Números complexos: raízes da unidade e algumas aplicações a problemas geométricos e trigonométricos

1. Introdução

Durante muitos séculos os matemáticos esbarraram com a ideia de raízes de números negativos e consideravam o resultado como inexistente ou misterioso, já que o quadrado de qualquer número real é não negativo. Mas, no século XVI, com a resolução da equação do terceiro grau $x^3-15x-4=0$ pelo matemático italiano Rafael Bombelli, utilizando a fórmula de Cardano, os fatos mudaram.

A fórmula de Cardano resolve equações do terceiro grau do tipo

$$x^3+px+q=0 \iff x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Na equação resolvida por Bombelli temos $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$; por outro lado,

$$x^3-15x-4=(x-4)\,(x^2+4x+1)=0 \iff x=4, \quad x=-2+\sqrt{3}, \quad x=-2-\sqrt{3}.$$

Portanto $4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, e a partir daí os números até então "misteriosos" passam a ter significado. Hoje sabemos que

$$(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=2+11i=2+\sqrt{-121}, \qquad i^2=-1,$$

ao passo que, na época, Bombelli trabalhou com o número "misterioso" $\sqrt{-1}$.

Talvez o maior de todos os avanços no estudo dos números complexos ocorra em 1732, quando Euler introduziu o conceito de unidade imaginária $i=\sqrt{-1}$ e apresentou a representação geométrica dos números complexos como pontos de coordenadas retangulares:

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\theta=\frac{a}{r}, \quad \mathrm{sen}\,\theta=\frac{b}{r}.$$

Euler demonstrou também que as raízes da equação $z^n=1$ podem ser representadas geometricamente como os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio unitário — as raízes n-ésimas da unidade, que são o tema principal deste artigo.

Mais tarde, em 1748, Euler demonstra uma das mais belas fórmulas da Matemática, $e^{i\pi}+1=0$. O caminho até ela passa por várias etapas. Euler trabalhou com o número irracional

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\approx 2{,}718281828459\ldots$$

e, a partir da série de Taylor, representou a função exponencial

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Substituindo $x=i\theta$ e combinando com as expansões das funções seno e cosseno centradas na origem, deduziu que

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

fórmula que estabelece relações diretas entre as funções exponenciais, as trigonométricas e os números complexos.

Cabe ressaltar que outros matemáticos, como René Descartes (1596–1650) e John Wallis (1616–1703), já haviam realizado progressos na representação geométrica de números complexos. Depois de Euler, dois matemáticos brilhantes, Argand e Wessel, desenvolveram a representação de complexos como vetores que se somam por composição de translações e se multiplicam por composição de rotações e homotetias — o que evidencia a enorme relação entre os números complexos e a Geometria.

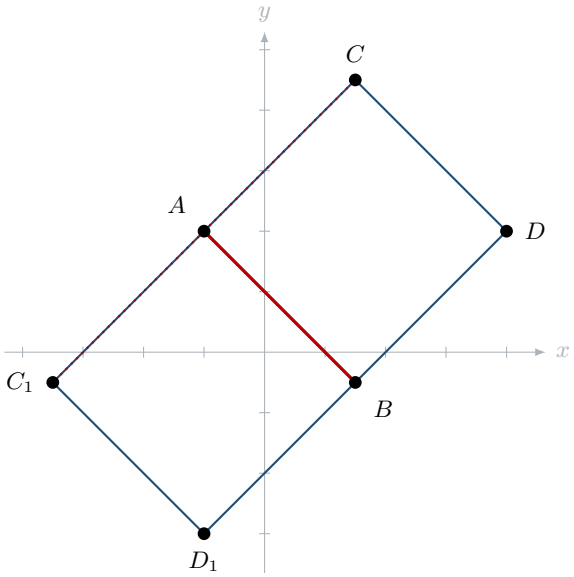
Como exemplo dessa relação intrínseca, resolvamos um problema.

Exemplo 1. *Dados $A(-2,4)$ e $B(3,-1)$, vértices consecutivos de um quadrado, determine os outros dois vértices.*

Solução. Multiplicar por $i = \operatorname{cis} 90^\circ$ equivale a girar de 90° no sentido anti-horário:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \iff C - A = (B - A) \cdot i \iff$$
$$(x_C + y_C i) - (-2 + 4i) = \big[(3 - i) - (-2 + 4i)\big] \cdot i = (5 - 5i)\, i = 5 + 5i,$$

donde $x_C + y_C i = (-2 + 4i) + (5 + 5i) = 3 + 9i$ e $C = (3, 9)$. De modo análogo, girando de 90° no sentido horário obtém-se $C_1 = (-7, -1)$, e os quartos vértices são $D = (8, 4)$ e $D_1 = (-2, -6)$. São, portanto, duas as configurações possíveis.



Após o trabalho desses matemáticos, o "gigante" Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra — toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem ao menos uma raiz complexa — e, com ele, o teorema da decomposição: todo polinômio de grau $n \geq 1$ fatora-se como o produto de uma constante por n fatores do primeiro grau,

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as n raízes complexas de p. Esse corolário será usado muitas vezes no que segue.

2. As raízes n-ésimas da unidade

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, a equação $x^n - 1 = 0$ tem n raízes complexas, chamadas raízes n-ésimas da unidade:

$$x^n = 1 \iff x^n = \operatorname{cis}(0 + 2k\pi) \iff x = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

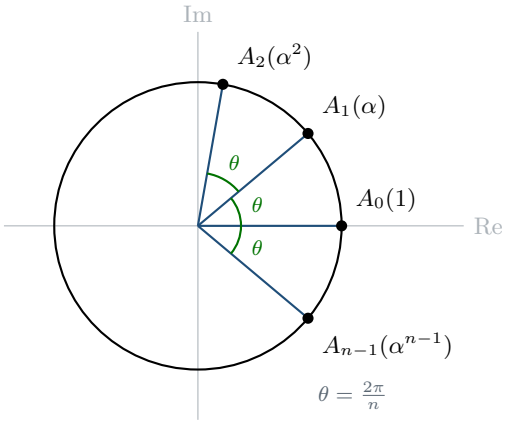
Seja $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. As n raízes distintas são então α^t, com $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, e formam uma progressão geométrica de razão α. Logo

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{1-\mathrm{cis}(2\pi)}{1-\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = 0.$$

Separando parte real e parte imaginária,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

Portanto, se $n \geq 3$, as raízes n-ésimas da unidade são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo de centro na origem e raio 1, com um dos vértices no ponto $(1, 0)$.



Por outro lado, pelo teorema da decomposição,

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1}) \iff \frac{x^n-1}{x-1} = (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1}). \quad (*)$$

Essa identidade é a ferramenta central das aplicações a seguir.

3. Aplicações a problemas de trigonometria e geometria

1. Se $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ são as raízes n-ésimas da unidade, calcule $(5-\alpha)(5-\alpha^2)\cdots(5-\alpha^{n-1})$.

Solução. Basta substituir $x = 5$ em $(*)$:

$$(5-\alpha)(5-\alpha^2)\cdots(5-\alpha^{n-1}) = \frac{5^n-1}{4}.$$

2. Se $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ são as raízes n-ésimas da unidade, prove que

$$\frac{1}{2-\alpha_1} + \frac{1}{2-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{2-\alpha_{n-1}} = \frac{(n-2)\cdot 2^{n-1}+1}{2^n-1}.$$

Solução. Tome o logaritmo natural dos dois lados de $(*)$:

$$\ln\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = \ln\left[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})\right]$$

$$\ln(x^n-1) = \ln(x-1) + \ln(x-\alpha_1) + \ln(x-\alpha_2) + \cdots + \ln(x-\alpha_{n-1}).$$

Derivando ambos os lados,

$$\frac{n\,x^{n-1}}{x^n-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_{n-1}},$$

e, substituindo $x = 2$,

$$\frac{n\cdot 2^{\,n-1}}{2^n-1} = 1 + \frac{1}{2-\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{2-\alpha_{n-1}}.$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2-\alpha_k} = \frac{n\cdot 2^{\,n-1}}{2^n-1} - 1 = \frac{n\cdot 2^{\,n-1} - 2\cdot 2^{\,n-1} + 1}{2^n-1} = \frac{(n-2)\cdot 2^{\,n-1}+1}{2^n-1}.$$

3. Prove que $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n-1}) = n$.

Solução. Tomando o limite com $x \to 1$ em $(*)$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1} = n,$$

ao passo que o lado direito tende a $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n-1})$. Logo os dois valores coincidem.

4. Prove que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{\,n-1}}$.

Solução. Seja $\alpha_i = \operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi i}{n}\right)$, com $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pelo item anterior,

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n-1}) = n. \tag{1}$$

Das identidades $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ e $1-\cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$ segue

$$1-\operatorname{cis} 2\alpha = 1-\cos 2\alpha - i\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha - 2i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\,(\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha).$$

Substituindo em (1), com $\alpha = k\pi/n$ em cada fator,

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} 2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

Cada parêntese tem módulo 1; tomando o módulo dos dois lados,

$$n = 2^{\,n-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

o que é a identidade pedida.

5. Determine o valor de $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{7}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{7}$.

Solução. Pelo item anterior, com $n = 7$,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7} = \frac{7}{2^6}.$$

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}$, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}$ e $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}$, o produto à esquerda é o quadrado do produto pedido:

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\right)^2 = \frac{7}{2^6} \iff \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

6. Determine $\cos 72^\circ$ usando as raízes quintas da unidade.

Solução. De $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ e, por outro lado,

$$x^5-1=(x-1)(x-\operatorname{cis}72^\circ)(x-\operatorname{cis}144^\circ)(x-\operatorname{cis}216^\circ)(x-\operatorname{cis}288^\circ),$$

tomando $w=\operatorname{cis}72^\circ$ obtém-se $w^4+w^3+w^2+w+1=0$. Dividindo por w^2,

$$w^2+w+1+\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}=0 \iff \left(w^2+\frac{1}{w^2}\right)+\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=0.$$

Pondo $y=w+\dfrac{1}{w}=(\cos 72^\circ+i\operatorname{sen}72^\circ)+(\cos 72^\circ-i\operatorname{sen}72^\circ)=2\cos 72^\circ$, e usando $w^2+w^{-2}=y^2-2$, resulta

$$y^2-2+y+1=0 \iff y^2+y-1=0, \quad y>0 \iff y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\boxed{\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

o que comprova, de passagem, que esse número é construtível com régua e compasso.

4. Exercícios

1. (OMERJ) Sabendo que $\operatorname{sen}1^\circ\cdot\operatorname{sen}3^\circ\cdot\operatorname{sen}5^\circ\cdots\operatorname{sen}89^\circ=\dfrac{1}{2^n}$, determine o valor de n.

Solução. Chame de P o produto pedido. A identidade do item 4 da seção anterior, com $n=180$ e com $n=90$, dá

$$\prod_{k=1}^{179}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{180}=\frac{180}{2^{179}}, \qquad \prod_{j=1}^{89}\operatorname{sen}\frac{j\pi}{90}=\frac{90}{2^{89}}.$$

No primeiro produto, os índices *pares* $k=2j$ reproduzem exatamente o segundo produto, pois $\operatorname{sen}\frac{2j\pi}{180}=\operatorname{sen}\frac{j\pi}{90}$. Dividindo um pelo outro sobra o produto sobre os índices ímpares:

$$\prod_{k\ \text{ímpar}}^{179}\operatorname{sen}(k^\circ)=\frac{180/2^{179}}{90/2^{89}}=\frac{2}{2^{90}}=\frac{1}{2^{89}}.$$

Esse produto tem 90 fatores, de $\operatorname{sen}1^\circ$ a $\operatorname{sen}179^\circ$. Como $\operatorname{sen}(180^\circ-x)=\operatorname{sen}x$, os fatores de 91° a 179° repetem, em ordem inversa, os de 89° a 1°; logo esse produto é P^2. Portanto

$$P^2=\frac{1}{2^{89}} \iff P=\frac{1}{2^{44{,}5}} \implies \boxed{n=44{,}5}.$$

2. Prove que $x^4+x^3+x^2+x+1$ divide $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$.

Solução. Seja $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\dfrac{x^5-1}{x-1}$. Suas quatro raízes são as raízes quintas da unidade distintas de 1; em particular são simples e satisfazem $\alpha^5=1$ com $\alpha\neq 1$.

Seja $g(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$. Para uma tal raiz α, reduza os expoentes módulo 5: de $44=8\cdot 5+4$, $33=6\cdot 5+3$, $22=4\cdot 5+2$ e $11=2\cdot 5+1$ segue

$$g(\alpha)=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=f(\alpha)=0.$$

Assim as quatro raízes de f, todas distintas, são também raízes de g. Como f é mônico e tem raízes simples, f divide g.

Vale registrar o mesmo argumento em forma fechada: como $\alpha^{11} = \alpha \neq 1$,

$$g(\alpha) = \frac{(\alpha^{11})^5 - 1}{\alpha^{11} - 1} = \frac{(\alpha^5)^{11} - 1}{\alpha - 1} = \frac{1 - 1}{\alpha - 1} = 0.$$

3. (USAMO) Mostre que a média dos números da forma $n \cdot \operatorname{sen}(n^\circ)$, com $n = 2, 4, 6, 8, \ldots, 180$, é $\cot(1^\circ)$.

Solução. São 90 parcelas. Escreva $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{90} 2k \operatorname{sen}(2k^\circ)$; é preciso mostrar que $S = 90 \cot 1^\circ$.

O recurso é a prostaférese $2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 1^\circ = \cos(\theta - 1^\circ) - \cos(\theta + 1^\circ)$, que transforma cada parcela numa diferença. Pondo $c_j = \cos(j^\circ)$ e multiplicando S por $2 \operatorname{sen} 1^\circ$,

$$2 \operatorname{sen}(1^\circ)\, S = \sum_{k=1}^{90} 2k \big(c_{2k-1} - c_{2k+1}\big).$$

A soma é telescópica por partes. Separando os dois somatórios e reagrupando pelos índices iguais,

$$\sum_{k=1}^{90} 2k\, c_{2k-1} - \sum_{k=1}^{90} 2k\, c_{2k+1} = 2c_1 + 2c_3 + 2c_5 + \cdots + 2c_{179} - 180\, c_{181},$$

pois cada coeficiente interno vale $2k - (2k-2) = 2$.

Os dois pedaços se avaliam de imediato. No somatório, os 90 ângulos ímpares de 1° a 179° se agrupam em 45 pares $(j,\ 180^\circ - j)$ com $\cos(180^\circ - j) = -\cos j$, de modo que a soma é nula. E $c_{181} = \cos 181^\circ = -\cos 1^\circ$. Logo

$$2 \operatorname{sen}(1^\circ)\, S = 0 - 180\,(-\cos 1^\circ) = 180 \cos 1^\circ \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{180 \cos 1^\circ}{2 \operatorname{sen} 1^\circ} = 90 \cot 1^\circ,$$

e a média das 90 parcelas é

$$\frac{S}{90} = \boxed{\cot(1^\circ)}.$$

5. Bibliografia

[1] GOYAL, S. K. *Skills in Mathematics: Algebra for all engineering entrance examinations.* Arihant Publications.

[2] ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies.* Problem Books in Mathematics. New York: Springer, 1998.