TRIGONOMETRIA

Lista de 50 problemas

IME · ITA · Olimpíadas

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

Problemas do livro *Trigonometria — História, Teoria e Programação* (ISBN 978-65-02-48175-2)

---

1. (AMC 12 2000) Uma circunferência de centro O e raio 1 passa pelo ponto A. O segmento AB é tangente à circunferência em A e $A\hat{O}B = \theta$, com θ agudo. O ponto C está no segmento OA, e BC é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}O$. Então OC é igual a

(A) $\sec^2\theta - \operatorname{tg}\theta$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$
(D) $\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$
(E) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

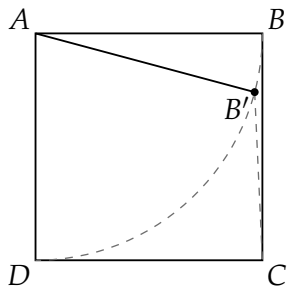
2. (IME 2019) Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $EC = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento ED.

3. (AMC 10A 2015) O triângulo isósceles ABC é retângulo em C e tem área 12,5. As semirretas que trisseccionam o ângulo $A\hat{C}B$ encontram AB em D e E. Qual é a área do triângulo CDE?

(A) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{50\sqrt{3}-75}{4}$ (C) $\frac{15\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{50-25\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{25}{6}$

4. (AIME 2006 II) O quadrado $ABCD$ tem lado 1. Os pontos E e F estão em BC e CD, respectivamente, de modo que o triângulo AEF é equilátero. Um quadrado de vértice B, com lados paralelos aos de $ABCD$, tem um vértice sobre AE. O lado desse quadrado menor é $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$, em que a, b e c são inteiros positivos e b não é divisível pelo quadrado de nenhum primo. Determine $a+b+c$.

5. (IME 2008) Em um quadrado $ABCD$, o segmento AB', com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo de centro A, conforme indicado na figura. Determine o ângulo $B\hat{A}B'$ correspondente à posição em que a razão entre o comprimento do segmento $B'C$ e o lado do quadrado vale $\sqrt{3-\sqrt{6}}$.



6. (AIME 1999) Dois quadrados de lado 1 têm o mesmo centro O. A interseção deles é o octógono $ABCDEFGH$, e $AB = \frac{43}{99}$. A área do octógono é $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos primos entre si. Determine $m+n$.

7. (IME 2025) Dado $P(x) = \operatorname{cossec}^2(\alpha)\, x^2 - \operatorname{cotg}(\alpha)\, x + \cos(\alpha)$, para que valores de α, no intervalo $]0, \pi[$, as raízes de $P(x)$ são reais?

8. (IME 2023) Seja $S = (1 + \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)(1 + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cossec}\alpha)$. Mostre que o valor de S é um número inteiro para todo valor do ângulo α diferente de $\frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, e calcule esse valor.

9. (AIME 1991) Sabendo que $\sec x + \operatorname{tg} x = \dfrac{22}{7}$ e que $\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x = \dfrac{m}{n}$, com $\dfrac{m}{n}$ irredutível, calcule $m + n$.

10. (IME 2022) Sabendo-se que $\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a + b \neq 0$, determine $\dfrac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$ em função de a e b somente.

11. (IME 1999) Determine θ sabendo-se que:

$$\text{(i)}\ \frac{1-\cos^4\theta}{1-\operatorname{sen}^4\theta}\cdot\frac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2}{3}; \qquad \text{(ii)}\ 0 < \theta \leq 2\pi \text{ radianos.}$$

12. (AIME 2019 I) Seja x um número real tal que $\operatorname{sen}^{10} x + \cos^{10} x = \frac{11}{36}$. Então $\operatorname{sen}^{12} x + \cos^{12} x = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos primos entre si. Calcule $m + n$.

13. (IME 2004) Calcule $\operatorname{sen}(x + y)$ em função de a e b, sabendo que o produto $ab \neq 0$, que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$ e que $\cos x + \cos y = b$.

14. (IME 1987/88) Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Demonstre que

$$2\cos A\cos B\cos C = \frac{\operatorname{sen} 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

15. (AIME 2012 II) Sejam x e y reais tais que $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 3$ e $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{2}$. O valor de $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2y} + \frac{\cos 2x}{\cos 2y}$ pode ser escrito como $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos primos entre si. Calcule $p + q$.

16. (IME 1997) Se $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} b$ são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão

$$y = \operatorname{sen}^2(a+b) + p\operatorname{sen}(a+b)\cos(a+b) + q\cos^2(a+b).$$

Considere $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 1$.

17. (IMO 1963) Prove que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

18. (IME 2017) Se $\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = -1$, calcule o valor de

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} 3y}{\operatorname{sen} x}.$$

19. (ITA 2002) Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $\operatorname{sen} x = \dfrac{\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

20. (IME 2001) Calcule o valor exato de $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arccotg}\dfrac{4}{3}\right) + \cos\left(2\operatorname{arccossec}\dfrac{5}{4}\right)$.

21. (IME 1979) Determine os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \operatorname{arcsen}(\cos x)$.

22. (AIME 1984) Determine o valor de

$$10\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}3+\operatorname{arccotg}7+\operatorname{arccotg}13+\operatorname{arccotg}21).$$

23. (IME 2009) Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{2}\,x,$$

para $x\in[0,a]$.

24. (AMC 12B 2021) Quantos valores de θ no intervalo $0<\theta\leq 2\pi$ satisfazem $1-3\operatorname{sen}\theta+5\cos 3\theta=0$?

25. (PUTNAM 1986) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccotg}(n^2+n+1)$, em que, para $t\geq 0$, $\operatorname{arccotg}t$ é o ângulo θ com $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{cotg}\theta=t$.

26. (IME 1998) Determine a solução da equação trigonométrica $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x=1$, $x\in\mathbb{R}$.

27. (IME 2016) Determine o conjunto solução da equação

$$\operatorname{sen}x\left(1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=4-\operatorname{cotg}x.$$

28. (ITA 2005) Obtenha todos os pares (x,y), com $x,y\in[0,2\pi]$, tais que $\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}x+\cos y=1$.

29. (IME 2007) Resolva a equação $\log_{\operatorname{sen}x+\cos x}(1+\operatorname{sen}2x)=2$, com $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

30. (IMO 1962) Resolva a equação $\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

31. (IME 2008) Determine o conjunto solução da equação $\operatorname{sen}^3x+\cos^3x=1-\operatorname{sen}^2x\cos^2x$.

32. (ITA 2026) Sejam $x,y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases}\operatorname{tg}y\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\cos 2x\ \sec y\\ \dfrac{\operatorname{sen}y}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}y}=2\end{cases}$$

O produto de todos os valores de x e y que resolvem esse sistema é

(A) $\frac{\pi^2}{24}$ (B) $\frac{\pi^4}{324}$ (C) $\frac{\pi^2}{50}$ (D) $\frac{\pi^2}{16}$ (E) $\frac{\pi^2}{18}$

33. (IME 2019) Determine todas as soluções da equação

$$4\operatorname{sen}^2(7x)\cos(2x)+2\operatorname{sen}(9x)+8\operatorname{sen}^2x+5\cos(2x)+2\operatorname{sen}(5x)=4$$

no intervalo $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

34. (AMC 12A 2019) O triângulo ABC tem lados inteiros e $\cos A=\frac{11}{16}$, $\cos B=\frac{7}{8}$, $\cos C=-\frac{1}{4}$. Qual o menor perímetro possível?

35. (IME 2006) Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação $(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x)=1$. Determine os ângulos, em radianos.

36. (IME 2021) Seja ABC um triângulo tal que $2\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}C=0$. Prove que $\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ é um número inteiro e determine-o.

37. (IME 2022) Seja ABC um triângulo acutângulo em que h_B e h_C são as alturas dos vértices B e C, respectivamente, e $BC = a$. Sabendo que $\dfrac{h_B h_C}{a^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $\cos A + \cos B \cos C = \dfrac{p}{q\sqrt{m}}$, calcule $p + q + m$, onde p, q, m são naturais, p e q primos entre si e m o menor possível.

38. (IMO 1966) No triângulo ABC, $a + b = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\,(a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B)$. Prove que o triângulo é isósceles.

39. (IME 2012) Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105°$, α e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$, determine: (a) as raízes da equação $3\sec x + m(\sqrt{3}\cos x - 3\operatorname{sen} x) = 3\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x$, em função de m; (b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

40. (USAMO 1996) O triângulo ABC tem um ponto interior P tal que $\widehat{PAB} = 10°$, $\widehat{PBA} = 20°$, $\widehat{PCA} = 30°$ e $\widehat{PAC} = 40°$. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

41. (IME 1990) Determine o valor de $p = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{24} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{24} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{24}$.

42. (IME 2020) Seja $\dfrac{1}{b} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{14}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{14}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{14}$. Determine b, sabendo que b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

43. (ITA 2018) Seja $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

(a) Use a propriedade $z^k = \cos\frac{k\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$ e $\cos\frac{5\pi}{7}$ em função de z.

(b) Determine inteiros a e b, com $b \neq 0$, tais que $\dfrac{a}{b} = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$.

44. (IME 2013) Considere $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{45}\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]$. Determine o(s) valor(es) de $m \in \mathbb{R}$ que satisfaz(em) a equação $P = 2^m$.

45. (USAMO 1992) Prove que

$$\frac{1}{\cos 0° \cos 1°} + \frac{1}{\cos 1° \cos 2°} + \cdots + \frac{1}{\cos 88° \cos 89°} = \frac{\cos 1°}{\operatorname{sen}^2 1°}.$$

46. (RÚSSIA 1995) Mostre que a equação $\cos(\cos(\cos(\cos x))) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))$ não tem solução real.

47. (IMO 1981) Seja P um ponto interior ao triângulo ABC e sejam D, E, F os pés das perpendiculares de P sobre BC, CA, AB. Determine os pontos P que tornam mínima a soma

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

48. (PUTNAM 2003) Determine o menor valor de $|\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cossec} x|$ para x real.

49. (IMO 2001) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O, e seja P o pé da altura relativa a BC. Sabendo que $\widehat{C} \geq \widehat{B} + 30°$, prove que $\widehat{A} + \widehat{COP} < 90°$.

50. (RÚSSIA 2000) Prove que, para todo inteiro positivo n e todo x real,

$$\operatorname{sen}^n 2x + (\operatorname{sen}^n x - \cos^n x)^2 \leq 1.$$

Soluções

1

O triângulo OAB é retângulo em A, porque a tangente é perpendicular ao raio. Os lados ficam em função de θ, e o teorema da bissetriz interna em B dá a razão em que C divide OA.

1. Os lados do triângulo OAB. Com $OA = 1$ e ângulo θ em O: $AB = \operatorname{tg}\theta$ e $OB = \sec\theta$.

2. O teorema da bissetriz em B. A bissetriz BC divide o lado oposto OA na razão dos lados adjacentes:

$$\frac{OC}{CA} = \frac{BO}{BA} = \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

3. O valor de OC. Como $OC + CA = 1$, temos $OC = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

Resposta: (D) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

2

Como AB é diâmetro, o triângulo ACB é retângulo em C, e o ângulo de 30° determina tudo nele. A altura baixada de C sobre AB localiza E, e a potência do ponto E fornece ED.

1. O triângulo inscrito no semicírculo. O ângulo $A\hat{C}B$ é reto e $A\hat{B}C = 30^\circ$, logo $B\hat{A}C = 60^\circ$ e $AC = AB\operatorname{sen}30^\circ = R$.

2. A altura CH. Seja H o pé da perpendicular de C sobre AB. No triângulo AHC, $AH = R\cos 60^\circ = \frac{R}{2}$ e $CH = R\operatorname{sen}60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

3. A posição de E. No triângulo CHE, retângulo em H, $HE^2 = EC^2 - CH^2 = 2R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{5R^2}{4}$, logo $HE = \frac{R\sqrt{5}}{2}$. Como $HE > AH$, o ponto E não pode estar entre A e H; ele está do lado de B, e

$$AE = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2} = \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}, \qquad EB = 2R - AE = \frac{R(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Repare que $AE < 2R$, de modo que E de fato está no diâmetro.

4. A potência do ponto E. As cordas AB e CD se cortam em E, logo $EC \cdot ED = EA \cdot EB$:

$$ED = \frac{1}{R\sqrt{2}} \cdot \frac{R^2(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{R(2\sqrt{5}-2)}{4\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{4}.$$

Resposta: $ED = \dfrac{R(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{4}$.

3

A altura relativa à hipotenusa é eixo de simetria, e cada trissetriz forma 15° com ela. A base DE sai da tangente de 15°.

1. As medidas do triângulo. De $\frac{CA\cdot CB}{2} = 12{,}5$ e $CA = CB$ vem $CA = CB = 5$. A altura CM relativa a AB mede $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, e M é o ponto médio de AB.

2. Os ângulos com a altura. As trissetrizes formam 30° e 60° com CA; a altura forma 45°. Logo $M\hat{C}D = M\hat{C}E = 15^\circ$ e, nos triângulos retângulos CMD e CME, $MD = ME = CM\operatorname{tg}15^\circ$.

3. A área.

$$[CDE] = \frac{DE \cdot CM}{2} = CM^2\operatorname{tg}15^\circ = \frac{25}{2}(2-\sqrt{3}) = \frac{50-25\sqrt{3}}{2}.$$

Resposta: (D) $\dfrac{50-25\sqrt{3}}{2}$.

4

Os triângulos retângulos ABE e ADF são congruentes (hipotenusas $AE = AF$ e catetos $AB = AD$), logo $B\hat{A}E = D\hat{A}F = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$. O quadrado pequeno corta de ABE um triângulo semelhante.

1. O ponto E. $BE = AB \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

2. O quadrado menor. Seja s o lado do quadrado de vértice B; seu vértice oposto a B é o ponto P de AE que dista s de AB e s de BC. O triângulo retângulo cortado acima do quadrado, com vértice em A, tem catetos $1 - s$ (sobre AB) e s, e ângulo 15° em A:

$$\frac{s}{1-s} = \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \iff s = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}},$$
$$s = \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

3. O valor de $a + b + c$. $a = 3$, $b = 3$, $c = 6$, e $a + b + c = 12$.

Resposta: 12.

5

Colocando o quadrado num sistema de coordenadas com origem em A, o ponto B' tem coordenadas dadas pelo seno e pelo cosseno de $\theta = B\hat{A}B'$, e a condição sobre $B'C$ vira uma equação para $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

1. As coordenadas. Tome o lado igual a 1, $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $D = (0,-1)$ e $C = (1,-1)$ (o arco vai de B a D). Então $B' = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$, com $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$, pois $AB' = 1$ e B' é a projeção usual sobre os eixos.

2. A condição.

$$B'C^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (1 - \operatorname{sen}\theta)^2 = 3 - 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta).$$

Impondo $B'C^2 = 3 - \sqrt{6}$, vem $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. O seno e o cosseno. Elevando ao quadrado, $1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{3}{2}$, logo $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$. O seno e o cosseno de θ são as raízes de $t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + \frac{1}{4} = 0$, isto é, $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$. Se θ é agudo, ele mede 15° ou 75°.

4. A posição da figura. As duas posições são simétricas em relação à diagonal AC e dão o mesmo $B'C$. Na figura, B' está próximo de B, o que corresponde a $\theta = 15^\circ$.

Resposta: $B\hat{A}B' = 15^\circ = \dfrac{\pi}{12}$ (a posição simétrica dá 75°).

6

Cada lado do octógono está sobre um lado de um dos quadrados, que dista $\frac{1}{2}$ do centro. Basta mostrar que os oito lados têm o mesmo comprimento.

1. A simetria. Seja θ o ângulo de rotação que leva um quadrado no outro. A reflexão na reta por O que forma ângulo $\frac{\theta}{2}$ com um lado do primeiro quadrado troca os dois quadrados, e a rotação de 90° em torno de O preserva cada um. Essas simetrias levam o octógono em si mesmo e um lado qualquer do octógono em qualquer outro (os lados alternam entre os dois quadrados). Logo todos os lados medem $\frac{43}{99}$.

2. A área. O octógono é a união dos oito triângulos de vértice O e base num lado, todos com altura $\frac{1}{2}$:

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{43}{99} \cdot \frac{1}{2} = \frac{86}{99}.$$

Como 86 e 99 são primos entre si, $m+n=185$.

Resposta: 185.

7

Em $]0,\pi[$ o seno é positivo, de modo que $\operatorname{cossec}^2\alpha$ existe e não se anula: P é de fato um trinômio do segundo grau. Basta impor discriminante não negativo e escrever tudo em seno e cosseno.

1. O discriminante.

$$\Delta=\operatorname{cotg}^2\alpha-4\operatorname{cossec}^2\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha-4\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos\alpha\,(\cos\alpha-4)}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

2. O sinal. Como $\operatorname{sen}^2\alpha>0$ e $\cos\alpha-4<0$ (o cosseno não passa de 1), temos $\Delta\geq 0$ se, e somente se, $\cos\alpha\leq 0$.

3. O intervalo. Em $]0,\pi[$, $\cos\alpha\leq 0$ equivale a $\frac{\pi}{2}\leq\alpha<\pi$. Em $\alpha=\frac{\pi}{2}$ o trinômio é x^2, com raiz dupla real 0.

Resposta: $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

8

Escrevendo cada fator em seno e cosseno aparecem os números $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha+1$ e $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha-1$, cujo produto é uma diferença de quadrados.

1. Os fatores. Para $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$,

$$1+\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha=\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+1}{\cos\alpha},$$
$$1+\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cossec}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha-1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

2. O produto. $S=\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=2.$

Resposta: $S=2$.

9

Com a secante e a tangente obtemos $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, e daí a cossecante e a cotangente.

1. A diferença. $(\sec x+\operatorname{tg}x)(\sec x-\operatorname{tg}x)=1$ dá $\sec x-\operatorname{tg}x=\frac{7}{22}$.

2. Secante e tangente. Somando e subtraindo, $2\sec x=\frac{22}{7}+\frac{7}{22}=\frac{533}{154}$ e $2\operatorname{tg}x=\frac{22}{7}-\frac{7}{22}=\frac{435}{154}$. Logo $\cos x=\frac{308}{533}$ e $\operatorname{sen}x=\operatorname{tg}x\cos x=\frac{435}{308}\cdot\frac{308}{533}=\frac{435}{533}$.

3. A soma pedida. $\operatorname{cossec}x+\operatorname{cotg}x=\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{841}{435}=\dfrac{29^2}{15\cdot 29}=\dfrac{29}{15}.$

Resposta: $m+n=29+15=44$.

10

A hipótese, escrita em $u=\operatorname{sen}^2\alpha$, é um quadrado perfeito igualado a zero; ela determina $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$.

1. A substituição. Com $u=\operatorname{sen}^2\alpha$ e $1-u=\cos^2\alpha$, multiplicando a hipótese por $ab(a+b)$:

$$(a+b)\left[bu^2+a(1-u)^2\right]=ab.$$

2. O quadrado perfeito. O primeiro membro é $(a+b)\left[(a+b)u^2-2au+a\right]=(a+b)^2u^2-2a(a+b)u+a^2+ab$. Subtraindo ab: $\big((a+b)u-a\big)^2=0$, logo $\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{a}{a+b}$ e $\cos^2\alpha=\dfrac{b}{a+b}$.

3. O valor pedido.

$$\frac{\operatorname{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a^4}{a^3(a+b)^4}+\frac{b^4}{b^3(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}.$$

Resposta: $\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

11

As diferenças de quartas potências se fatoram como diferenças de quadrados, e $1+\operatorname{tg}^2\theta$, $1+\operatorname{cotg}^2\theta$ viram $\sec^2\theta$ e $\operatorname{cossec}^2\theta$. Sobra uma equação do primeiro grau em $\cos^2\theta$.

1. O domínio. A tangente e a cotangente exigem $\theta\neq\frac{k\pi}{2}$; nesses pontos também $1-\operatorname{sen}^4\theta\neq 0$.

2. As fatorações. $1-\cos^4\theta=\operatorname{sen}^2\theta\,(1+\cos^2\theta)$ e $1-\operatorname{sen}^4\theta=\cos^2\theta\,(1+\operatorname{sen}^2\theta)$; além disso, $\dfrac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\dfrac{\operatorname{cossec}^2\theta}{\sec^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

3. A simplificação. O primeiro membro de (i) fica $\dfrac{1+\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{1+\cos^2\theta}{2-\cos^2\theta}$, e a equação dá $3+3\cos^2\theta=4-2\cos^2\theta$, ou seja, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$ e $\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=4$.

4. As soluções. $\operatorname{tg}\theta=\pm 2$, com uma solução em cada quadrante de $]0,2\pi]$.

Resposta: $\theta\in\{\operatorname{arctg}2,\ \pi-\operatorname{arctg}2,\ \pi+\operatorname{arctg}2,\ 2\pi-\operatorname{arctg}2\}$.

12

Com $a=\operatorname{sen}^2x$ e $b=\cos^2x$ temos $a+b=1$ e $ab=q$, onde $q=p^2\in[0,\frac{1}{4}]$. As somas de potências $P_n=a^n+b^n$ obedecem a $P_n=P_{n-1}-q\,P_{n-2}$.

1. As somas de potências. $P_0=2$, $P_1=1$, $P_2=1-2q$, $P_3=1-3q$, $P_4=1-4q+2q^2$, $P_5=1-5q+5q^2$ e $P_6=P_5-qP_4=1-6q+9q^2-2q^3$.

2. A equação em q. $1-5q+5q^2=\frac{11}{36}$ equivale a $q^2-q+\frac{5}{36}=0$, com raízes $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$. Como $q\le\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{6}$.

3. O valor de P_6. $P_6=1-1+\frac{9}{36}-\frac{2}{216}=\frac{1}{4}-\frac{1}{108}=\frac{13}{54}$.

Resposta: $m+n=13+54=67$.

13

As duas somas, transformadas em produto, têm o mesmo fator $2\cos\frac{x-y}{2}$; dividindo uma pela outra sobra a tangente do arco $\frac{x+y}{2}$, e o seno do dobro sai pela substituição universal.

1. A prostaférese. Com $s=\frac{x+y}{2}$ e $d=\frac{x-y}{2}$: $a=2\operatorname{sen}s\cos d$ e $b=2\cos s\cos d$. Como $ab\neq 0$, $\cos d\neq 0$ e $\cos s\neq 0$, e então $\operatorname{tg}s=\frac{a}{b}$.

2. O seno do arco duplo.

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}2s=\frac{2\operatorname{tg}s}{1+\operatorname{tg}^2s}=\frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Resposta: $\operatorname{sen}(x+y)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

14

A igualdade supõe $\operatorname{tg} B$ e $\operatorname{tg} C$ definidas, isto é, B e C diferentes de 90°. Somando as duas tangentes aparece $\operatorname{sen}(B+C)$, que é igual a $\operatorname{sen} A$.

1. A soma das tangentes.

$$\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{sen} B \cos C + \cos B \operatorname{sen} C}{\cos B \cos C} = \frac{\operatorname{sen}(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos B \cos C},$$

pois $B + C = \pi - A$. Como $\operatorname{sen} A \neq 0$, essa soma não se anula.

2. O quociente.

$$\frac{\operatorname{sen} 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{2 \operatorname{sen} A \cos A \cdot \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

15

O primeiro quociente sai direto do arco duplo; para o segundo, precisamos de $\operatorname{sen}^2 y$, que vem da relação fundamental aplicada a x.

1. O quociente dos senos.

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2y} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} \cdot \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{3}{2}.$$

2. O valor de $\operatorname{sen}^2 y$. De $\operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} y$ e $\cos x = \frac{1}{2} \cos y$: $9 \operatorname{sen}^2 y + \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sen}^2 y) = 1$, logo $\operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{35}$.

3. O quociente dos cossenos. $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - 18 \operatorname{sen}^2 y = -\frac{19}{35}$ e $\cos 2y = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 y = \frac{29}{35}$, logo $\frac{\cos 2x}{\cos 2y} = -\frac{19}{29}$.

4. A soma.

$$\frac{3}{2} - \frac{19}{29} = \frac{87 - 38}{58} = \frac{49}{58}.$$

Resposta: $p + q = 107$.

16

As relações de Girard dão $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$ e $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$, e portanto $\operatorname{tg}(a+b)$. Pondo $\cos^2(a+b)$ em evidência, y fica uma expressão em $\operatorname{tg}(a+b)$.

1. A tangente da soma. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = -p$ e $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = q \neq 1$, logo $T = \operatorname{tg}(a+b) = \frac{-p}{1-q}$; em particular $\cos(a+b) \neq 0$.

2. A expressão em T.

$$y = \cos^2(a+b)\,(T^2 + pT + q) = \frac{T^2 + pT + q}{1 + T^2}.$$

3. A substituição de T. Multiplicando numerador e denominador por $(1-q)^2$:

$$y = \frac{p^2 - p^2(1-q) + q(1-q)^2}{(1-q)^2 + p^2} = \frac{q\big(p^2 + (1-q)^2\big)}{(1-q)^2 + p^2} = q.$$

Resposta: $y = q$.

17

Trocando $-\cos\frac{2\pi}{7}$ por $\cos\frac{5\pi}{7}$, os arcos ficam em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{7}$. Multiplicar por $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ (metade da razão) faz a soma telescopar.

1. A troca de $-\cos\frac{2\pi}{7}$. $-\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{7}$. Seja $S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

2. A linearização.

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{\pi}{7} &= \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{7}, \\ 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{3\pi}{7} &= \operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{7} - \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{7}, \\ 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{5\pi}{7} &= \operatorname{sen}\tfrac{6\pi}{7} - \operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{7}. \end{aligned}$$

3. A soma. $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cdot S = \operatorname{sen}\frac{6\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} \neq 0$, $S = \frac{1}{2}$.

18

Os numeradores de S são, pelo arco triplo, $4\cos^3 y$ e $4\operatorname{sen}^3 y$. Chamando $u = \frac{\cos x}{\cos y}$ e $v = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}$, o problema vira uma conta algébrica com $u + v = -1$.

1. O arco triplo. $3\cos y + \cos 3y = 4\cos^3 y$ e $3\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} 3y = 4\operatorname{sen}^3 y$. Logo

$$S = \frac{4\cos^2 y}{u} + \frac{4\operatorname{sen}^2 y}{v} = \frac{4(v\cos^2 y + u\operatorname{sen}^2 y)}{uv},$$

com $uv \neq 0$ (pois S está definido).

2. A relação fundamental para x. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ é $u^2\cos^2 y + v^2\operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y$, ou seja, $\cos^2 y\,(u-1)(u+1) + \operatorname{sen}^2 y\,(v-1)(v+1) = 0$.

3. O uso de $u + v = -1$. $u + 1 = -v$ e $v + 1 = -u$; substituindo, $-v(u-1)\cos^2 y - u(v-1)\operatorname{sen}^2 y = 0$, isto é, $uv(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) = v\cos^2 y + u\operatorname{sen}^2 y$. Portanto $v\cos^2 y + u\operatorname{sen}^2 y = uv$.

4. O valor de S. $S = \frac{4uv}{uv} = 4$.

Resposta: $S = 4$.

19

Transformada em produto, a fração do segundo membro é a tangente de $\frac{y+z}{2}$, isto é, a cotangente de $\frac{x}{2}$. A equação resultante só envolve o ângulo x.

1. A prostaférese.

$$\frac{\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z}{\cos y + \cos z} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}}{2\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}} = \operatorname{tg}\frac{y+z}{2},$$

pois $|y - z| < \pi$ e então $\cos\frac{y-z}{2} > 0$. Como $\frac{y+z}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$, a fração vale $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

2. A equação em $\frac{x}{2}$. $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$, com $\operatorname{sen}\frac{x}{2} > 0$ e $\cos\frac{x}{2} > 0$. Daí $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

3. O ângulo x. $x = \frac{\pi}{2}$, e o triângulo é retângulo no vértice de ângulo x.

20

Os dois arcos são agudos. Basta conhecer uma razão de cada um e aplicar as fórmulas do arco duplo que usam exatamente essa razão.

1. O primeiro arco. Seja $\theta = \operatorname{arccotg}\frac{4}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Então $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}$ e

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}.$$

2. O segundo arco. Seja $\varphi = \operatorname{arccossec}\frac{5}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Então $\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5}$ e $\cos 2\varphi = 1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$.

3. A soma. $\frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{17}{25}$.

Resposta: $\dfrac{17}{25}$.

21

O radical impõe $|x| \le \frac{\pi}{2}$, e nesse intervalo o arco seno do cosseno tem expressão explícita: é o complemento de $|x|$. A equação vira uma equação do segundo grau em $|x|$.

1. O domínio. $\pi^2 - 4x^2 \ge 0$ equivale a $|x| \le \frac{\pi}{2}$.

2. O arco seno do cosseno. Para $|x| \le \frac{\pi}{2}$, o arco $\frac{\pi}{2} - |x|$ está em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right) = \cos|x| = \cos x$. Logo $\operatorname{arcsen}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - |x|$.

3. A equação em $t = |x|$. Com $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, os dois membros de $\sqrt{\pi^2 - 4t^2} = \frac{\pi}{2} - t$ são não negativos, e elevar ao quadrado não introduz raízes:

$$\pi^2 - 4t^2 = \frac{\pi^2}{4} - \pi t + t^2 \iff 20t^2 - 4\pi t - 3\pi^2 = 0,$$

cujas raízes são $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = -\frac{3\pi}{10}$. Só $t = \frac{\pi}{2}$ serve.

4. A conferência. Para $x = \pm\frac{\pi}{2}$, o primeiro membro é 0 e $\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arcsen} 0 = 0$.

Resposta: $x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$.

22

Os números $3, 7, 13, 21$ são da forma $k^2 + k + 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$, e a soma é a soma telescópica da teoria.

1. Arco cotangente como arco tangente. Para $t > 0$, $\operatorname{arccotg} t = \operatorname{arctg}\frac{1}{t}$ (os dois estão em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e têm a mesma tangente).

2. A soma telescópica. Como $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k$, a soma vale $\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\dfrac{5-1}{1+5} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

3. A cotangente. $\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$, e $10 \cdot \frac{3}{2} = 15$.

Resposta: 15.

23

A substituição $x = a\operatorname{sen}\theta$ transforma $\sqrt{a^2 - x^2}$ em $a\cos\theta$, e os radicais duplos viram cossenos e senos do arco metade. A equação se reduz a uma igualdade de senos.

1. A substituição $x = a\operatorname{sen}\theta$. Para $x \in [0, a]$ existe um único $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ com $x = a\operatorname{sen}\theta$, e $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$ (pois $\cos\theta \geq 0$).

2. Os radicais duplos. Por $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ e $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$, com $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\sqrt{a}\sqrt{a + a\cos\theta} = a\sqrt{2}\cos\tfrac{\theta}{2}, \qquad \sqrt{3a}\sqrt{a - a\cos\theta} = a\sqrt{6}\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}.$$

3. A forma amplitude-fase. Dividindo por $a\sqrt{2}$: $\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{sen}\theta$, ou seja, $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\operatorname{sen}\theta$.

4. A igualdade de senos. Os arcos $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ e $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ estão ambos em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, onde o seno é injetor. Logo $\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}$, isto é, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5. A volta para x. $x = a\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Conferindo: $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}$, e o primeiro membro vale $a\sqrt{\frac{3}{2}} + a\sqrt{\frac{3}{2}} = a\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Resposta: $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

24

Escrevemos a equação como $5\cos 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 1$ e comparamos os gráficos para obter pelo menos seis soluções; a substituição $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ mostra que não pode haver mais que seis.

1. As seis meias-ondas. No intervalo, $y = 5\cos 3\theta$ percorre seis trechos monótonos, $\left[\frac{k\pi}{3}, \frac{(k+1)\pi}{3}\right]$, $k = 0, \ldots, 5$, indo de 5 a -5 ou de -5 a 5. A função $g(\theta) = 3\operatorname{sen}\theta - 1$ fica em $[-4, 2]$. Logo $d = 5\cos 3\theta - g$ tem sinais opostos nas extremidades de cada trecho, e há pelo menos uma solução no interior de cada um: pelo menos 6.

2. A cota superior. Com $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ($\theta \neq \pi$), $\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; como $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, multiplicando a equação por $(1 + t^2)^3$ obtém-se um polinômio em t de grau no máximo 6, não nulo (em $t = 0$ ele vale 6). Cada $\theta \in (0, 2\pi]$, $\theta \neq \pi$, dá um t diferente, logo há no máximo 6 soluções com $\theta \neq \pi$; e $\theta = \pi$ não é solução, pois $1 - 0 + 5\cos 3\pi = -4$.

Resposta: 6.

25

Cada parcela é a diferença $\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n$; as somas parciais se cancelam em cadeia.

1. Arco cotangente como arco tangente. Para $t > 0$, $\operatorname{arccotg} t = \operatorname{arctg}\frac{1}{t}$. Assim $\operatorname{arccotg}(n^2 + n + 1) = \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n(n+1)} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n$, pela fórmula da diferença (com $n(n+1) \geq 0 > -1$).

2. As somas parciais. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \operatorname{arccotg}(n^2 + n + 1) = \operatorname{arctg}(N+1) - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg}(N+1)$.

3. O limite. Quando N cresce, $\operatorname{arctg}(N+1)$ se aproxima de $\frac{\pi}{2}$.

Resposta: $\dfrac{\pi}{2}$.

26

A equação é linear em seno e cosseno; o ângulo auxiliar a transforma numa equação fundamental.

1. O ângulo auxiliar. Como $1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4$, dividimos por 2:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \operatorname{sen} x \cos\tfrac{\pi}{3} + \cos x \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

2. A equação fundamental. Então $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Resposta: $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

27

Pelo cosseno da diferença, o parêntese vale $\frac{1}{\cos x}$, e a equação se reduz a $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4$.

1. O domínio. Precisamos de $\cos x \neq 0$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$, isto é, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

2. O cosseno da diferença.

$$1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\cos x \cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x},$$

e o lado esquerdo vale $\operatorname{tg} x$.

3. A equação em $\operatorname{sen} 2x$. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x} = 4$, logo $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Esses arcos respeitam o domínio.

Resposta: $S = \left\{ \dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ \dfrac{5\pi}{12} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

28

A primeira equação, transformada em produto, fornece $\operatorname{sen} x \cos y$; com a soma dada pela segunda, $\operatorname{sen} x$ e $\cos y$ ficam determinados como raízes de uma quadrática.

1. A transformação em produto. $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen} x \cos y$, logo $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{4}$.

2. Soma e produto. $\operatorname{sen} x$ e $\cos y$ têm soma 1 e produto $\frac{1}{4}$; são raízes de $t^2 - t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Portanto $\operatorname{sen} x = \cos y = \frac{1}{2}$.

3. Os arcos. Em $[0, 2\pi]$, $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ dá $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ e $\cos y = \frac{1}{2}$ dá $y \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$, combinados livremente.

Resposta: $(x, y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$.

29

O logaritmando é o quadrado da base, de modo que a equação vale em todo o domínio; a resposta é o próprio domínio.

1. A identidade. $1 + \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$. Onde a base $b = \operatorname{sen} x + \cos x$ é admissível, $\log_b b^2 = 2$ é verdadeiro.

2. O domínio. Exige-se $b > 0$ e $b \neq 1$ (com $b > 0$ o logaritmando b^2 é positivo). Como $b = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, a condição $b > 0$ em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é $-\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$; e $b = 1$ ocorre em $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Resposta: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

30

Reduzindo as potências, a equação vira uma soma de cossenos igual a -1, que se fatora num produto de três cossenos.

1. A redução de potências. Com $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = -1$.

2. A fatoração. $\cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \cos 2x$ e $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$. A equação fica

$$2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x) = 0, \qquad \text{isto é,} \qquad 4\cos x \cos 2x \cos 3x = 0.$$

3. As famílias. $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $\cos 3x = 0$: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$. A primeira está contida na terceira.

Resposta: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

31

Os dois lados se escrevem com $s = \operatorname{sen} x + \cos x$ e $p = \operatorname{sen} x \cos x$, e um fator comum que nunca se anula pode ser cancelado.

1. Soma e produto. $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = s(1-p)$ e $1 - p^2 = (1-p)(1+p)$. Como $p = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \le \frac{1}{2}$, o fator $1-p$ é positivo, e a equação equivale a $s = 1 + p$.

2. A equação em s. Com $p = \frac{s^2-1}{2}$: $2s = s^2 + 1$, ou $(s-1)^2 = 0$, e $s = 1$.

3. A volta a x. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Resposta: $S = \left\{2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

32

A segunda equação tem a forma $u + \frac{1}{u} = 2$ com $u > 0$, que só admite $u = 1$; isso liga y a x e transforma a primeira equação numa equação em $\operatorname{sen} x$.

1. A segunda equação. Com $u = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos x} > 0$, a equação $u + \frac{1}{u} = 2$ equivale a $(u-1)^2 = 0$, logo $\operatorname{sen} y = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Como y e $\frac{\pi}{2} - x$ estão em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, onde o seno é injetor, $y = \frac{\pi}{2} - x$.

2. A primeira equação. Pela fórmula do arco metade, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{\operatorname{sen} y}$, e então $\operatorname{tg} y \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{\cos y}$. Multiplicando por $\cos y \neq 0$, a primeira equação fica $1 - \cos y = \cos 2x$.

3. A equação em $\operatorname{sen} x$. Como $\cos y = \operatorname{sen} x$, vem $1 - \operatorname{sen} x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, ou seja, $\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$. No intervalo, $\operatorname{sen} x > 0$; logo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ e $y = \frac{\pi}{3}$.

4. O produto. A única solução é $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, e $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{18}$.

Resposta: (E) $\dfrac{\pi^2}{18}$.

33

Trocando $8\operatorname{sen}^2 x$ por $4 - 4\cos 2x$ e somando $\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x$ por prostaférese, todos os termos ganham o fator $\cos 2x$, e o que sobra é um quadrado perfeito.

1. As trocas. $8\operatorname{sen}^2 x = 4 - 4\cos 2x$ e $2\operatorname{sen} 9x + 2\operatorname{sen} 5x = 4\operatorname{sen} 7x \cos 2x$. A equação fica

$$\cos 2x\,(4\operatorname{sen}^2 7x + 4\operatorname{sen} 7x + 1) = 0,$$

isto é, $\cos 2x\,(2\operatorname{sen} 7x + 1)^2 = 0$.

2. O fator $\cos 2x$. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; no intervalo, só $x = \frac{7\pi}{4}$.

3. O fator $\operatorname{sen} 7x = -\frac{1}{2}$. Com $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ temos $7x \in \left[\frac{21\pi}{2}, 14\pi\right]$. As soluções de $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ nesse intervalo são $\theta = 12\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{67\pi}{6}$, $12\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{71\pi}{6}$, $14\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{79\pi}{6}$ e $14\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{83\pi}{6}$.

4. Os extremos. Em $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$ o produto não se anula ($\cos 2x = \mp 1$ e $\operatorname{sen} 7x \in \{1, 0\}$).

Resposta: $x \in \left\{ \frac{67\pi}{42}, \frac{71\pi}{42}, \frac{7\pi}{4}, \frac{79\pi}{42}, \frac{83\pi}{42} \right\}$.

34

Os cossenos determinam os senos, e a lei dos senos dá a razão entre os lados.

1. Os senos. $\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, $\operatorname{sen} B = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{2\sqrt{15}}{16}$ e $\operatorname{sen} C = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4\sqrt{15}}{16}$. Os dados são coerentes: $\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{77}{128} - \frac{45}{128} = \frac{1}{4} = -\cos C$, isto é, $\cos(A + B) = -\cos C$.

2. A razão dos lados. Pela lei dos senos, $a : b : c = 3 : 2 : 4$. Os lados inteiros são $3k$, $2k$, $4k$, e o menor perímetro ocorre com $k = 1$.

Resposta: 9.

35

Ângulos em progressão aritmética de soma π têm termo médio $\frac{\pi}{3}$. O primeiro membro da equação é $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, e a comparação com $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ resolve a equação.

1. A soma de cubos. A equação é $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, ou $\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen} x) + \cos^2 x(1 - \cos x) = 0$.

2. Os dois termos são não negativos. Cada parcela é ≥ 0, logo ambas se anulam: $\operatorname{sen} x \in \{0, 1\}$ e $\cos x \in \{0, 1\}$. Num ângulo de triângulo, $0 < x < \pi$, o único valor é $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Os ângulos. Os ângulos são $\frac{\pi}{3} - d$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + d$, e o maior é $\frac{\pi}{2}$: $d = \frac{\pi}{6}$.

Resposta: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$.

36

Pela lei dos senos a hipótese é $b + c = 2a$; as fórmulas do semiângulo exprimem o produto pedido pelo semiperímetro.

1. A hipótese em lados. $2 \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C$ equivale a $2a = b + c$, logo $p = \frac{3a}{2}$ e $p - a = \frac{a}{2}$.

2. O produto das cotangentes. De $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p-a}{p}$,

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{p}{p-a} = \frac{3a/2}{a/2} = 3.$$

Resposta: 3.

37

As duas expressões dadas são iguais a $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$.

1. As alturas. $h_B = a \operatorname{sen} C$ e $h_C = a \operatorname{sen} B$, logo $\frac{h_B h_C}{a^2} = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$.

2. A soma de cossenos. $\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$, logo $\cos A + \cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. A forma pedida. $\frac{p}{q\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ equivale a $8p^2 = 3q^2 m$. Para $m = 1, \ldots, 5$ a equação $8p^2 = 3q^2 m$ não tem solução em naturais (o expoente de 2 ou de 3 não fecha); para $m = 6$ ela fica $4p^2 = 9q^2$, com $p = 3$, $q = 2$. Assim $\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$.

Resposta: $p + q + m = 3 + 2 + 6 = 11$.

38

Como $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A+B}{2}$, cada termo $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg}\frac{C}{2}$ é um quociente de senos que contém $\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$ ou $\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}$, e a igualdade se fatora.

1. A reescrita. A hipótese é $a\big(1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg}\frac{C}{2}\big) + b\big(1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg}\frac{C}{2}\big) = 0$. Com $\sigma = \frac{A+B}{2}$,

$$1 - \operatorname{tg} A \operatorname{cotg}\sigma = \frac{\cos A \operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} A \cos\sigma}{\cos A \operatorname{sen}\sigma} = \frac{\operatorname{sen}(\sigma - A)}{\cos A \operatorname{sen}\sigma} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}}{\cos A \operatorname{sen}\sigma},$$

e analogamente $1 - \operatorname{tg} B \operatorname{cotg}\sigma = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos B \operatorname{sen}\sigma}$.

2. A fatoração. A hipótese fica $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\dfrac{a}{\cos A} - \dfrac{b}{\cos B}\right) = 0$.

3. Os dois casos. Se $\operatorname{sen}\frac{B-A}{2} = 0$, então $A = B$. Senão, $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$; com $a = 2R\operatorname{sen} A$, $b = 2R\operatorname{sen} B$, isso é $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$, e de novo $A = B$. Em ambos os casos $a = b$.

39

Multiplicando por $\cos x$ e usando $3 - 3\cos^2 x = 3\operatorname{sen}^2 x$, a equação se fatora em dois fatores lineares em $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

1. A fatoração. Com $\cos x \neq 0$, a equação equivale a $3\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + m\sqrt{3}\cos x(\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x) = 0$, isto é,

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x - m\cos x) = 0.$$

2. As raízes. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\operatorname{tg} x = m$: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \operatorname{arctg} m + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Os ângulos do triângulo. $\alpha + \beta = 75°$, ambos agudos. Se $\alpha \neq \beta$, eles são as duas soluções distintas em $(0°, 90°)$, isto é, $30°$ e $\operatorname{arctg} m$: $\operatorname{arctg} m = 45°$ e $m = 1$. Se $\alpha = \beta = 37{,}5°$, é preciso $m = \operatorname{tg} 37{,}5° = \frac{1-\cos 75°}{\operatorname{sen} 75°} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

Resposta: (a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \operatorname{arctg} m + k\pi$; (b) $m = 1$ (triângulo de ângulos $105°$, $30°$, $45°$), ou $m = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$ se o triângulo for isósceles.

40

Falta conhecer como o ângulo $B + C$ se divide em P; Ceva trigonométrico dá uma equação com solução única.

1. Os dados. $A = 50°$, logo $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 180° - 50° - 20° - 30° = 80°$. Seja $x = \widehat{PBC}$.

2. Ceva trigonométrico. $\operatorname{sen} 10° \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 40° \operatorname{sen}(80° - x) \operatorname{sen} 20°$.

3. O valor $x = 60°$. Basta verificar que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 10° \operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} 40° \operatorname{sen}^2 20°$. Temos $\operatorname{sen} 40° \operatorname{sen} 20° = \frac{\cos 20° - \frac{1}{2}}{2}$, e então

$$\operatorname{sen} 40° \operatorname{sen}^2 20° = \frac{\operatorname{sen} 40° - \operatorname{sen} 20°}{4} = \frac{2\cos 30° \operatorname{sen} 10°}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen} 10°,$$

que é o primeiro membro.

4. A unicidade de x. $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(80° - x)}$ é crescente em $(0°, 80°)$, logo $x = 60°$. Então $B = 80°$ e $C = 50° = A$: $BA = BC$.

41

Os arcos se completam dois a dois: $\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$. Trocando cada seno pelo cosseno do complementar, aparecem dois produtos do tipo $\operatorname{sen} t\cos t$.

1. Os complementares. $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{24}=\cos\frac{\pi}{24}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{24}=\cos\frac{5\pi}{24}$. Logo

$$p=\left(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{24}\cos\tfrac{\pi}{24}\right)\left(\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{24}\cos\tfrac{5\pi}{24}\right)=\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{12}\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{12}.$$

2. O arco duplo em $\frac{\pi}{12}$. Como $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$, $p=\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{8}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{16}$.

Resposta: $p=\dfrac{1}{16}$.

42

Os três senos são cossenos de arcos com denominador 7, e o produto $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ se calcula pelo lema dos arcos que dobram.

1. A troca por cossenos. Pelos complementares, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}=\cos\frac{6\pi}{14}=\cos\frac{3\pi}{7}$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}=\cos\frac{2\pi}{7}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{7}$. Além disso, $\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{4\pi}{7}$. Logo $\frac{1}{b}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

2. O produto de cossenos que dobram. Multiplicando por $8\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ e aplicando o arco duplo três vezes,

$$8\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7}=\operatorname{sen}\tfrac{8\pi}{7}=-\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7},$$

de modo que o produto dos cossenos vale $-\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{b}=\frac{1}{8}$.

Resposta: $b=8$.

43

Como $|z|=1$, vale $\bar z=z^{-1}$, e $\cos\frac{k\pi}{7}=\frac{z^k+z^{-k}}{2}$. A relação $z^7=-1$ permite trocar as potências negativas por positivas e, depois, usar a fatoração de z^7+1.

1. Os cossenos em função de z. De $z^7=-1$ vem $z^{-k}=-z^{7-k}$. Então

$$\cos\tfrac{\pi}{7}=\tfrac{z-z^6}{2},\qquad \cos\tfrac{3\pi}{7}=\tfrac{z^3-z^4}{2},\qquad \cos\tfrac{5\pi}{7}=\tfrac{z^5-z^2}{2}.$$

2. A soma. $S=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6\right)$.

3. A fatoração de z^7+1. $0=z^7+1=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)$ e $z\neq-1$, logo $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$, isto é, $z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6=1$. Portanto $S=\frac{1}{2}$.

Resposta: (a) $\cos\frac{\pi}{7}=\frac{z-z^6}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{z^3-z^4}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{z^5-z^2}{2}$; (b) $a=1$, $b=2$ (ou qualquer par com $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$).

44

Os arcos são $0^\circ,1^\circ,\dots,45^\circ$. Para dois arcos que somam 45°, o produto $(1+\operatorname{tg}a)(1+\operatorname{tg}b)$ vale 2, o que permite agrupar os fatores aos pares.

1. A identidade dos pares. Se $a+b=45^\circ$, então $1=\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$, ou seja, $\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b=1$. Logo $(1+\operatorname{tg}a)(1+\operatorname{tg}b)=1+(\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b)=2$.

2. A contagem. O fator $k=0$ vale 1 e o fator $k=45$ vale $1+1=2$. Os fatores de $k=1$ a 44 formam os 22 pares $(k,45-k)$ com $1\le k\le 22$, cada um de produto 2. Assim $P=2^{22}\cdot 2=2^{23}$.

Resposta: $m=23$.

45

Cada parcela é uma diferença de tangentes dividida por $\operatorname{sen} 1^\circ$, pela identidade (b) das diferenças de tangentes.

1. A parcela como diferença. Com $a = k^\circ$ e $b = (k+1)^\circ$, $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos a \cos b}$, logo $\dfrac{1}{\cos k^\circ \cos(k+1)^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg}(k+1)^\circ - \operatorname{tg} k^\circ}{\operatorname{sen} 1^\circ}$.

2. A soma telescópica. Somando de $k = 0$ a $k = 88$, resta $\dfrac{\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ}{\operatorname{sen} 1^\circ} = \dfrac{\operatorname{cotg} 1^\circ}{\operatorname{sen} 1^\circ} = \dfrac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen}^2 1^\circ}$.

46

Comparar apenas as imagens não basta, pois o lado esquerdo pode valer menos que o máximo do lado direito. Compara-se então $\cos(\cos t)$ com $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)$ para o *mesmo* t e depois se usa a monotonia. Escreva $C(t) = \cos(\cos t)$ e $S(t) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)$; a equação é $C(C(x)) = S(S(x))$.

1. $C(t) > S(t)$ para todo t. Como $C(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \cos t\right)$,

$$C(t) - S(t) = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \cos t + \operatorname{sen} t}{2}\,\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2} - \cos t - \operatorname{sen} t}{2}.$$

Como $|\cos t \pm \operatorname{sen} t| \le \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, os numeradores dos dois arcos estão entre $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} > 0$ e $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} < \pi$; os dois arcos estão em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e os dois fatores são positivos.

2. S é crescente em $[-1,1]$. Em $[-1,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o seno é crescente e leva $[-1,1]$ em $[-\operatorname{sen} 1, \operatorname{sen} 1]$, onde o seno também é crescente.

3. A cadeia. Pelo passo 1 com $t = C(x)$, $C(C(x)) > S(C(x))$. Pelo passo 1 com $t = x$, $C(x) > S(x)$, e ambos estão em $[-1,1]$; pelo passo 2, $S(C(x)) > S(S(x))$. Portanto $C(C(x)) > S(S(x))$ para todo x, e a igualdade nunca ocorre.

47

Os denominadores se relacionam com a área: $a \cdot PD + b \cdot PE + c \cdot PF$ é constante. Com uma soma de produtos constante, a forma de Engel de Cauchy–Schwarz dá a cota.

1. A soma constante. Os triângulos PBC, PCA, PAB cobrem ABC, logo $a \cdot PD + b \cdot PE + c \cdot PF = 2S$.

2. A desigualdade de Cauchy–Schwarz. Pela forma de Engel,

$$\frac{a}{PD} + \frac{b}{PE} + \frac{c}{PF} = \frac{a^2}{a\,PD} + \frac{b^2}{b\,PE} + \frac{c^2}{c\,PF} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2S}.$$

3. A igualdade. Ela ocorre quando $\frac{a}{a\,PD} = \frac{b}{b\,PE} = \frac{c}{c\,PF}$, isto é, $PD = PE = PF$: o ponto P é o incentro, e o mínimo vale $\frac{(2p)^2}{2pr} = \frac{2p}{r}$.

Resposta: o único ponto é o incentro de ABC.

48

As seis funções se escrevem com $s = \operatorname{sen} x$ e $c = \cos x$, e tudo depende apenas de $t = s + c$ e $sc = \frac{t^2-1}{2}$. A expressão se reduz a uma função racional de t.

1. A redução à variável t. Com $sc \neq 0$,

$$\begin{aligned} s + c + \frac{s}{c} + \frac{c}{s} + \frac{1}{c} + \frac{1}{s} &= t + \frac{s^2 + c^2}{sc} + \frac{s+c}{sc} = t + \frac{1+t}{sc} \\ &= t + \frac{2(1+t)}{t^2 - 1} = t + \frac{2}{t-1}, \end{aligned}$$

com $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $t \neq \pm 1$ (pois $sc \neq 0$).

2. A variável $u = t - 1$. A expressão é $g = 1 + u + \frac{2}{u}$, com $u \in [-1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1]$, $u \neq 0$, $u \neq -2$. Se $u > 0$, então $u < 1$ e $g > \frac{2}{u} > 2$. Se $u < 0$, pela MA–MG, $|u| + \frac{2}{|u|} \geq 2\sqrt{2}$, logo $g = 1 - \left(|u| + \frac{2}{|u|}\right) \leq 1 - 2\sqrt{2} < 0$ e $|g| \geq 2\sqrt{2} - 1$.

3. O valor é atingido. A igualdade pede $|u| = \sqrt{2}$, isto é, $t = 1 - \sqrt{2}$, que está em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e é diferente de ± 1; existe x com $\operatorname{sen} x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$. Como $2\sqrt{2} - 1 < 2$, o menor valor de $|g|$ é $2\sqrt{2} - 1$.

Resposta: $2\sqrt{2} - 1$.

49

No triângulo OPC, o ângulo em C é $\widehat{OCB} = 90^\circ - A$. A tese diz que o ângulo em O é menor que o ângulo em C, o que equivale a comparar os lados opostos: $PC < OP$. A lei dos senos dá PC, e a desigualdade triangular dá uma cota para OP.

1. A redução a $PC < OP$. Como o triângulo é acutângulo, $\widehat{OCB} = 90^\circ - A$. Então $A + \widehat{COP} < 90^\circ \iff \widehat{COP} < \widehat{OCP} \iff PC < OP$.

2. O lado PC. Temos $PC = AC \cos C = 2R \operatorname{sen} B \cos C$, e $4 \operatorname{sen} B \cos C = 2 \operatorname{sen}(B + C) + 2 \operatorname{sen}(B - C) = 2 \operatorname{sen} A + 2 \operatorname{sen}(B - C)$. Como $-90^\circ < B - C \leq -30^\circ$, $\operatorname{sen}(B - C) \leq -\frac{1}{2}$; e $\operatorname{sen} A < 1$. Logo $4 \operatorname{sen} B \cos C < 1$, isto é, $2\,PC < R$.

3. A desigualdade triangular em OPC. Pela desigualdade triangular, $OP \geq OC - PC = R - PC > PC$.

50

Com $s = \operatorname{sen}^n x$ e $c = \cos^n x$, temos $\operatorname{sen}^n 2x = 2^n sc$, e a expressão vale $s^2 + c^2 + (2^n - 2)sc$. Comparamos com $1 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^n$ pelo binômio de Newton.

1. O caso $sc \leq 0$. Com $u = \operatorname{sen}^2 x$ e $v = \cos^2 x$, temos $s^2 + c^2 = u^n + v^n \leq (u + v)^n = 1$, e o termo $(2^n - 2)sc$ é ≤ 0.

2. O caso $sc > 0$. Então $sc = (uv)^{n/2}$. Pelo binômio, $1 = (u + v)^n = u^n + v^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$. Agrupando os termos k e $n - k$, que têm o mesmo coeficiente, e usando $u^k v^{n-k} + u^{n-k} v^k \geq 2(uv)^{n/2}$ (MA–MG),

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\right) (uv)^{n/2} = (2^n - 2)\, sc.$$

Logo $s^2 + c^2 + (2^n - 2)sc \leq 1$.