três:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2.$$

Expandindo, $\dfrac{4R^2}{3} = 4Rr$, isto é,

$$\boxed{r = \frac{R}{3}.}$$

**8.** O plano determina uma pirâmide homótetica da original, de centro no vértice e razão $\frac{1}{3}$; os volumes estão na razão $\left(\frac{1}{3}\right)^3$:

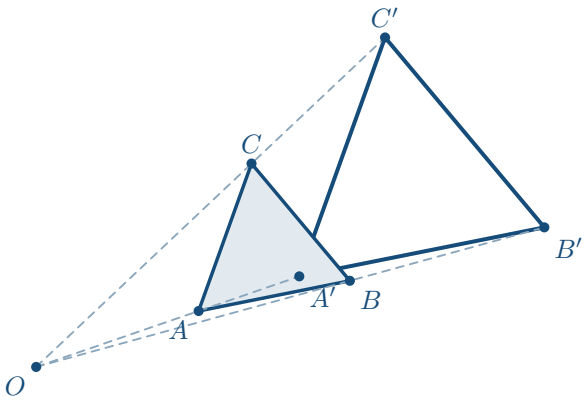
$$V_{\text{menor}} = \frac{V}{27}, \qquad V_{\text{tronco}} = V - \frac{V}{27} = \frac{26V}{27}.$$

**9.** Tome o baricentro $G$ de $ABCD$ como origem, de modo que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. O baricentro da face $BCD$ satisfaz

$$\overrightarrow{GG_A}=\frac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}{3}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GA},$$

e o mesmo para os outros três. Logo o tetraedro dos baricentros é o homótetico de $ABCD$ de centro $G$ e razão $-\frac{1}{3}$ — o que vale para um tetraedro **qualquer**, não só para o regular. Portanto

$$\frac{V'}{V}=\left|-\frac{1}{3}\right|^3=\frac{1}{27}.\blacksquare$$




$$\overrightarrow{OA'}=k\,\overrightarrow{OA},\ \ \overrightarrow{OB'}=k\,\overrightarrow{OB},\ \ \overrightarrow{OC'}=k\,\overrightarrow{OC}$$

**10.** Cada passo é uma homotetia de razão $-\frac{1}{3}$, logo as arestas formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e os volumes, de razão $\frac{1}{27}$:

$$a_3=\frac{a}{9},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{V}{27^n}=V\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{27}}=\frac{27V}{26}=\frac{27}{26}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{9\,a^3\sqrt{2}}{104}.$$

**11.** A esfera inscrita no cubo tem raio $\frac{a}{2}$. O cubo nela inscrito tem diagonal igual ao diâmetro, $a$, logo aresta $\ell\sqrt{3}=a$, isto é, $\ell=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$:

$$\frac{a}{\ell}=\sqrt{3},\qquad \frac{a^3}{\ell^3}=3\sqrt{3}.$$

**12.** Seja $V$ o vértice do cone e $d$ a distância de $V$ ao centro de uma das esferas, medida no eixo. A esfera inscrita tangencia a superfície lateral, e no triângulo retângulo formado pelo eixo, pelo raio até o ponto de tangência e pela geratriz,

$$r=d\,\operatorname{sen}\alpha.$$

Para a esfera seguinte, de centro à distância $d'$ e raio $r'=d'\operatorname{sen}\alpha$, a tangência entre as duas dá $d'=d+r+r'$, isto é,

$$d'\,(1-\operatorname{sen}\alpha)=d\,(1+\operatorname{sen}\alpha)\,.$$

Como os raios são proporcionais às distâncias — as esferas são homóteticas de centro $V$ —, a sequência é uma progressão geométrica de razão

$$\boxed{q=\frac{r}{r'}=\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}}$$

no sentido do vértice (e o inverso no sentido da base).