Vinte desafios

Lista de exercícios · Geometria Espacial

Os problemas

1. Num tetraedro regular de aresta a, sejam R o raio da esfera circunscrita, ρ o raio da esfera tangente às seis arestas e r o raio da esfera inscrita. Calcule os três raios e mostre que $R : \rho : r = 3 : \sqrt{3} : 1$.

2. Num cubo de aresta a inscrevem-se os dois tetraedros regulares de vértices alternados. Identifique o sólido comum aos dois tetraedros e calcule o seu volume.

3. Calcule o raio da esfera inscrita num octaedro regular de aresta a e a razão entre o volume do octaedro e o da esfera.

4. Dois cilindros de revolução de raio r têm eixos perpendiculares que se cortam. Calcule o volume do sólido comum aos dois.

5. Um cone de revolução tem raio da base 3 e geratriz 9. Uma formiga parte de um ponto P da circunferência da base, dá uma volta completa em torno do cone pela superfície lateral e retorna a P. Calcule o comprimento do menor caminho possível.

6. Calcule o comprimento do menor caminho sobre a superfície de um paralelepípedo retângulo de dimensões 1, 2 e 3 entre dois vértices diametralmente opostos.

7. Dois pontos de uma esfera de raio R estão ambos à latitude $45°$ norte e têm longitudes que diferem de $60°$. Calcule a distância esférica entre eles.

8. As três arestas de um tetraedro que partem de um vértice A são mutuamente perpendiculares e medem 1, 2 e 3. Calcule o raio da esfera circunscrita, a distância de A à face oposta e o raio da esfera inscrita.

9. Numa pirâmide de base quadrada com todas as arestas iguais, calcule o ângulo diedro entre duas faces laterais adjacentes.

10. Três esferas de raio 1 apoiam-se num plano horizontal, tangentes duas a duas, e sobre elas repousa uma quarta esfera de raio 1. Calcule a altura do ponto mais alto do conjunto.

11. Num tetraedro regular $ABCD$ de aresta a, sejam M, N, P, Q os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Mostre que $MNPQ$ é um quadrado, calcule sua área e compare os volumes das duas partes em que ele divide o tetraedro.

12. Um obelisco tem bases retângulares paralelas de dimensões 8×4 e 6×2, com lados correspondentes paralelos, e altura 9. Calcule o seu volume.

13. Um triângulo equilátero de lado a gira em torno da reta que passa por um vértice e é paralela ao lado oposto. Calcule o volume do sólido gerado.

14. Entre todos os cones de revolução inscritos numa esfera de raio R, determine o de volume máximo e a fração do volume da esfera que ele ocupa.

15. Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e oito faces triangulares, e em cada vértice concorrem quatro arestas. Determine o número de vértices e de arestas e identifique o poliedro.

16. As três faces de um triedro medem $70°$, $80°$ e $90°$. Calcule a área do triângulo esférico que ele recorta numa esfera de raio 1 com centro no vértice.

17. Prove que num tetraedro $ABCD$ as três somas AB^2+CD^2, AC^2+BD^2 e AD^2+BC^2 são iguais se, e somente se, as arestas opostas são perpendiculares duas a duas.

18. Entre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa esfera de raio R, determine o de volume máximo.

19. Entre todos os cilindros de revolução inscritos numa esfera de raio R, determine o de área lateral máxima e o de volume máximo.

20. Um satélite está a uma altura igual ao raio da Terra, suposta esférica. Que fração da superfície terrestre ele enxerga?

As resoluções

1. Ponha o tetraedro com baricentro G na origem. A esfera circunscrita passa pelos quatro vértices, a esfera inscrita tangencia as quatro faces e a esfera *média* passa pelos seis pontos médios das arestas — que são os pontos em que ela tangencia as arestas, por simetria.

A altura do tetraedro vale $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, e G divide cada altura na razão $3:1$ a partir do vértice, logo

$$R = \frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}, \qquad r = \frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \qquad \frac{R}{r} = 3.$$

O ponto médio de uma aresta dista de G

$$\rho = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

e então

$$\frac{\rho}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{12}{a\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

Logo $R:\rho:r = 3:\sqrt{3}:1$. ■

2. Os dois tetraedros têm juntos os oito vértices do cubo, e cada face de um é paralela a uma face do outro. A interseção é limitada pelos oito planos das faces, isto é, pelos planos que cortam o cubo segundo as suas oito "diagonais de canto": o sólido comum é o **octaedro regular** cujos vértices são os centros das seis faces do cubo. Sua aresta é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{a^3}{6}},$$

isto é, $\frac{1}{6}$ do cubo — e a metade de cada tetraedro, cujo volume é $\frac{a^3}{3}$. A figura completa, com os dois tetraedros superpostos, é a *stella octangula* de Kepler.

3. Com os vértices em $(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ e análogos, cada face está no plano $x+y+z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (a menos de sinais), cuja distância à origem é

$$r = \frac{a\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}}.$$

O volume do octaedro é $V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ e o da esfera,

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{6a^3\sqrt{6}}{216} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}.$$

Logo

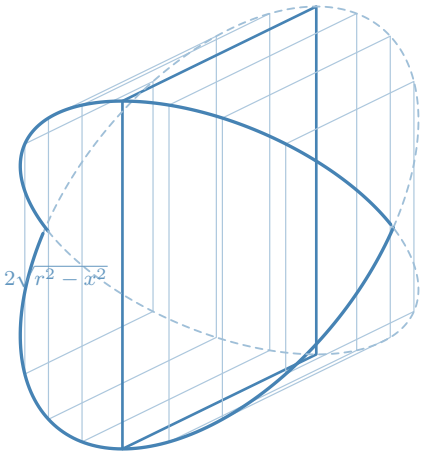
$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{27}{\pi a^3\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{2}}{\pi\sqrt{6}} = \frac{9}{\pi\sqrt{3}} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} \approx 1{,}654.$$

Conferência: como $V_o = \frac{1}{3} r A_t$, a razão também vale $\frac{A_t}{4\pi r^2}$, com $A_t = 2a^2\sqrt{3}$.

4. Ponha os eixos dos cilindros ao longo de Oy e Oz. Um ponto pertence aos dois sólidos quando

$$x^2 + z^2 \le r^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \le r^2.$$

Fixado x, as duas condições dão $|y| \le \sqrt{r^2 - x^2}$ e $|z| \le \sqrt{r^2 - x^2}$: a seção é um **quadrado** de lado $2\sqrt{r^2 - x^2}$, de área $4(r^2 - x^2)$.



Compare com a esfera de raio r e mesmo eixo Ox: sua seção na abscissa x é o círculo inscrito naquele quadrado, de área $\pi(r^2 - x^2)$. As áreas estão, em toda altura, na razão constante $\frac{4}{\pi}$; pelo princípio de Cavalieri os volumes guardam a mesma razão:

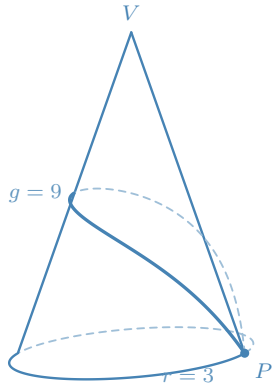
$$V = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{16r^3}{3}}.$$

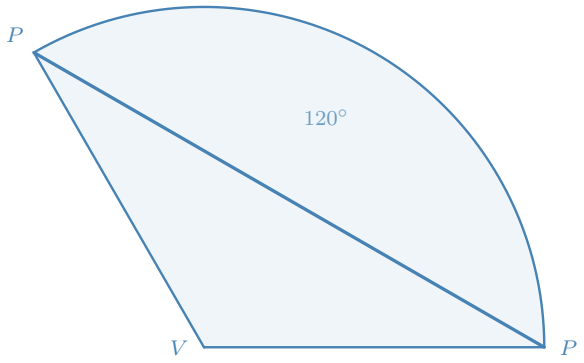
Este é o *bicilindro de Steinmetz*, e a razão $\frac{4}{\pi}$ é precisamente a mesma que Arquimedes usou entre o cilindro e a esfera. Para três cilindros de eixos mutuamente perpendiculares o volume comum vale $8\big(2 - \sqrt{2}\big)r^3$.

5. Desenvolva a superfície lateral. O setor tem raio $g = 9$ e ângulo

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi \cdot 3}{9} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Uma volta completa em torno do cone corresponde, no desenvolvimento, a ir de uma borda do setor à outra; e o menor caminho entre dois pontos de uma superfície desenvolvível é o segmento de reta do desenvolvimento.





As duas imagens de P estão a 9 do vértice, separadas por 120°. Logo

$$L = 2 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \boxed{9\sqrt{3}} \approx 15{,}59.$$

Note que $9\sqrt{3} < 2\pi \cdot 3 \approx 18{,}85$: o caminho pela superfície é mais curto que o contorno da base. Como $120^\circ < 180^\circ$, o segmento fica dentro do setor e o caminho é admissível.

6. Planificando o paralelepípedo, o caminho torna-se um segmento de reta e as três planificações possíveis dão as hipotenusas

$$\sqrt{(1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{18}, \qquad \sqrt{(1+3)^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \qquad \sqrt{(2+3)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

O menor é

$$L = \sqrt{18} = \boxed{3\sqrt{2}} \approx 4{,}243.$$

Regra prática. Some as duas *menores* dimensões e componha com a maior: sendo r a maior aresta e p, q as outras duas, o mínimo é sempre

$$L_{\min} = \sqrt{(p+q)^2 + r^2}.$$

Note ainda que $3\sqrt{2}$ é menor que a soma $1+3=4$ de duas arestas, mas maior que a diagonal interna $\sqrt{14} \approx 3{,}742$ — que a formiga não pode percorrer.

7. Os vetores unitários dos dois pontos têm coordenadas

$$\vec{u} = (\cos 45^\circ,\, 0,\, \operatorname{sen} 45^\circ), \qquad \vec{v} = (\cos 45^\circ \cos 60^\circ,\, \cos 45^\circ \operatorname{sen} 60^\circ,\, \operatorname{sen} 45^\circ),$$

e a distância esférica d (em ângulo central) satisfaz $\cos d = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Essa é exatamente a lei dos cossenos esférica aplicada ao triângulo formado pelos dois pontos e pelo pólo norte, em que os dois lados valem 45° (a colatitude) e o ângulo no pólo é a diferença de longitudes:

$$\cos d = \operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Logo $d = \arccos \frac{3}{4} \approx 41^\circ 24' 35''$, e o arco mede

$$L = R\, d \approx 0{,}72273\, R.$$

Compare com o paralelo de latitude 45°: seguindo-o, o percurso seria $R \cos 45^\circ \cdot \frac{\pi}{3} \approx 0{,}7405\, R$ — mais longo, como tinha de ser.

8. Ponha A na origem e $B=(1,0,0)$, $C=(0,2,0)$, $D=(0,0,3)$.

Esfera circunscrita. O tetraedro tri-retângulo completa-se num paralelepípedo retângulo de dimensões 1, 2, 3, e a esfera circunscrita ao tetraedro é a do paralelepípedo:

$$R=\frac{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}\approx 1{,}871.$$

Distância de A à face BCD. Pelo teorema de De Gua (seção 1.8),

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{49}{36}\implies d=\boxed{\frac{6}{7}}\approx 0{,}857.$$

Esfera inscrita. O volume vale $V=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$. As três faces retas têm áreas 1, $\frac{3}{2}$ e 3; a face BCD tem área

$$S=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{|(6,3,2)|}{2}=\frac{7}{2}.$$

(Note $6^2+3^2+2^2=49$: as três áreas retas e a oblíqua cumprem De Gua, $1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$.) Logo $A_t=1+\frac{3}{2}+3+\frac{7}{2}=9$ e

$$\varrho=\frac{3V}{A_t}=\frac{3}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}.$$

9. Tome a base $ABCD$ de lado 1 e o vértice V acima do centro, com todas as arestas iguais a 1; então a altura vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Com $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $D=(0,1,0)$ e $V=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, as normais das faces VAB e VAD são

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AV},\qquad \vec{n}_2=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AV},$$

e um cálculo direto dá

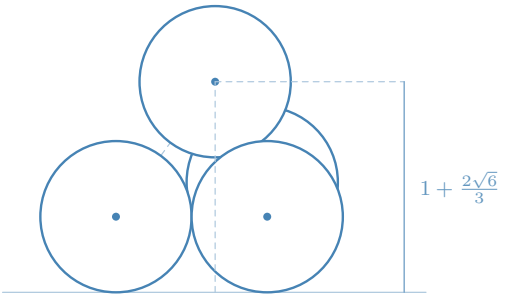
$$\cos\widehat{D}=-\frac{1}{3}\implies\boxed{\widehat{D}=\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right)\approx 109^\circ 28'}.$$

Sem coordenadas. Duas dessas pirâmides e um tetraedro regular de mesma aresta encaixam-se num prisma: colando um tetraedro regular a uma face lateral da pirâmide as duas faces adjacentes ficam *coplanares*. Logo o diedro da pirâmide e o do tetraedro regular são suplementares: $\widehat{D}=180^\circ-\arccos\frac{1}{3}=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

10. Os quatro centros são vértices de um tetraedro regular de aresta 2 (soma dos raios), cuja altura vale

$$H=2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

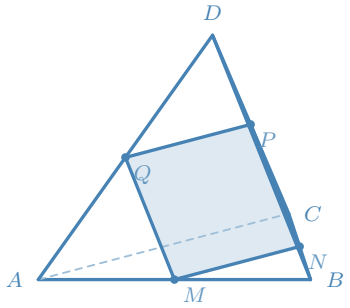
Os três centros de baixo estão à altura 1; o de cima, à altura $1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



O ponto mais alto do conjunto é o topo da quarta esfera:

$$h=1+\frac{2\sqrt{6}}{3}+1=\boxed{2+\frac{2\sqrt{6}}{3}}\approx 3{,}633.$$

11. Os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{QP}$ são bases médias dos triângulos ABC e ADC relativas ao lado comum $\overline{AC}$: ambos são paralelos a $\overline{AC}$ e medem $\frac{a}{2}$. Do mesmo modo $\overline{NP}$ e $\overline{MQ}$ são paralelos a $\overline{BD}$ e medem $\frac{a}{2}$. Logo $MNPQ$ é um losango de lado $\frac{a}{2}$; e como num tetraedro regular as arestas opostas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são *ortogonais*, os lados consecutivos do losango são perpendiculares: $MNPQ$ é um **quadrado**.



Sua área é

$$S = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{a^2}{4}}.$$

Quanto aos volumes, a simetria do tetraedro regular que troca $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$ leva o plano $MNPQ$ em si mesmo e troca as duas partes; logo elas têm **volumes iguais**, cada uma valendo $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

12. O sólido é um *prismatoide*: todos os vértices estão em dois planos paralelos e as seções intermediárias são retângulos cujos lados variam linearmente com a altura. Vale então a fórmula prismoidal (apêndice A)

$$V = \frac{H}{6}\big(B_1 + 4B_m + B_2\big).$$

A seção média é o retângulo de lados $\frac{8+6}{2} = 7$ e $\frac{4+2}{2} = 3$, de área 21. Logo

$$V = \frac{9}{6}\,(32 + 4\cdot 21 + 12) = \frac{3}{2}\cdot 128 = \boxed{192}.$$

Conferência por decomposição. Corte o obelisco por dois planos verticais que passam pelas arestas do retângulo menor. Sobram: um **prisma** de base 6×2 e altura 9, de volume 108; duas **cunhas** de base 6×1 e altura 9, cada uma de volume $\frac{6\cdot 1\cdot 9}{2} = 27$; duas cunhas de base 2×1 e altura 9, cada uma de volume 9; e quatro **pirâmides** de base 1×1 e altura 9, cada uma de volume 3. Somando,

$$108 + 2\cdot 27 + 2\cdot 9 + 4\cdot 3 = 108 + 54 + 18 + 12 = 192.\checkmark$$

Observe que o obelisco *não* é um tronco de pirâmide: as quatro arestas laterais não concorrem num ponto, porque $\frac{8}{6} \neq \frac{4}{2}$. A fórmula do tronco daria $\frac{9}{3}\big(32 + 12 + \sqrt{384}\big) \approx 190{,}8$ — valor errado.

13. Seja e o eixo, que passa pelo vértice A e é paralelo a $\overline{BC}$. A distância de $\overline{BC}$ ao eixo é a altura do triângulo, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, e o triângulo não atravessa o eixo: toca-o apenas em A.

Pelo teorema de Pappus–Guldin, o volume vale $2\pi \bar{d}\, S$, com $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e $\bar{d}$ a distância do baricentro ao eixo. O baricentro dista $\frac{h}{3}$ do lado $\overline{BC}$, logo dista $h - \frac{h}{3} = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ do eixo. Então

$$V = 2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\pi\cdot\frac{3a^3}{12} = \boxed{\frac{\pi a^3}{2}}.$$

Conferência por decomposição. O sólido gerado é o cilindro de raio h e comprimento a — gerado pelo retângulo circunscrito ao triângulo — menos os dois cones gerados pelos dois triângulos retângulos que sobram, cada um de raio h e altura $\frac{a}{2}$:

$$V = \pi h^2 a - 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{a}{2} = \pi h^2 a - \frac{\pi h^2 a}{3} = \frac{2\pi a h^2}{3} = \frac{2\pi a}{3}\cdot\frac{3a^2}{4} = \frac{\pi a^3}{2}.$$

14. Seja h a altura do cone, com o vértice num extremo do diâmetro. A base está a distância $|h-R|$ do centro, logo seu raio satisfaz

$$\varrho^2 = R^2 - (h-R)^2 = 2Rh - h^2,$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\big(2Rh - h^2\big)h = \frac{\pi}{3}\big(2Rh^2 - h^3\big), \qquad 0 < h < 2R.$$

Pela desigualdade das médias aplicada a $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$ e $2R-h$, cuja soma $2R$ é constante,

$$\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h) \le \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

com igualdade quando $\frac{h}{2} = 2R-h$, isto é, $h = \frac{4R}{3}$. Como $2Rh^2-h^3 = h^2(2R-h) = 4\left[\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h)\right]$,

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot\frac{8R^3}{27} = \boxed{\frac{32\pi R^3}{81}}, \qquad \frac{V_{\max}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \boxed{\frac{8}{27}}.$$

Nesse cone $\varrho^2 = \frac{8R^2}{9}$, isto é, $\varrho = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$: a seção meridiana é um triângulo isósceles de base $\frac{4R\sqrt{2}}{3}$ e altura $\frac{4R}{3}$, e a geratriz mede $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

15. Contando as arestas pelas faces,

$$2A = 6\cdot 4 + 8\cdot 3 = 48 \implies \boxed{A = 24},$$

e contando-as pelos vértices, $4V = 2A = 48$, donde $\boxed{V = 12}$. Conferindo Euler:

$$V - A + F = 12 - 24 + 14 = 2.\checkmark$$

O poliedro é o **cuboctaedro**, um dos sólidos de Arquimedes: obtém-se truncando um cubo pelos pontos médios das arestas, ou, equivalentemente, truncando um octaedro do mesmo modo. Seus 12 vértices são os pontos médios das 12 arestas do cubo, e seu dual é o dodecaedro rombico.

16. O triedro recorta um triângulo esférico de lados $a = 70°$, $b = 80°$, $c = 90°$. Os ângulos saem da lei dos cossenos dos diedros, na forma

$$\cos\widehat{A} = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},$$

e das duas análogas. Calculando,

$$\widehat{A} \approx 69°40'41'', \qquad \widehat{B} \approx 79°21'03'', \qquad \widehat{C} \approx 93°40'47''.$$

O excesso esférico vale

$$E = \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} - 180° \approx 62{,}70857° = 1{,}094471 \text{ rad},$$

e, pelo teorema de Girard, com $R = 1$,

$$\boxed{S = R^2E \approx 1{,}0945}.$$

Isso é $\frac{1{,}0945}{4\pi} \approx 8{,}71\%$ da esfera. Note que $\widehat{C} > 90°$ embora $c = 90°$: na esfera, ao contrário do plano, um lado reto não obriga o ângulo oposto a ser reto.

17. Com vetores de posição $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$,

$$AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\big(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{d}\big) = -2\,(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c}) = -2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Logo

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \iff \overline{AB} \perp \overline{CD},$$

e, permutando os nomes dos vértices, obtêm-se as outras duas equivalências. Se as três somas são iguais, as três diferenças se anulam e os três pares de arestas opostas são perpendiculares; reciprocamente, a ortogonalidade dos três pares dá as três igualdades. ■

Consequência. Basta que *dois* pares sejam ortogonais: de $S_1 = S_2$ e $S_2 = S_3$ segue $S_1 = S_3$, e o terceiro par também o é. Um tal tetraedro chama-se *ortocêntrico*, porque suas quatro alturas concorrem num ponto. O tetraedro tri-retângulo de arestas 1, 2 e 3 é um exemplo: ali as três somas valem $1+(4+9)$, $4+(1+9)$ e $9+(1+4)$ — todas iguais a 14.

18. Sejam $2x$, $2y$, $2z$ as arestas. O centro da esfera é o centro do paralelepípedo, e

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad V = 8xyz.$$

Pela desigualdade das médias aplicada a x^2, y^2, z^2,

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{R^2}{3} \implies xyz \le \frac{R^3}{3\sqrt{3}},$$

com igualdade exatamente quando $x = y = z$. O sólido de volume máximo é, pois, o **cubo**, de aresta

$$2x = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}, \qquad V_{\max} = 8\cdot\frac{R^3}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{8\sqrt{3}\,R^3}{9}} \approx 1{,}5396\,R^3.$$

Isso é apenas 36,75% do volume da esfera.

19. Seja $2t$ a altura do cilindro e ϱ o raio, com $\varrho^2 + t^2 = R^2$. Escreva $\varrho = R\cos\alpha$ e $t = R\operatorname{sen}\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Área lateral.

$$A_\ell = 2\pi\varrho\cdot 2t = 4\pi R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\pi R^2 \operatorname{sen} 2\alpha \;\le\; 2\pi R^2,$$

com igualdade em $\alpha = 45°$. Logo

$$\boxed{A_\ell^{\max} = 2\pi R^2}, \qquad \varrho = t = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

e o cilindro é equilátero, de altura igual ao diâmetro da base. Curiosamente essa área máxima é exatamente *metade* da área da esfera.

Volume.

$$V = \pi\varrho^2\cdot 2t = 2\pi\big(R^2 - t^2\big)t.$$

Pela desigualdade das médias com $\frac{R^2-t^2}{2}$, $\frac{R^2-t^2}{2}$ e t^2, de soma constante R^2,

$$\frac{\big(R^2-t^2\big)^2}{4}\,t^2 \le \left(\frac{R^2}{3}\right)^3,$$

com igualdade quando $\frac{R^2-t^2}{2} = t^2$, isto é, $t = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Então

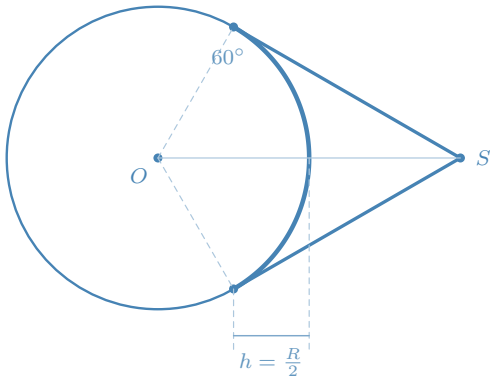
$$\boxed{V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}\,\pi R^3}{9}} \approx 2{,}4184\,R^3,$$

ou seja $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 57{,}7\%$ do volume da esfera.

20. O satélite S está a distância $d = 2R$ do centro O. As visuais tangentes tocam a Terra em pontos T com $\widehat{OTS}$ reto, logo

$$\cos\alpha = \frac{R}{d} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ,$$

sendo α o ângulo $\widehat{TOS}$.



A região visível é a calota de ângulo polar α, cuja altura vale

$$h = R\big(1 - \cos\alpha\big) = \frac{R}{2},$$

e cuja área é $2\pi Rh = \pi R^2$. Portanto

$$\frac{S_{\text{calota}}}{S_{\text{esfera}}} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Para enxergar metade da superfície seria preciso $\cos\alpha = 0$, isto é, uma distância infinita: nenhum satélite vê mais do que um hemisfério, e um a uma altura igual ao raio já vê metade do máximo possível.