GEOMETRIA ESPACIAL

Questões IME · ITA

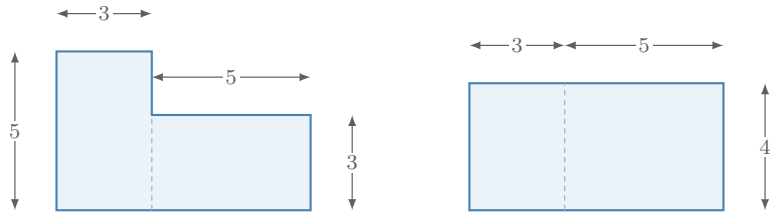
ITA de 2006 a 2025 · 141 questões resolvidas

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

Parte I · ITA — últimos vinte anos

1. (ITA 2025) Determine a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

2. (ITA 2024) O sólido S é a reunião de dois paralelepípedos retângulos congruentes, dispostos como mostram a vista frontal e a vista superior da figura, com as medidas indicadas. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta inteiramente contido em S e que contém um dos vértices de S. Determine o maior valor possível de AB.



vista frontal vista superior

3. (ITA 2024) Num cilindro circular reto de raio r e altura h, sejam A_1 a área da base, A_2 a área lateral e A_3 o volume. Sabendo que A_1, A_2 e A_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica crescente, determine h em função de r e os valores possíveis de r.

4. (ITA 2023) Um cilindro equilátero, apoiado sobre uma de suas bases, está parcialmente cheio de água. Ao se colocar em seu interior uma esfera de raio igual ao raio da base, de modo que ela toque o fundo, o nível da água atinge exatamente a altura do cilindro. Se o volume de água é $\dfrac{2000\pi}{3}$ cm^3, determine a área da superfície lateral do cilindro e o volume da esfera.

5. (ITA 2022) Considere um octaedro regular de aresta ℓ_1. Inscreva nesse octaedro um cubo cujos vértices estão nos baricentros das faces do octaedro; dentro desse cubo inscreva um novo octaedro regular de aresta ℓ_2, com os vértices nos centros das faces do cubo; e assim por diante, obtendo uma sequência (ℓ_i). Determine $\dfrac{\ell_{10}}{\ell_1}$.

6. (ITA 2022) Um tronco de pirâmide regular tem bases hexagonais paralelas, altura $4+2\sqrt{3}$ e lado da base maior igual a $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Sabendo que as faces laterais formam um ângulo diedro de $75°$ com a base maior, determine o volume do tronco.

7. (ITA 2022) Seja P uma pirâmide cujo vértice V é um dos vértices de um cubo de aresta ℓ e cuja base é o hexágono formado pelos pontos médios das seis arestas do cubo que não contêm V nem o vértice oposto a V. Determine o raio da esfera que circunscreve P.

8. (ITA 2021) Seja P uma pirâmide regular de base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a P coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a P.

9. (ITA 2020) As faces laterais de uma pirâmide regular de base hexagonal de lado ℓ formam um ângulo diedro de $75°$ com a base. Determine, em função de ℓ, o raio da esfera circunscrita a essa pirâmide.

10. (ITA 2019) Um cone circular reto de altura h e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de h, o raio da esfera inscrita no cone.

11. (ITA 2019) Os volumes de um tronco de cone, de uma esfera de raio 5 cm e de um cilindro de altura 11 cm formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. O tronco de cone é obtido por rotação de um trapézio retângulo, de altura 4 cm e bases medindo 5 cm e 9 cm, em torno de uma reta que passa pelo lado de menor medida. Então o raio da base do cilindro é, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 4 d) $2\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{6}$

12. (ITA 2019) A superfície lateral de um cone circular reto, planificada, é um setor circular de $216°$ e raio 10. Determine o raio da base e a altura do cone.

13. (ITA 2018) Um tetraedro é formado por quatro vértices não adjacentes de um paralelepípedo retângulo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm, de modo que suas arestas opostas têm o mesmo comprimento. O volume desse tetraedro, em cm^3, é

a) 10 b) 12 c) 15 d) 20 e) 30

14. (ITA 2018) A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 e a área do círculo inscrito na base é $\dfrac{25\pi}{2}$. Dois planos paralelos à base decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine as alturas desses três sólidos.

15. (ITA 2017) Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta 2, em que $ABCD$ é a face inferior, $EFGH$ é a face superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Calcule a área do triângulo LMN.

16. (ITA 2016) Num cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma face paralela à base do cone e o vértice oposto coincidindo com o centro dessa base. Determine o volume do tetraedro.

17. (ITA 2016) Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente a S_1 e à superfície lateral de K. Mostre que o volume de K vale $\dfrac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$.

18. (ITA 2015) Uma folha retangular de papel $ABCD$, com $AB = 4$ e $BC = 3$, é dobrada ao longo da diagonal $\overline{AC}$ de modo que as duas partes passem a formar um ângulo reto. Os quatro vértices passam a ser os vértices de um tetraedro. Determine as medidas das seis arestas desse tetraedro.

19. (ITA 2015) Uma taça em forma de cone circular reto contém certo volume de líquido, cuja superfície dista h do vértice. Acrescentando-se à taça um volume igual de líquido, a superfície subirá, em relação à posição original,

a) $\sqrt[3]{2} - h$ b) $\sqrt[3]{2} - 1$ c) $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) h$ d) h e) $\dfrac{h}{2}$

20. (ITA 2014) Um cilindro reto de altura $h = 1$ cm tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0$. Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

21. (ITA 2014) Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

22. (ITA 2014) Uma pirâmide de altura $h = 1$ cm e volume $V = 50$ cm^3 tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n - 3$ diagonais que o decompõem em $n - 2$ triângulos cujas áreas S_i constituem uma progressão aritmética com $S_1 = \frac{3}{2}$ cm^2 e $S_{n-2} = 11$ cm^2. Então n é igual a

a) 22 b) 24 c) 26 d) 28 e) 32

23. (ITA 2014) Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre essas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

24. (ITA 2013) No sistema xOy os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para esse cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1 b) $\frac{20}{21}$ c) $\frac{10}{11}$ d) $\frac{20}{23}$ e) $\frac{5}{6}$

25. (ITA 2013) Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm^3. Calcule:

a) as medidas das arestas do paralelepípedo;

b) o volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

26. (ITA 2013) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2 b) 4 c) $\sqrt{17}$ d) 6 e) $5\sqrt{10}$

27. (ITA 2012) As interseções das retas $r\colon x - 3y + 3 = 0$, $s\colon x + 2y - 7 = 0$ e $t\colon x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) a área total da superfície do prisma;

b) o volume do prisma.

28. (ITA 2012) Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, determinando assim um novo cone. Para que esse novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\sqrt[3]{\frac{\pi}{243}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

29. (ITA 2012) A superfície lateral de um cone circular reto, planificada, é um setor circular de 120° e área igual a 3π cm^2. A área total e o volume desse cone medem, respectivamente,

a) 4π cm^2 e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3 b) 3π cm^2 e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3 c) 4π cm^2 e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3 d) 6π cm^2 e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3

30. (ITA 2011) Uma esfera está inscrita numa pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{20}{3}$

31. (ITA 2011) Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm, e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da interseção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

32. (ITA 2010) Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta 1 cm. Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{CD}$, a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

33. (ITA 2010) Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ e) $\frac{\pi}{3}$

34. (ITA 2010) As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da interseção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios dessas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, calcule:

a) a distância entre os centros das duas esferas;

b) a área da superfície do sólido obtido pela interseção das duas esferas.

35. (ITA 2009) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal no plano, os pontos $A = (3, 4)$ e $B = (4, 3)$ são vértices de um cubo, sendo $\overline{AB}$ uma de suas arestas. Determine a área total do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo.

36. (ITA 2009) A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é $\sqrt{5}$. Exprima o volume da pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

37. (ITA 2009) Uma esfera está colocada no interior de um cone circular reto de altura 8 cm e ângulo de vértice 60°, de modo a tangenciar a superfície lateral. Os pontos de contato definem uma circunferência cujos pontos distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice. Determine o volume da parte do cone não ocupada pela esfera.

38. (ITA 2008) Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\,\pi$ cm^3 que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

39. (ITA 2007) Os quatro vértices de um tetraedro regular de volume $\frac{8}{3}$ cm^3 encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

40. (ITA 2007) Uma pirâmide regular de base hexagonal tem apótema da base igual a $\sqrt{3}$. Um plano paralelo à base a secciona, determinando um tronco de volume 1 e uma nova pirâmide. Sabendo que a razão entre as alturas da nova pirâmide e da pirâmide original é $\frac{1}{\sqrt{2}}$, determine a altura do tronco.

41. (ITA 2006) Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja menor diagonal mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais formam diedros de $60°$ com o plano da base. A área total dessa pirâmide, em cm^2, é

a) $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{81\sqrt{3}}{4}$ c) $27\sqrt{3}$ d) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ e) $81\sqrt{3}$

42. (ITA 2006) O raio da base, a altura e a geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2. Determine a área total do cone.

Parte I · resoluções

1. Seja $\vec{u}$ o versor da diagonal escolhida. A projeção ortogonal do cubo sobre um plano $\pi \perp \vec{u}$ é um polígono convexo cuja área pode ser obtida somando as áreas projetadas das faces *visíveis*: cada par de faces opostas contribui, com a face voltada para $\vec{u}$, com

$$a^2\,|\vec{n}_i \cdot \vec{u}|\,,$$

onde $\vec{n}_i$ é o versor normal à face. Com $\vec{u} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ e $\vec{n}_1 = (1,0,0)$, $\vec{n}_2 = (0,1,0)$, $\vec{n}_3 = (0,0,1)$,

$$S = a^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a^2\sqrt{3}.$$

Para $a = 2$,

$$\boxed{S = 4\sqrt{3}}.$$

A sombra é um **hexágono regular**: dos oito vértices, os dois extremos da diagonal projetam-se no centro e os seis restantes nos vértices do hexágono, de lado $a\sqrt{2/3}$ e área

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2a^2}{3} = a^2\sqrt{3}.$$

2. As vistas mostram dois blocos $3 \times 4 \times 5$: um deles ocupa $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 5$ e o outro $3 \le x \le 8$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 3$. A seção de S por qualquer plano $y = \text{const}$ é a mesma região em "L" do plano xz, de modo que

$$S = \mathcal{L} \times [0,4], \qquad \mathcal{L} = \big([0,3] \times [0,5]\big) \cup \big([3,8] \times [0,3]\big).$$

Um segmento de S com projeção $\overline{A'B'}$ em $\mathcal{L}$ e variação Δy mede $\sqrt{A'B'^2 + \Delta y^2}$, e $|\Delta y| \le 4$. Logo basta maximizar $A'B'$ em $\mathcal{L}$ com a condição de passar por um vértice e, depois, tomar $\Delta y = 4$.

A restrição é o degrau: para $x > 3$ vale $z \le 3$. Um segmento que parte do vértice $(0,5)$ e desce até $(x_1, 0)$ fica em $\mathcal{L}$ exatamente quando sua cota em $x = 3$ não passa de 3:

$$5 - \frac{5}{x_1} \cdot 3 \le 3 \iff \frac{15}{x_1} \ge 2 \iff x_1 \le \frac{15}{2},$$

e o maior deles é $(0,5) \to \left(\frac{15}{2}, 0\right)$, de comprimento

$$\sqrt{\left(\tfrac{15}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{325}{4}}.$$

Nenhum segmento de $\mathcal{L}$ é maior: um extremo em $z = 5$ obriga $x = 0$, e um extremo com $x = 8$ obriga $z \le 3$, o que dá no máximo $\sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} < \sqrt{325/4}$.

Levando $\Delta y = 4$ (de $y = 0$ a $y = 4$) e observando que $(0,5,0)$ é vértice de S:

$$AB_{\max} = \sqrt{\frac{325}{4} + 16} = \sqrt{\frac{389}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{389}}{2} \approx 9{,}86}.$$

3. Com $A_1 = \pi r^2$, $A_2 = 2\pi rh$ e $A_3 = \pi r^2 h$, a condição de progressão geométrica é $A_2^2 = A_1 A_3$:

$$4\pi^2 r^2 h^2 = \pi r^2 \cdot \pi r^2 h \implies 4h^2 = r^2 h \implies \boxed{h = \frac{r^2}{4}}.$$

A progressão é crescente quando $A_2 > A_1$:

$$2\pi rh > \pi r^2 \iff 2h > r \iff \frac{r^2}{2} > r \iff \boxed{r > 2},$$

e essa mesma desigualdade garante $A_3 > A_2$, pois $\frac{A_3}{A_2} = \frac{r}{2} > 1$. Portanto o raio pode ser qualquer número maior do que 2; em particular $r \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$ é um intervalo possível, enquanto nenhum valor $r \le 2$ serve.

4. Num cilindro equilátero a altura é igual ao diâmetro: $h = 2R$. A esfera de raio R que toca o fundo encosta também na borda superior e na superfície lateral, de modo que a água ocupa exatamente o que sobra:

$$V_{\text{água}} = \pi R^2 (2R) - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

De $\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2000\pi}{3}$ vem $R^3 = 1000$, isto é, $R = 10$ cm. Logo

$$A_\ell = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = \boxed{400\pi \text{ cm}^2}, \qquad V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \boxed{\frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3}.$$

5. Octaedro de aresta ℓ → cubo dos baricentros, de aresta $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{3}$; cubo de aresta b → octaedro dos centros das faces, de aresta $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. Compondo,

$$\ell_{i+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\ell_i \sqrt{2}}{3} = \frac{\ell_i}{3},$$

logo $\dfrac{\ell_{10}}{\ell_1} = \dfrac{1}{3^9} = \dfrac{1}{19\,683}$.

6. O apótema da base maior é

$$m_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Num plano perpendicular a uma aresta da base, o diedro de 75° aparece com cateto vertical igual à altura do tronco; logo a diferença dos apótemas é

$$m_1 - m_2 = \frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{2 + \sqrt{3}} = 2,$$

isto é, $m_2 = 2$ e o lado da base menor mede $\ell_2 = \dfrac{2m_2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. As áreas das bases são

$$B_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{64}{3} = 32\sqrt{3}, \qquad B_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16}{3} = 8\sqrt{3}, \qquad \sqrt{B_1 B_2} = 16\sqrt{3}.$$

Portanto

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right) = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} \cdot 56\sqrt{3} = \boxed{\frac{336 + 224\sqrt{3}}{3} \approx 241{,}3}.$$

7. Ponha V na origem e o cubo em $[0,\ell]^3$; o vértice oposto é (ℓ,ℓ,ℓ). Os seis pontos médios são

$$\left(\tfrac{\ell}{2},0,\ell\right),\ \left(\ell,0,\tfrac{\ell}{2}\right),\ \left(\ell,\tfrac{\ell}{2},0\right),\ \left(\tfrac{\ell}{2},\ell,0\right),\ \left(0,\ell,\tfrac{\ell}{2}\right),\ \left(0,\tfrac{\ell}{2},\ell\right),$$

todos no plano $x+y+z=\frac{3\ell}{2}$ — o plano diametral perpendicular à diagonal V–(ℓ,ℓ,ℓ). Formam um hexágono regular de centro no centro do cubo.

Por simetria, o centro da esfera circunscrita está na diagonal: $P=(s,s,s)$. Impondo $PV=PM$ com $M=\left(\frac{\ell}{2},0,\ell\right)$:

$$3s^2=\left(s-\tfrac{\ell}{2}\right)^2+s^2+(s-\ell)^2=3s^2-3s\ell+\frac{5\ell^2}{4},$$

donde $3s\ell=\frac{5\ell^2}{4}$ e $s=\frac{5\ell}{12}$. Logo

$$R=PV=s\sqrt{3}=\frac{5\ell\sqrt{3}}{12}\approx 0{,}722\,\ell.$$

8. Sejam $2a$ a aresta da base (logo a é o apótema da base), h a altura e $m=\sqrt{h^2+a^2}$ o apótema da pirâmide. Medindo as alturas a partir da base:

- o centro da esfera **inscrita** está a altura $\rho=\frac{ah}{a+m}$;
- o centro da esfera **circunscrita** está a altura $h-\varrho$, com $\varrho=\frac{r^2+h^2}{2h}$ e $r=a\sqrt{2}$ (raio do círculo circunscrito à base).

A coincidência dos centros dá $\rho=h-\varrho$, isto é,

$$\frac{ah}{a+m}=\frac{h^2-2a^2}{2h}\implies 2ah^2=(h^2-2a^2)(a+m).$$

Tomando $a=1$ e $u=m^2=h^2+1$ (donde $h^2=u-1$):

$$2(u-1)=(u-3)\left(1+\sqrt{u}\right)\implies u+1=(u-3)\sqrt{u}.$$

Elevando ao quadrado, $u^3-7u^2+7u-1=0$, que tem a raiz óbvia $u=1$ (espúria, pois daria $h=0$) e fatora-se em

$$(u-1)\left(u^2-6u+1\right)=0\implies u=3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

(a raiz $3-2\sqrt{2}<1$ também é impossível). Logo $m=a\left(1+\sqrt{2}\right)$ e $h^2=m^2-a^2=a^2\left(2+2\sqrt{2}\right)$. Então

$$\rho=\frac{ah}{a+m}=\frac{h}{2+\sqrt{2}},\qquad \varrho=\frac{2a^2+h^2}{2h}=\frac{a^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{h},$$

$$\frac{\varrho}{\rho}=\frac{a^2\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{h^2}=\frac{6+4\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}.$$

Como as áreas são proporcionais aos quadrados dos raios,

$$\frac{S_{\text{circ}}}{S_{\text{insc}}}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}\approx 5{,}83.$$

9. Sejam ℓ o lado do hexágono, $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ o apótema da base e h a altura da pirâmide. O diedro entre uma face lateral e a base tem tangente $\frac{h}{a}$, logo

$$h = a\,\mathrm{tg}\,75^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{\ell\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2},$$

pois $\mathrm{tg}\,75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

O centro da esfera circunscrita está no eixo, a uma cota z do plano da base. Os seis vértices da base distam ℓ do eixo, e o vértice da pirâmide está na cota h:

$$\ell^2 + z^2 = (h-z)^2 \implies z = \frac{h^2-\ell^2}{2h}.$$

Com $h^2 = \frac{\ell^2\left(21+12\sqrt{3}\right)}{4}$,

$$z = \frac{\ell\left(17+12\sqrt{3}\right)}{4\left(3+2\sqrt{3}\right)} = \frac{\ell\left(17+12\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}{12} = \frac{\ell\left(21-2\sqrt{3}\right)}{12},$$

e

$$R^2 = \ell^2 + z^2 = \ell^2\,\frac{144+\left(21-2\sqrt{3}\right)^2}{144} = \ell^2\,\frac{597-84\sqrt{3}}{144}.$$

Como $597-84\sqrt{3} = \left(14\sqrt{3}-3\right)^2$,

$$\boxed{R = \frac{\ell\left(14\sqrt{3}-3\right)}{12} \approx 1{,}771\,\ell}.$$

10. Sejam R o raio comum e H a altura do cilindro. De $\frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi R^2 H}{2}$ vem $H = \frac{2h}{3}$; de $\pi R g = 2\pi R H$ vem $g = \frac{4h}{3}$. Então $R^2 = g^2 - h^2 = \frac{7h^2}{9}$, $R = \frac{h\sqrt{7}}{3}$. A esfera inscrita é o círculo inscrito na seção meridiana (base $2R$, altura h):

$$r = \frac{Rh}{R+g} = \frac{h\sqrt{7}}{\sqrt{7}+4} = \frac{h\left(4\sqrt{7}-7\right)}{9}.$$

11. O tronco tem raios 9 e 5 e altura 4: $V_1 = \frac{4\pi}{3}(81+45+25) = \frac{604\pi}{3}$. A esfera dá $V_2 = \frac{500\pi}{3}$. Da PA, $V_3 = 2V_2 - V_1 = \frac{396\pi}{3} = 132\pi$. De $\pi r^2 \cdot 11 = 132\pi$ vem $r^2 = 12$, $r = 2\sqrt{3}$ cm. **[B]**

12. O raio do setor é a geratriz, $g = 10$, e o comprimento do arco é o da circunferência da base:

$$\frac{216}{360}\cdot 2\pi\cdot 10 = 2\pi r \implies 12\pi = 2\pi r \implies \boxed{r = 6},$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{100-36} = \boxed{8}.$$

13. [D] Quatro vértices alternados de um paralelepípedo formam um tetraedro que é o paralelepípedo menos quatro cantos, cada um com $\frac{1}{6}$ do volume. Logo $V = V_{\text{par}} - 4\cdot\frac{V_{\text{par}}}{6} = \frac{V_{\text{par}}}{3} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{3} = 20$ cm^3.

14. O círculo inscrito no quadrado de lado b tem raio $\frac{b}{2}$; de $\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{2}$ vem $b = 5\sqrt{2}$, cuja diagonal mede 10. Com a aresta lateral 13 e a meia-diagonal 5,

$$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Se um plano paralelo à base está a distância x do vértice, destaca uma pirâmide semelhante de volume $\left(\frac{x}{H}\right)^3 V$. Para que os três sólidos tenham volume $\frac{V}{3}$, os planos devem estar em

$$x_1 = H\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} = 4\sqrt[3]{9}, \qquad x_2 = H\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{18}.$$

As alturas dos três sólidos são, de cima para baixo,

$$\boxed{4\sqrt[3]{9} \approx 8{,}32}, \qquad \boxed{4\left(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{9}\right) \approx 2{,}16}, \qquad \boxed{12 - 4\sqrt[3]{18} \approx 1{,}52}.$$

15. Com $A = (0,0,0)$, $B = (2,0,0)$, $C = (2,2,0)$, $D = (0,2,0)$ e os vértices superiores obtidos somando $(0,0,2)$, os pontos médios pedidos são

$$L = (1,0,0), \qquad M = (2,2,1), \qquad N = (1,2,2).$$

Daí

$$\overrightarrow{LM} = (1,2,1), \qquad \overrightarrow{LN} = (0,2,2),$$
$$\overrightarrow{LM} \times \overrightarrow{LN} = (2,-2,2), \qquad \left\|\overrightarrow{LM} \times \overrightarrow{LN}\right\| = 2\sqrt{3}.$$

Logo

$$[LMN] = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

Os lados são $LM = \sqrt{6}$, $MN = \sqrt{2}$ e $LN = 2\sqrt{2}$; como $LM^2 + MN^2 = LN^2$, o triângulo é retângulo em M, e $[LMN] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

16. Ponha o vértice do cone em $(0,0,1)$ e a base no plano $z = 0$, com centro na origem; o raio da seção à cota z é $1 - z$.

O tetraedro tem um vértice na origem e a face oposta na cota z, inscrita na seção de raio $1 - z$. Se a é a aresta, o raio do círculo circunscrito à face é $\frac{a}{\sqrt{3}}$, logo

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = 1 - z.$$

Além disso a altura do tetraedro é $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ e vale z:

$$z = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = (1-z)\sqrt{3} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} = (1-z)\sqrt{2} \implies z = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Então $a = (1-z)\sqrt{3} = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3}$ e, como $\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = 5\sqrt{2} - 7$,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{3}\left(5\sqrt{2}-7\right)\sqrt{2}}{12} = \boxed{\frac{10\sqrt{3} - 7\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}0435}.$$

17. Seja α o semiângulo do cone. Uma esfera inscrita no cone, com centro sobre o eixo à distância z do vértice, tem raio $z\,\mathrm{sen}\,\alpha$ (a perpendicular do centro à geratriz). Logo

$$R = z_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad r = z_2 \,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

e, como S_1 e S_2 são tangentes exteriormente,

$$z_1 - z_2 = R + r \implies \frac{R-r}{\mathrm{sen}\,\alpha} = R + r \implies \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{R-r}{R+r}.$$

Então $\cos\alpha = \frac{\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}}{R+r} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$ e

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}.$$

A altura do cone é $H = z_1 + R = \frac{R(R+r)}{R-r} + R = \frac{2R^2}{R-r}$, e o raio da base

$$R_b = H\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2R^2}{R-r}\cdot\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}} = \frac{R^2}{\sqrt{Rr}} \implies R_b^2 = \frac{R^3}{r}.$$

Finalmente

$$V = \frac{\pi R_b^2 H}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{r}\cdot\frac{2R^2}{R-r} = \frac{2\pi R^5}{3r(R-r)},$$

como se queria demonstrar.

18. Antes da dobra, $AC = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, e os triângulos ABC e ACD são retângulos em B e em D. A dobra preserva todos os comprimentos dentro de cada triângulo, de modo que

$$AC = 5, \qquad AB = CD = 4, \qquad BC = AD = 3.$$

Falta a aresta nova $\overline{BD}$.

Ponha $\overline{AC}$ sobre o eixo Ox: $A = (0,0,0)$ e $C = (5,0,0)$. Em cada triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede $\frac{4\cdot3}{5} = \frac{12}{5}$ e os pés das alturas distam da origem $\frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{5}$ e $\frac{AD^2}{AC} = \frac{9}{5}$. Como o diedro ao longo de $\overline{AC}$ é reto, podemos tomar

$$B = \left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5},\ 0\right), \qquad D = \left(\frac{9}{5},\ 0,\ \frac{12}{5}\right).$$

Então

$$BD^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{49+144+144}{25} = \frac{337}{25},$$

$$\boxed{BD = \frac{\sqrt{337}}{5} \approx 3{,}67}.$$

As seis arestas são, portanto, 5, 4, 4, 3, 3 e $\frac{\sqrt{337}}{5}$.

19. Enquanto o líquido tem a forma de um cone, o volume é proporcional ao cubo da distância da superfície ao vértice. Dobrando o volume, essa distância fica multiplicada por $\sqrt[3]{2}$, passando de h a $h\sqrt[3]{2}$; a subida é

$$h\sqrt[3]{2} - h = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)h. \qquad \textbf{[C]}$$

20. A base é o círculo $(x-1)^2+(y-2)^2\le 1$, de centro $(1;2)$ e raio 1. A distância do centro à reta $y=x$ é $\frac{|2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\theta=90°$: a corda mede $\sqrt{2}$ e o arco, $\frac{\pi}{2}$. O segmento circular tem área $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. Somando as duas bases, a parte de superfície cilíndrica e o retângulo da seção:

$$A_t=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1=\pi-1+\sqrt{2}\ \text{cm}^2.$$

21. Um paralelepípedo retângulo fica determinado pelo *multiconjunto* de suas três dimensões. O número de multiconjuntos de tamanho 3 tomados de 10 valores é

$$\binom{10+3-1}{3}=\binom{12}{3}=220.$$

22. De $V=\frac{A_\text{b}h}{3}$ com $h=1$ vem $A_\text{b}=150\ \text{cm}^2$. As $n-2$ áreas formam uma PA de primeiro termo $\frac{3}{2}$, último 11 e soma 150:

$$\frac{(n-2)\left(\frac{3}{2}+11\right)}{2}=150\implies (n-2)\cdot\frac{25}{4}=150\implies n-2=24,$$

donde $n=26$. (A razão da PA é $\frac{11-3/2}{23}=\frac{19}{46}$.) **[C]**

23. Os seis centros estão a altura R, nos vértices de um hexágono regular de lado $2R$ — que, portanto, tem **raio** $2R$.

A sétima esfera tangencia externamente cada uma delas, logo o seu centro C dista $R+2R=3R$ de cada um dos seis centros; por simetria, C está no eixo vertical do hexágono. Se z é a altura de C acima do plano dos centros,

$$z^2+(2R)^2=(3R)^2\implies z=R\sqrt{5}.$$

A distância à superfície horizontal é

$$R+R\sqrt{5}=R\left(1+\sqrt{5}\right)\approx 3{,}24\,R.$$

(Conferência: $R(1+\sqrt{5})>2R$, de modo que a sétima esfera não toca o plano.)

24. O circuncentro de A, B, C é $(2;2{,}5)$ e $R=2{,}5$. Então $V=\pi\cdot 6{,}25\cdot 8=50\pi$ e $A_t=2\pi R^2+2\pi Rh=12{,}5\pi+40\pi=52{,}5\pi$, donde

$$\frac{V}{A_t}=\frac{50}{52{,}5}=\frac{100}{105}=\frac{20}{21}.$$ **[B]**

25. A pirâmide $ABCF$ tem base ABC (metade do retângulo) e altura $BF=AE$: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{AB\cdot AD}{2}\cdot AE=\frac{AB\cdot AD\cdot AE}{6}=10$, logo o produto vale 60. Numa PA de soma 12 o termo central é 4; de $(4-d)\cdot 4\cdot(4+d)=60$ vem $d=1$.

a) 3 cm, 4 cm e 5 cm. **b)** $V=60\ \text{cm}^3$ e $A_t=2(12+20+15)=94\ \text{cm}^2$.

26. Com $VA=x$, $VB=y$, $VC=z$: $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=17$ e $z^2+x^2=25$. Somando, $x^2+y^2+z^2=26$, donde $z^2=16$, $x^2=9$, $y^2=1$. Assim $x=3$, $y=1$, $z=4$ e $V=\frac{xyz}{6}=2\ \text{cm}^3$. **[A]**

27. Os vértices são $r\cap s=(3;2)$, $r\cap t=(0;1)$ e $s\cap t=(7;0)$. A área da base é 5 e os lados medem $\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$ e $5\sqrt{2}$.

a) $A_t=2\cdot 5+2\left(\sqrt{10}+2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)=10+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}+10\sqrt{2}\approx 39{,}41$ u.a. **b)** $V=5\cdot 2=10$ u.v.

28. $R = \sqrt{g^2 - h^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{9}$. Como o cubo tem volume $\frac{\pi}{243}$, a razão dos volumes é $\frac{1}{27}$, isto é, $k = \frac{1}{3}$: o cone pequeno tem altura $\frac{1}{3}$ e o plano dista $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ cm da base. **[D]**

29. A área do setor é $\frac{120}{360}\pi g^2 = 3\pi \Rightarrow g = 3$. Do arco, $2\pi R = \frac{2\pi g}{3} \Rightarrow R = 1$, logo $h = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Assim $A_{\text{t}} = \pi R(g + R) = 4\pi$ cm^2 e $V = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3. **[A]**

30. Na base hexagonal de aresta $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, o apótema vale

$$a = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \text{ cm}.$$

O apótema da pirâmide é $m = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$ cm. Na seção que contém o eixo e dois apótemas opostos, temos um triângulo isósceles de base $2a$ e lados m; o raio inscrito é

$$\rho = \frac{a\,h}{a + m} = \frac{5 \cdot 12}{5 + 13} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm}.$$

[B]

31. A aresta da cunha é um diâmetro de Ω, perpendicular a Σ; logo Σ corta Ω segundo um círculo cujo *centro* é o pé dessa aresta, de raio

$$\varrho = \sqrt{r^2 - 2^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Como os dois semiplanos que limitam a cunha passam pela aresta, eles cortam Σ segundo dois raios desse círculo, formando entre si o mesmo ângulo de $30°$. A interseção é portanto um **setor circular**:

$$S = \frac{30°}{360°}\,\pi\varrho^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 32 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

32. [A] $\overline{MN}$ é a perpendicular comum a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, logo $MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $MN \perp CD$. Como N é ponto médio de $\overline{CD}$, $ND = \dfrac{1}{2}$ e o triângulo MND é retângulo em N:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2.$$

33. A altura do tetraedro é $H = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$; o cilindro tem altura $\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{H}{3}$. A seção paralela à base a essa altura é um triângulo equilátero de lado $3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$, e o raio máximo é o seu raio inscrito, $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo $V = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ cm^3. **[D]**

34. **a)** Em cada ponto comum, os planos tangentes são perpendiculares; como cada raio é perpendicular ao respectivo plano tangente, os dois raios são perpendiculares entre si. Logo o triângulo formado pelos dois centros e um ponto da interseção é retângulo, e

$$d = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{4 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \frac{5}{2} \text{ cm}.$$

b) O sólido comum é formado por duas calotas. A distância do centro da primeira esfera ao plano da interseção é a altura relativa à hipotenusa do mesmo triângulo retângulo, isto é, o cateto ao quadrado sobre a hipotenusa:

$$x_1 = \frac{R_1^2}{d} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5}, \qquad x_2 = \frac{R_2^2}{d} = \frac{9/4}{5/2} = \frac{9}{10}.$$

As calotas têm alturas $h_1 = R_1 - x_1 = \frac{2}{5}$ e $h_2 = R_2 - x_2 = \frac{3}{5}$, e

$$S = 2\pi R_1 h_1 + 2\pi R_2 h_2 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} + 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8\pi}{5} + \frac{9\pi}{5} = \frac{17\pi}{5} \text{ cm}^2 \approx 10{,}68.$$

35. A aresta do cubo é

$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

Os centros das seis faces de um cubo de aresta a são os vértices de um **octaedro regular** cuja aresta é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos $\frac{a}{2}$, ou seja,

$$\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Como o octaedro tem 8 faces triangulares equiláteras,

$$S = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{12}}.$$

36. Seja ℓ o lado do octógono regular de apótema a; então $\ell = 2a\,\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ = 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$ e

$$B = \frac{8\ell\cdot a}{2} = 4\ell a = 8a^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Se m é o apótema de uma face lateral, $\mathcal{A}_\ell = \frac{8\ell}{2}m = 4\ell m$ e

$$\frac{\mathcal{A}_\ell}{B} = \frac{m}{a} = \sqrt{5} \implies m = a\sqrt{5},$$

$$H = \sqrt{m^2 - a^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

Portanto

$$V = \frac{1}{3}\,B\,H = \frac{1}{3}\cdot 8a^2\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 2a = \boxed{\frac{16\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}\,a^3}.$$

37. O ângulo de vértice 60° dá semiângulo 30°. Se T é um ponto de tangência, o triângulo VTO é retângulo em T com $VT = 2\sqrt{3}$ e $T\widehat{V}O = 30^\circ$, logo o raio da esfera é

$$\rho = VT\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\text{ cm}.$$

O raio da base do cone é $8\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, e

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot 8 = \frac{512\pi}{9}, \qquad V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = \frac{96\pi}{9}.$$

A esfera cabe no cone: seu centro está a 4 cm do vértice e a 4 cm da base. Portanto

$$V = \frac{512\pi - 96\pi}{9} = \boxed{\frac{416\pi}{9}\text{ cm}^3}.$$

38. Do volume, $\frac{4}{3}\pi\rho^3 = 4\sqrt{3}\,\pi \Rightarrow \rho^3 = 3\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \sqrt{3}$ cm.

A esfera tangencia as duas faces, logo o seu centro está no semiplano bissetor e o pé da perpendicular à aresta forma, com o centro, um ângulo de $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Sendo d a distância do centro à aresta,

$$\rho = d\,\mathrm{sen}\,60^\circ \implies \sqrt{3} = d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \implies d = 2\text{ cm}.$$

[E]

39. Do exercício 38, $V_{\text{tetra}} = \dfrac{b^3}{3} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow b = 2$, e o cubo tem volume 8. Cada uma das oito esferas de raio 1 contribui, dentro do cubo, com um oitavo de esfera (os três planos das faces no vértice são dois a dois perpendiculares), e como $1 = \frac{b}{2}$ elas apenas se tangenciam, sem invadir umas as outras. O volume ocupado é

$$8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

e o volume pedido é $\boxed{8 - \dfrac{4\pi}{3}}$ cm$^3 \approx 3{,}81$ cm^3.

40. Do apótema $\sqrt{3}$ sai o lado $\ell = 2$ e a área da base $B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 6\sqrt{3}$. Com H a altura da pirâmide original,

$$V = \frac{1}{3} 6\sqrt{3}\, H = 2\sqrt{3}\, H.$$

A pirâmide pequena é semelhante de razão $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e $k^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; logo

$$V_{\text{tronco}} = V\left(1 - k^3\right) = 2\sqrt{3}\, H \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 1 \implies H = \frac{2}{\sqrt{3}\left(4 - \sqrt{2}\right)}.$$

A altura do tronco é

$$H - kH = H\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{6}\left(4 - \sqrt{2}\right)} = \frac{\left(3\sqrt{2} - 2\right)}{7\sqrt{6}} = \boxed{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{21} \approx 0{,}131}.$$

41. A menor diagonal do hexágono é $L\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, logo $L = 3$ e $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Do diedro, $m = \frac{a}{\cos 60^\circ} = 3\sqrt{3}$. Então $A_\ell = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$ e $A_{\text{b}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 9 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, donde $A_{\text{t}} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm^2. **[A]**

42. Sejam r, $h = r + 2$ e $g = r + 4$. De $g^2 = r^2 + h^2$,

$$(r+4)^2 = r^2 + (r+2)^2 \implies r^2 - 4r - 12 = 0 \implies r = 6,$$

donde $h = 8$ e $g = 10$. Assim

$$\mathcal{A}_t = \pi r^2 + \pi r g = 36\pi + 60\pi = \boxed{96\pi}.$$

Parte II · IME

43. (IME) Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M' tais que o ângulo $M\hat{O}M' = 90^\circ$, sendo O um ponto fixo dado.

a) Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis porém fixo o ponto médio I de MM'?

b) Considere outro ponto fixo O' tal que também $M\hat{O}'M' = 90^\circ$. Sendo M fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

44. (IME) Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tomam-se pontos A, B, C, D de α e, por cada um deles, traçam-se retas ortogonais a β que o interceptam em A', B', C', D'. Sabendo que $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal AC é paralela a r, a razão entre as áreas de $A'B'C'D'$ e $ABCD$ é

a) 1 b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$

45. (IME) Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo e sobre ela fixa-se um ponto S. Por B passa-se um plano que intercepta SC em C' e é perpendicular a SC; esse plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

46. (IME) Dá-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semiespaço de π, sendo

i) $AB = \ell$;

ii) a e b as cotas de A e B em relação a π;

iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade de existência desse triângulo e o número de soluções.

47. (IME) No cubo $ABCD-EFGH$ a aresta mede ℓ. O ponto B_1, sobre a aresta $\overline{AB}$, é tal que $AB_1 = \frac{\ell}{3}$; o ponto D_1, sobre a aresta $\overline{AD}$, é tal que $AD_1 = \frac{\ell}{3}$; e o ponto H_1, sobre a aresta $\overline{GH}$, é tal que $GH_1 = \frac{\ell}{3}$. A área do triângulo $B_1D_1H_1$ é

a) $\dfrac{\ell^2}{9}$

b) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{18}$

c) $\dfrac{11\ell^2\sqrt{3}}{18}$

d) $\dfrac{\ell^2\sqrt{2}}{9}$

e) $\dfrac{\ell^2\sqrt{34}}{18}$

48. (IME) Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente sobre um plano, gerando um triângulo isósceles cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é

a) $2\sqrt{3}-3$ b) $4-2\sqrt{3}$ c) $2-\sqrt{3}$ d) $1-\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

49. (IME) Considere as afirmações abaixo:

I. se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II. se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III. se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam seis planos;

IV. duas retas não paralelas determinam um plano;

V. se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações,

a) apenas uma é verdadeira. b) apenas duas são verdadeiras. c) apenas três são verdadeiras. d) apenas quatro são verdadeiras. e) todas são verdadeiras.

50. (IME) Sejam r e r' duas retas ortogonais e não coplanares. Tomam-se sobre r dois pontos fixos A e B, e sobre r' dois pontos variáveis M e M', de modo que a projeção de M' sobre o plano do triângulo MAB seja o ortocentro H desse triângulo. Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMM'$.

51. (IME) Seja c um círculo de raio r, cujo plano é paralelo a um plano π e dele dista h, e seja I o traço em π do eixo de c. Seja ainda P um ponto fixo de π com $\overline{IP} = h$. Liga-se P a um ponto M que percorre toda a circunferência de c e considera-se o plano variável σ, normal a π, que contém sempre $\overline{PM}$. Na interseção de σ com π existem dois pontos que distam $h\sqrt{3}$ de M; seja A aquele cuja distância a P é a maior. Determine (a) o lugar geométrico de A e (b) o valor máximo de $\overline{IA}$.

52. (IME) São dados um cone de revolução de vértice S, cuja base circular está num plano π, e um ponto P exterior ao cone e não pertencente a π. Determine, pelo ponto P, os planos tangentes ao cone.

53. (IME) Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

54. (IME) Em cada uma das seis faces de um cubo constrói-se uma circunferência e em cada circunferência marcam-se n pontos. Supondo que quatro pontos que não pertençam a uma mesma face nunca sejam coplanares, determine quantas retas e quantos triângulos, não contidos nas faces do cubo, ficam determinados por esses pontos.

55. (IME) Nas condições da questão anterior, determine ainda quantos tetraedros ficam determinados (a) com três vértices numa mesma face do cubo e (b) com os quatro vértices em faces diferentes.

56. (IME) Secciona-se um cubo de aresta a pelos planos que passam pelos pontos médios das três arestas concorrentes em cada vértice. Retiradas as oito pirâmides assim destacadas, calcule, para o sólido que resta, a soma dos comprimentos das arestas, a área total e o volume.

57. (IME) O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é

a) $\frac{V}{2}$ b) $\frac{V}{3}$ c) $\frac{V}{4}$ d) $\frac{V}{6}$ e) $\frac{V}{8}$

58. (IME) Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos primos entre si, o valor de $m+n$ é

a) 20 b) 24 c) 28 d) 30 e) 32

59. (IME) Um plano corta um cubo de aresta 1 passando pelos pontos médios das três arestas que concorrem num vértice, formando uma pirâmide. O processo é repetido para os oito vértices, e as pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro. Calcule a área da superfície externa desse octaedro.

60. (IME) Considere um tetraedro regular de aresta a e a esfera tangente a todas as suas arestas. Calcule, em função de a, o volume total dessa esfera.

61. (IME) Dado um icosaedro regular de aresta a, calcule (a) o seu ângulo diedro e (b) o volume do poliedro formado por um vértice V e pelos vértices adjacentes a V.

62. (IME) Um tetraedro regular de aresta d é cortado por dois planos paralelos entre si e a uma das faces, dividindo-o em três sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um desses três sólidos em função de d.

63. (IME) Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e o octaedro inscrito nele, com os vértices nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção desse octaedro produzida pelo plano paralelo à face BCD e distante dela um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{192}$
b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{96}$
c) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{32}$
d) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{64}$
e) $\frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$

64. (IME) Seja um cubo cujos centros das faces são os vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces desse octaedro são os vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos, indefinidamente, determine a razão entre a soma dos volumes de todos os poliedros inscritos e o volume do cubo inicial.

65. (IME) Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a e a esfera nele inscrita. Por cada vértice traça-se o plano paralelo à face oposta e tangente a essa esfera; o plano traçado por A, paralelo à face BCD, recorta em $ABCD$ um novo tetraedro de vértice A, e o mesmo se faz com B, C e D. Em cada novo tetraedro inscreve-se uma esfera e o processo se repete indefinidamente. Calcule, em função de a, o volume ocupado por todas as esferas interiores ao tetraedro $ABCD$.

66. (IME) $ABCDEF$ é um octaedro regular de aresta a, cujas diagonais são $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$. Sejam M sobre $\overline{AF}$ com $FM = \frac{a}{3}$, N sobre $\overline{AD}$ com $DN = \frac{a}{3}$ e P sobre $\overline{DB}$ com $DP = \frac{a}{3}$. O ângulo $M\hat{N}P$ é

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{2\pi}{3}$
e) $\frac{3\pi}{4}$

67. (IME) Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a e O o baricentro da face ABC. Efetua-se no tetraedro a translação de vetor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$, obtendo-se um novo tetraedro $A'B'C'D'$. Determine (a) o volume da esfera inscrita no sólido comum aos dois tetraedros e (b) o volume da esfera a ele circunscrita.

68. (IME) Uma pirâmide de vértice V e base $ABCD$ é a metade de um octaedro regular de aresta a.

a) Determine, em função de a, os raios das esferas *medial* (a que passa pelos pontos médios das arestas), circunscrita e inscrita.

b) Marcam-se sobre $\overline{VA}$ e $\overline{VB}$ os pontos A' e B' com $VA' = VB' = x$, e sobre $\overline{VC}$ e $\overline{VD}$ os pontos C' e D' com $VC' = VD' = y$, sujeitos a $x + y = a$. Determine x e y para que a área do quadrilátero $A'B'C'D'$ seja igual a $\frac{a^2}{4}$.

69. (IME) Escolhem-se ao acaso três vértices de um dodecaedro regular. Calcule a probabilidade de os três pertencerem a uma mesma face.

70. (IME) Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm b) $\sqrt{19}$ cm c) $\sqrt{21}$ cm d) $2\sqrt{7}$ cm e) $\sqrt{29}$ cm

71. (IME) Um paralelepípedo oblíquo $ABCDEFGH$ possui todas as arestas com comprimento a. O plano que contém $ABFE$ forma um ângulo de 60° com o plano que contém $ABCD$. O ângulo do vértice E da face $ABFE$ é 120°. Se θ for o ângulo do vértice E do paralelogramo contido na base superior $EFGH$, determine o volume do paralelepípedo em função da aresta a e do ângulo θ.

72. (IME) A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo $A\hat{C}B$ e β é o ângulo $D\hat{C}A$, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

73. (IME) Prove que o volume de um prisma triangular é igual ao semiproduto da área de uma face lateral pela distância dessa face à aresta lateral oposta.

74. (IME) Um cubo de diagonal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular a $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo: **a)** o apótema dessa seção hexagonal; **b)** o raio da esfera tangente à seção e às três faces do cubo que contêm o vértice A.

75. (IME) Num cubo de aresta a, os pontos M, N e L pertencem às três arestas que partem do vértice A e distam x desse vértice. Para que o plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é

a) $\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ b) $\frac{a}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ c) $\frac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ d) $\frac{a}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)$ e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

76. (IME) São dados dois quadrados de lado a situados em planos paralelos distantes d um do outro; a reta que liga os seus centros é perpendicular aos dois planos e cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro. Ligando-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro, obtém-se um sólido. Qual deve ser d para que os triângulos assim formados sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$
b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$
d) $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$
e) $\frac{a\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}$

77. (IME) Num prisma oblíquo $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$, a base $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado a, a face lateral $EFF'E'$ está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta $\overline{F'E'}$ sobre a base coincide com a aresta $\overline{BC}$. O volume do prisma é

a) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{9a^3}{4}$ c) $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{9a^3}{2}$ e) $\frac{5a^3}{2}$

78. (IME) Seja $ABCD-A'B'C'D'$ um prisma reto de base retangular. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal $\overline{AC}$, obtendo-se o ponto P; em seguida projeta-se P na face oposta, obtendo-se N. Sabendo que $\left|\overline{NA}^2-\overline{NC}^2\right|=k$, determine o comprimento da menor aresta da base.

79. (IME) Seja um cubo de base $ABCD$ e aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal tirada de A, marca-se um ponto V, formando-se a pirâmide $VABCD$. Determine os possíveis valores da altura dessa pirâmide, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das quatro arestas laterais vale ka^2, com k primo.

80. (IME) Uma piscina de base retangular tem 5 m por 6 m de base e 3 m de altura, e dois terços do seu volume estão ocupados por água. Na superfície da água forma-se uma pequena bolha de ar, equidistante das duas paredes cuja base mede 5 m; em relação às paredes de base 6 m, a sua distância a uma delas é o dobro da distância à outra. Estabeleça um sistema de coordenadas retangulares com origem num dos cantos interiores da piscina e com um dos planos coordenados sobre a parede de base 6 m mais próxima da bolha, e determine nesse sistema as coordenadas da bolha.

81. (IME) Num cubo de bases $ABCD$ e $EFGH$ e arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$, todas iguais a 3, marcam-se M sobre $\overline{AD}$ com $AM=2$, N sobre $\overline{AB}$ com $AN=2$ e P sobre $\overline{BF}$ com $BP=0{,}5$. Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

82. (IME) Seis esferas idênticas de raio R estão dispostas de modo que cada uma tangencia exatamente quatro das outras. Determine a aresta do cubo que tangencia todas as seis.

83. (IME) Num plano π toma-se um retângulo $ABCD$ de dimensões $AB = 2a$ e $AD = a$, e considera-se a superfície prismática cujas arestas são as retas perpendiculares a π por A, B, C e D. Sobre a aresta traçada por C marca-se C' com $CC' = b$, e secciona-se a superfície por um plano que passa por A e C'.

a) Mostre que é possível obter para seção um losango $AB'C'D'$, com B' e D' nas arestas que passam por B e por D.

b) Determine, em função de a e b, a condição necessária e suficiente para que esse losango fique num mesmo semiespaço em relação a π.

c) Calcule o volume do tronco de prisma $ABCD - AB'C'D'$.

84. (IME) Seja um paralelepípedo retorretângulo de bases $ABCD$ e $A'B'C'D'$, com $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = h$, $AB = a$ e $AD = b$. Por $\overline{DD'}$ consideram-se dois planos, $DD'MM'$ e $DD'NN'$, com M em $\overline{AB}$ e N em $\overline{BC}$.

a) Determine $AM = x$ e $CN = y$ para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em três partes de mesmo volume.

b) Nessas condições, calcule a razão entre os volumes dos sólidos $MBNM'B'N'$ e $MDNM'D'N'$.

c) Encontre a relação entre a e b que torna reto o diedro de aresta $\overline{MM'}$ cujas faces passam por $\overline{DD'}$ e $\overline{NN'}$.

85. (IME) Sejam k e k' os círculos das bases de um cilindro de raio R e altura h, e O o seu centro. No círculo k inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A' de k' projeta-se paralelamente ao eixo num ponto D do arco BC que não contém A. Determine a posição de A' que torna máxima a área do triângulo $A'BC$ e, nessa posição, calcule a distância de O ao plano $A'BC$.

86. (IME) Num plano π toma-se um hexágono regular de lado ℓ e, num plano π' paralelo a π, um triângulo equilátero de lado ℓ, em posição tal que cada altura do triângulo é paralela a uma diagonal maior do hexágono. Os baricentros das duas figuras estão sobre a mesma perpendicular comum aos dois planos, e a distância entre π e π' é ℓ. Calcule, em função de ℓ, o volume do sólido que se obtém ligando cada vértice do triângulo aos três vértices mais próximos do hexágono.

87. (IME) Num cubo de aresta a, sejam $ABCD$ uma face e P, Q pontos sobre as duas faces adjacentes a ela pelas arestas $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, o menor caminho de P a Q, cruzando $\overline{BC}$ em M e $\overline{CD}$ em N. Sabendo que P, Q, M e N são coplanares,

a) demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$;

b) calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M, em função de a e de $b = \overline{BM}$.

88. (IME) Um paralelepípedo tem base $ABCD$ sobre um plano horizontal e arestas verticais $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$; as três arestas concorrentes $AB = a$, $AD = b$ e $AA' = c$ formam um triedro trirretângulo, com $a > b > c$. Um plano secante corta $\overline{AB}$ no seu ponto médio M, a aresta $\overline{BB'}$ em N com $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$, e a aresta $\overline{B'C'}$ em P com $B'P = p$, $0 < p \leq b$. Estude a forma das seções obtidas pelo plano MNP quando p varia.

89. (IME) Um copo exótico de vidro é uma pirâmide invertida de base pentagonal regular, com 9 cm de altura. Esse copo contém uma bebida que ocupa 8 cm de altura. Um convidado fecha a base pentagonal e inverte o copo. Determine a nova altura h da bebida, em centímetros, medida a partir da base pentagonal.

90. (IME) Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura h. Uma esfera de raio R está inscrita nessa pirâmide. O volume dessa pirâmide é

a) $\dfrac{2\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h-2R)}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h+2R)}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h+2R)}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h-2R)}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h-R)}$

91. (IME) Uma pirâmide regular tem como base um dodecágono de aresta a. As faces laterais fazem um ângulo de $15°$ com o plano da base. Determine o volume dessa pirâmide em função de a.

92. (IME) A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base e que as outras duas formam ângulos de $30°$ e $60°$ com a base. O volume da pirâmide é

a) $\dfrac{S\sqrt{S}}{3}$ b) $\dfrac{S\sqrt{S}}{6}$ c) $\dfrac{2S\sqrt{S}}{3}$ d) $\dfrac{2S\sqrt{S}}{5}$ e) $\dfrac{2S^2}{3}$

93. (IME) Numa pirâmide de base quadrada, as quatro arestas laterais são congruentes à aresta da base. Determine a tangente do ângulo diedro entre uma face lateral e a base, e o ângulo entre duas faces laterais opostas.

94. (IME) Considere uma pirâmide triangular regular reta de altura h. Uma esfera de raio r contém os ortocentros das faces laterais da pirâmide e o vértice do qual foi traçada a altura. Calcule o volume da pirâmide em função de r e h.

95. (IME) Seja um tetraedro de vértices A, B, C e D. São dados os ângulos

$$A\hat{D}B = \frac{\pi}{3}, \qquad C\hat{D}B = A\hat{D}C = \frac{\pi}{2},$$

e os comprimentos das arestas, em centímetros, $CD = 3$ e $AD = BD = 4$. A distância, em centímetros, do ponto D ao plano ABC é

a) $\dfrac{6}{7}\sqrt{7}$ b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 4 e) 5

96. (IME) Sejam P_1 um tetraedro regular e P_2 um prisma triangular reto. Ambos os poliedros possuem uma base comum, e a razão entre as áreas totais de P_2 e P_1 é 2. Determine a razão entre os volumes de P_2 e P_1.

97. (IME) Seja o cone de revolução de raio de base R e altura $\frac{3R}{2}$, com a base apoiada num solo horizontal. Um ponto luminoso está localizado a uma altura $3R$ do solo e distante, horizontalmente, $2R$ do centro da base do cone. A área S da região iluminada no cone é

a) $\pi R^2\sqrt{13}$ b) $2\pi R^2\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ c) $\pi R^2\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ d) $\pi R^2\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ e) $\dfrac{13}{4}\pi R^2$

98. (IME) Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e o ponto Q, médio de $\overline{AB}$. O ponto P, sobre a aresta $\overline{AB}$, entre Q e A, é projetado nas arestas $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ sobre os pontos M e M', respectivamente, e também nas arestas $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ sobre os pontos N e N', respectivamente. O plano $MM'NN'$ divide o tetraedro em dois sólidos cujos volumes estão na razão de 1 para 4. Determine QP em função de a.

99. (IME) Num tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são iguais e a aresta $\overline{AD}$ é ortogonal a $\overline{BC}$. A área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ACD, e o ângulo $M\widehat{A}D$ é igual ao ângulo $M\widehat{D}A$, em que M é o ponto médio de $\overline{BC}$. Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2, sabendo que $BC = 2$ cm e que o ângulo $B\widehat{A}C$ mede $30°$.

a) $2-\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$ d) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$ e) 4

100. (IME) Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}$ cm^2 e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) 50 cm^3 b) $42\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm^3 c) $43\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm^3 d) $43\sqrt{2}$ cm^3 e) $42\sqrt{3}$ cm^3

101. (IME) Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r, com diedro de $\frac{\pi}{6}$. Tomam-se A, B, C, D em α e, por cada um deles, traçam-se retas ortogonais a α, que interceptam β em A', B', C', D'. Sabendo que $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal $\overline{AC}$ é paralela a r, a razão entre as áreas de $ABCD$ e de $A'B'C'D'$ é

a) 1 b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$

102. (IME) Num tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são iguais, a aresta $\overline{AD}$ é ortogonal a $\overline{BC}$, as áreas de ABC e de ACD são iguais e $M\widehat{A}D = M\widehat{D}A$, onde M é o ponto médio de $\overline{BC}$. Calcule a área total do tetraedro sabendo que $BC = 2$ e $B\widehat{A}C = 30°$.

a) $2-\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$ d) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$ e) 4

103. (IME) Um cone está inscrito num cubo $ABCDEFGH$ de aresta a, de modo que a sua base é o círculo inscrito em $ABCD$ e o seu vértice é o centro da face oposta. A projeção do vértice H sobre a base $ABCD$ coincide com D. Determine, em função de a, a área da seção do cone pelo plano ABH.

104. (IME) Seja $SABCD$ uma pirâmide cuja base é o quadrilátero convexo $ABCD$ e cuja aresta $\overline{SD}$ é a altura. Sabe-se que $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ e $SA + SB = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$

105. (IME) Considere um tetraedro regular $ABCD$ e um plano π, oblíquo à face ABC, que secciona as arestas $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$ nos pontos E, F e G. Seja T a interseção com π da altura do tetraedro correspondente ao vértice D. Determine $\overline{DT}$ sabendo que

$$\frac{1}{\overline{DE}} + \frac{1}{\overline{DF}} + \frac{1}{\overline{DG}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

106. (IME) Uma pirâmide regular triangular tem volume V e ângulo de $30°$ no vértice. Determine, em função de V, o raio da circunferência circunscrita a uma das suas faces laterais.

107. (IME) A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular $SABCD$ é o dobro da área da sua base. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas $\overline{AQ}$ e $\overline{DP}$. Calcule o ângulo entre essas duas medianas.

108. (IME) Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a. Um plano perpendicular à base, contendo os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes desses dois poliedros.

109. (IME) Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular $ABCD$, com lado da base ℓ e aresta lateral $\ell\sqrt{2}$. Corta-se essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta $\overleftrightarrow{BD}$ e contém o ponto médio da aresta $\overline{VC}$. Calcule a área da seção determinada.

110. (IME) Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum, e o vértice do cone encontra-se no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e a sua geratriz, sabendo que a razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é $\frac{7}{4}$.

111. (IME) As arestas laterais de uma pirâmide regular com n faces laterais medem ℓ. Determine (a) o raio do círculo circunscrito à base, em função de ℓ, que torna máximo o produto do volume da pirâmide pela sua altura, e (b) o valor desse produto máximo, em função de ℓ e n.

112. (IME) Uma esfera está inscrita num cone de revolução, tangente à sua base. Um cilindro está circunscrito a essa esfera, com uma das bases apoiada na base do cone. Sendo V_1 o volume do cone e V_2 o do cilindro, encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.

113. (IME) Num tetraedro $ABCD$, a aresta $\overline{CD}$ é perpendicular ao plano ABC e mede $10\sqrt{3}$. Sabendo que $A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60°$ e $B\hat{D}C = 30°$, calcule o volume do tetraedro.

114. (IME) Dois círculos de raios R e r são, ao mesmo tempo, as bases de um tronco de cone e as bases de dois cones opostos pelo vértice, de mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos, e seja $m = \frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

115. (IME) São dadas duas esferas de raios R e r, tangentes exteriormente, e um cone circunscrito a ambas. Calcule a área da superfície lateral do tronco de cone que tem por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

116. (IME) Num cone equilátero estão inscritas duas esferas, de raios $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R. Traça-se um plano secante ao cone, tangente às duas esferas. Determine, em termos de R, o maior segmento possível que une dois pontos da curva de interseção desse plano com o cone.

117. (IME) São dados um cone reto de base circular, de vértice V, altura h e raio da base r, e um triângulo equilátero ABC circunscrito à base do cone.

a) Determine a relação entre h e r para que o tetraedro $VABC$ seja regular.

b) Satisfeita essa condição, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano da sua base e pelos dois planos tangentes ao cone que passam pela aresta $\overline{VA}$.

118. (IME) São dados um segmento fixo $\overline{OA}$ de comprimento a e uma semirreta variável Ox, com $A\hat{O}x = \alpha$ agudo, ambos num plano fixo π. Na perpendicular a π por A marca-se B com $\overline{AB} = a$, e seja C o pé da perpendicular baixada de B sobre Ox.

a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro $OABC$?

b) Calcule as seis arestas em função de a e α.

c) Calcule o volume v do tetraedro em função de a e α.

d) Determine α de modo que $v = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).

e) Calcule o volume comum aos dois sólidos obtidos no item anterior.

119. (IME) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles com $AB = AC = a$, e sejam $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semiespaço. Calcule (a) a área total e (b) o volume da pirâmide de vértice A e base $BCC'B'$; (c) mostre que A, B, C, C' e B' pertencem a uma mesma esfera e (d) determine o seu centro e o seu raio.

120. (IME) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base ℓ e altura h, mostre que existem exatamente duas esferas tangentes aos planos de todas as suas faces, calcule os seus raios e mostre que o produto deles não depende de h.

121. (IME) Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

122. (IME) Num plano π dão-se uma circunferência de centro O e raio r, um ponto fixo A sobre ela e um diâmetro variável $\overline{BC}$ tal que $A\widehat{B}C = \theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Sobre a perpendicular a π em A marca-se V com $\overline{AV} = 2r$, formando o tetraedro $ABCV$.

a) Calcule as arestas do tetraedro em função de r e θ.

b) Mostre que a soma dos seus quadrados é constante.

c) Qual o lugar geométrico do pé H da altura $\overline{VH}$ do triângulo VBC?

d) Para que posição de $\overline{BC}$ a área de VBC é máxima, e quanto vale esse máximo?

e) Calcule, em função de θ, a tangente do ângulo $\alpha = V\widehat{H}A$.

f) Deduza o valor de θ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta $\overline{BC}$.

g) Calcule θ para que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

123. (IME) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base ℓ e altura h, determine a posição do centro da esfera tangente às doze arestas da pirâmide.

124. (IME) Dada uma elipse de eixo focal $2a$ e excentricidade $\sqrt{\frac{2}{3}}$, sabe-se que ela é seção de um cone de revolução e que o plano da elipse forma $45°$ com o eixo do cone. Determine, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

125. (IME) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base b e altura $\frac{3}{2}b$, traça-se o plano perpendicular à aresta $\overline{VB}$ no ponto M, de modo que esse plano contenha os vértices A e C. Para a pirâmide de vértice M e base ABC assim formada, determine (a) o comprimento de $\overline{AM}$ e (b) o volume.

126. (IME) São dados um cone de revolução de vértice V, cuja geratriz faz com o eixo um ângulo β, e uma elipse de semieixos a e b.

a) Mostre que essa elipse pode sempre ser obtida como seção plana do cone dado.

b) Sendo $\overline{AB}$ o traço do plano secante com o plano meridiano AVB, que lhe é perpendicular, demonstre que $\overline{VA} \cdot \overline{VB} = b^2 \operatorname{cosec}^2 \beta$.

127. (IME) São dadas duas superfícies cônicas de revolução congruentes, de eixos paralelos. Seccionam-se as duas por dois planos π e π' perpendiculares ao eixo, passando cada um pelo vértice de uma delas, e designam-se por c e c' os cones resultantes situados entre π e π'; seja h a distância entre esses planos. Corta-se o conjunto por um terceiro plano δ, paralelo aos dois, a uma distância variável x de π.

a) Mostre que a soma dos perímetros das seções k e k' é constante.

b) Determine x para que a soma das áreas de k e k' seja igual ao produto de um número real m pela área da base de um dos cones, e diga entre que valores m pode variar.

128. (IME) Calcule os eixos e a excentricidade da cônica determinada por um plano π num cone de revolução Γ de vértice V, sabendo que (I) a excentricidade dessa seção é a maior possível para Γ; (II) V dista 6 de π; e (III) a seção de Γ por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

129. (IME) A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

130. (IME) Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento a e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a, calcule:

a) o volume total da esfera;

b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

131. (IME) Considere uma esfera de raio R e centro O. Determine a figura geométrica a que pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedros cujas três arestas tangenciam essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de $60°$.

132. (IME) Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito numa esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa mesma esfera.

133. (IME) Considere um semicírculo de diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Por A traça-se uma reta que forma $30°$ com $\overline{AB}$ e corta o semicírculo em C; por C traça-se a tangente ao semicírculo, que intercepta a reta AB em D. Fazendo-se uma rotação em torno da reta AB, o semicírculo gera uma esfera E e o triângulo ACD gera um sólido S.

a) Calcule o volume de S em função de R.

b) Seja M sobre a reta AB com $\overline{AM} = \frac{R}{3}$. O plano π por M, perpendicular a AB, secciona E e S; calcule a razão entre as áreas dessas duas seções.

134. (IME) Dão-se um plano π, um de seus pontos O e a vertical $\overleftrightarrow{OV}$ em O. A cada ponto P de π faz-se corresponder o ponto P_1 da vertical por P tal que $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{OP}} = k$ (constante). Com essa correspondência, π transforma-se numa superfície S.

a) Deduza a natureza de S, as suas seções por planos que contêm $\overleftrightarrow{OV}$ e por planos perpendiculares a $\overleftrightarrow{OV}$, e identifique o plano tangente a S num ponto P_1 qualquer.

b) De um ponto Q de $\overleftrightarrow{OV}$ com $\overline{OQ} = h$ baixa-se a perpendicular sobre a reta $\overleftrightarrow{OP_1}$, de pé N, e considera-se a esfera E de centro Q e raio $\overline{QN}$. Determine a curva comum a E e S e calcule o volume compreendido entre as duas superfícies.

135. (IME) Num plano π dá-se uma circunferência c de centro O e raio r. Por um ponto A de c levanta-se a perpendicular a π e marca-se $\overline{AV} = x$, com V acima de π. Seja $\overline{BD}$ um diâmetro variável de c.

a) Mostre que, no tetraedro $VABD$, as três retas que ligam os pontos médios de arestas opostas concorrem num ponto, e que esse ponto permanece fixo quando $\overline{BD}$ gira em torno de O.

b) Mostre que as arestas opostas de $VABD$ são perpendiculares duas a duas.

c) Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD.

d) Determine o centro e o raio da esfera circunscrita a $VABD$, em função de r e x.

136. (IME) Uma esfera ε de raio r e centro O tangencia um plano π em M. Sobre a reta $\overleftrightarrow{OM}$, no semiespaço de π que contém ε, marca-se um ponto V com $\overline{VO} = x > r$, e de V traçam-se três retas que tangenciam a esfera em A, B e C, com $A\widehat{V}B = B\widehat{V}C = C\widehat{V}A = \frac{\pi}{2}$. Calcule x em função de r e determine, também em função de r, o raio da base e a altura da calota que o plano VAB secciona na esfera.

137. (IME) Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 e r uma reta situada no seu plano, distante 3 do seu baricentro. A área da superfície gerada pela rotação desse triângulo em torno de r é

a) 8π b) 9π c) 12π d) 16π e) 36π

138. (IME) Sejam C e C^* dois círculos tangentes exteriores, de raios r e r^* e centros O e O^*, e seja t uma tangente comum a C e a C^* nos pontos A e A^*, não coincidentes. Considere o sólido de revolução gerado pela rotação do segmento $\overline{AA^*}$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{OO^*}$ e determine a sua área lateral S em função de r e r^*.

139. (IME) Seja C um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{PQ} = 2r$. Sobre $\overline{OP}$ toma-se N com $\overline{ON} = x$, $0 \le x \le r$. Por N traça-se a perpendicular a $\overline{PQ}$, que encontra o semicírculo em M, e a tangente ao semicírculo em M corta a reta PQ em T. Calcule, em função de r e x, (a) o volume V_1 gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de $\overline{PQ}$ e (b) o volume V_2 gerado pela rotação do triângulo MPT em torno da mesma reta.

140. (IME) Um triângulo equilátero ABC de lado a gira em torno de um eixo $\overleftrightarrow{XX'}$ do seu plano, que passa por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada e $\Theta = X\hat{A}B$, determine os valores de Θ para que (a) S seja máximo, (b) S seja mínimo e (c) $S = 3\pi a^2$, descrevendo o sólido obtido em cada caso.

141. (IME) São dadas duas retas reversas e ortogonais r e s, e a sua perpendicular comum t, que corta r em I e s em K. Um segmento $\overline{AB}$ de comprimento constante move-se apoiando as extremidades A em r e B em s; unindo A a K e I a B forma-se o tetraedro variável $ABIK$. Demonstre que a soma dos quadrados das suas arestas é constante e calcule o raio da esfera circunscrita em função de $\overline{AB}$.

Parte II · resoluções

43. **a)** Com I fixo e $M\hat{O}M' = 90°$, o ponto O "vê" $\overline{MM'}$ sob ângulo reto, logo IO é a mediana relativa à hipotenusa: $IO = IM = IM'$. Portanto M' descreve a **superfície esférica de centro I e raio IO**, excetuados O e o ponto diametralmente oposto (que dariam triângulo degenerado).

b) Com M fixo, $M\hat{O}M' = 90°$ obriga M' ao plano α que passa por O e é perpendicular a MO; analogamente $M\hat{O}'M' = 90°$ o obriga ao plano β que passa por O' e é perpendicular a MO'. O lugar é a **reta** $\alpha \cap \beta$.

44. **[C]** $A'B'C'D'$ é a projeção ortogonal de $ABCD$ sobre β, e o ângulo entre os planos é $\pi/6$. Logo

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(A diagonal $AC \parallel r$ garante que a figura se projeta sem "dobras": a razão vale para a área toda.)

45. Como $BS \perp$ plano ABC e $AC \perp AB$, o teorema das três perpendiculares dá $AC \perp SA$, ou seja, $S\hat{A}C = 90°$. Da semelhança $\triangle SC'A' \sim \triangle SAC$ (ângulo comum em S; o plano por B é perpendicular a SC, logo o ângulo reto do triângulo menor está em C') vem

$$SC' \cdot SC = SA' \cdot SA = SB^2.$$

Da segunda igualdade, BA' é a altura relativa à hipotenusa no triângulo retângulo SBA, logo $BA' \perp SA$; como também $BA' \perp AC$, conclui-se $BA' \perp$ plano SAC e portanto $B\hat{A}'C = 90°$. Assim os ângulos $B\hat{A}C$, $B\hat{A}'C$ e $B\hat{C}'C$ são todos retos: os cinco pontos A, B, C, A' e C' estão na **esfera de diâmetro** $\overline{BC}$.

46. Sejam A' e B' as projeções ortogonais de A e B sobre π e M' o ponto médio de $\overline{A'B'}$. Com $C \in \pi$, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em C quando $CA = CB$ e $CA^2 + CB^2 = \ell^2$, ou seja $CA = CB = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$. Escrevendo $CA^2 = CA'^2 + a^2$ e $CB^2 = CB'^2 + b^2$:

$$CA'^2 + CB'^2 = \ell^2 - (a^2 + b^2), \qquad CA'^2 - CB'^2 = b^2 - a^2.$$

A primeira condição situa C numa **circunferência de centro** M' e raio $\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - (a+b)^2}$; a segunda, numa **reta perpendicular a** $A'B'$ distante $\dfrac{b^2 - a^2}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}}$ de M'. O ponto C é a interseção desses dois lugares.

Discussão. A condição geral de existência é $\ell > a+b$. Comparando a distância $d = \dfrac{b^2 - a^2}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}}$ com o raio $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - (a+b)^2}$:

$$d > \rho \;\Rightarrow\; \text{nenhuma solução}; \qquad d = \rho \;\Rightarrow\; \text{uma solução}; \qquad d < \rho \;\Rightarrow\; \text{duas soluções}.$$

47. [E] Com A na origem e os eixos ao longo de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$,

$$B_1 = \left(\frac{\ell}{3}, 0, 0\right), \quad D_1 = \left(0, \frac{\ell}{3}, 0\right), \quad H_1 = \left(\frac{2\ell}{3}, \ell, \ell\right),$$

pois H_1 está sobre $\overline{GH}$, a $\frac{\ell}{3}$ de $G = (\ell, \ell, \ell)$. Daí

$$D_1B_1 = \frac{\ell\sqrt{2}}{3}, \qquad D_1H_1 = \frac{\ell\sqrt{17}}{3}, \qquad B_1H_1 = \frac{\ell\sqrt{19}}{3}.$$

Como $\frac{2\ell^2}{9} + \frac{17\ell^2}{9} = \frac{19\ell^2}{9}$, o triângulo é retângulo em D_1, e

$$S = \frac{D_1B_1 \cdot D_1H_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{17}}{3} = \boxed{\frac{\ell^2\sqrt{34}}{18}}.$$

48. [A] Na projeção ortogonal, comprimentos paralelos à interseção dos planos conservam-se e comprimentos na direção de maior declive ficam multiplicados por $\cos\varphi$. Para que a imagem seja isósceles, o eixo de simetria do triângulo equilátero deve estar numa dessas duas direções.

Se a *altura* do triângulo fosse a direção encurtada, a base ficaria inalterada e o ângulo do vértice *aumentaria*, jamais chegando a 30°. Logo é a *base* que encurta. Tomando o lado 2, a altura vale $\sqrt{3}$ e a base passa a $2\cos\varphi$; então

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}} \implies \cos\varphi = \sqrt{3}\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{3}\,(2 - \sqrt{3}) = \boxed{2\sqrt{3} - 3} \approx 0{,}4641.$$

(Usámos $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.) Conferindo: com esse fator os ângulos da imagem são 30°, 75° e 75°.

49. [B] **I.** Verdadeira: por três pontos colineares passam infinitos planos, e em particular passa um. **II.** Falsa: a reta pode ser secante ao plano, com um único ponto comum. **III.** Falsa: quatro pontos não coplanares determinam $\binom{4}{3} = 4$ planos, um por terno. **IV.** Falsa: duas retas não paralelas podem ser *reversas*, e reversas não determinam plano algum. **V.** Verdadeira: é o postulado da interseção de planos.

São verdadeiras apenas I e V: duas afirmações.

50. Tome a perpendicular comum a r e r', de pés I em r e K em r', e ponha I na origem, r sobre Ox, a perpendicular comum sobre Oz e r' paralela a Oy à altura $p = \overline{IK}$. Assim $A = (a,0,0)$, $B = (b,0,0)$, $M = (0,m,p)$ e $M' = (0,m',p)$.

A condição do enunciado. O pé da perpendicular baixada de M' sobre o plano MAB é o ortocentro de MAB exatamente quando o tetraedro é **ortocêntrico**, isto é, quando os três pares de arestas opostas são perpendiculares. O par $\left(\overline{AB}, \overline{MM'}\right)$ já o é, por hipótese; e

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM'} = (-a,m,p)\cdot(-b,m',p) = ab + mm' + p^2,$$

expressão simétrica em (m,m'), de modo que os dois pares restantes dão a mesma condição:

$$mm' = -\left(ab + p^2\right).$$

O centro da esfera. Ele equidista de A e B, logo está no plano $x = \frac{a+b}{2}$; e equidista de M e M', logo está no plano $y = \frac{m+m'}{2}$. Escrevendo $C = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{m+m'}{2}, z\right)$ e impondo $\overline{CA} = \overline{CM}$, os termos em z^2 se cancelam e sobra

$$-ab + mm' + 2zp - p^2 = 0.$$

Com $mm' = -\left(ab + p^2\right)$,

$$2zp = 2ab + 2p^2 \implies z = p + \frac{ab}{p},$$

que não depende de m. Já $\frac{m+m'}{2} = \frac{1}{2}\left(m - \frac{ab+p^2}{m}\right)$ percorre toda a reta real quando m varia.

Logo o lugar geométrico é a **reta paralela a** r' contida no plano mediador de $\overline{AB}$, à distância $p + \dfrac{\overline{IA}\cdot\overline{IB}}{p}$ de r medida na direção da perpendicular comum (distâncias de A e B a I tomadas com sinal). ■

51. Seja M' a projeção ortogonal de M sobre π: quando M percorre c, M' percorre a circunferência c' de centro I e raio r. A interseção $\sigma \cap \pi$ é a reta $\overleftrightarrow{PM'}$, e um ponto X dessa reta satisfaz $\overline{XM}^2 = \overline{XM'}^2 + h^2$; de $\overline{XM} = h\sqrt{3}$ vem $\overline{XM'} = h\sqrt{2}$. Os dois pontos são, pois, os que distam $h\sqrt{2}$ de M' sobre essa reta, e A é o que fica do lado oposto a P:

$$\overline{PA} = \overline{PM'} + h\sqrt{2}.$$

(a) A obtém-se de M' afastando-o de P, sobre a reta PM', de um comprimento constante $h\sqrt{2}$: o lugar geométrico de A é a **conchoide da circunferência** c', de polo P e módulo $h\sqrt{2}$. Em coordenadas polares de polo P, com o eixo polar na direção $\overrightarrow{PI}$, a circunferência c' tem equação $\varrho = h\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi}$, e portanto

$$\varrho = h\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi} + h\sqrt{2}.$$

(No caso particular $r = h$, em que P pertence a c', a curva é um caracol de Pascal.)

(b) Como $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IM'} + h\sqrt{2}\,\vec{u}$, com $\vec{u}$ unitário, a desigualdade triangular dá

$$\overline{IA} \le \overline{IM'} + h\sqrt{2} = r + h\sqrt{2},$$

com igualdade exatamente quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido de $\overrightarrow{IM'}$, isto é quando P, I e M' estão alinhados com M' do lado oposto a P. Esse caso ocorre sempre, e

$$\boxed{\overline{IA}_{\max} = r + h\sqrt{2}.}$$

52. Todo plano tangente a um cone contém uma geratriz e, portanto, passa pelo vértice S. Um plano tangente que passe por P contém então os dois pontos S e P, isto é, contém a reta $\overleftrightarrow{SP}$. Isso já resolve o problema:

1. Determine o traço Q da reta $\overleftrightarrow{SP}$ no plano π.
2. Em π, trace por Q as duas tangentes à circunferência da base, de pontos de tangência T_1 e T_2.
3. Os planos procurados são (S, P, T_1) e (S, P, T_2), tangentes ao cone ao longo das geratrizes $\overline{ST_1}$ e $\overline{ST_2}$.

De fato, um plano que passa por S corta π numa reta por Q, e ele é tangente ao cone exatamente quando essa reta é tangente à circunferência da base. Como P é exterior ao cone, a reta $\overleftrightarrow{SP}$ fura π fora do círculo da base, de modo que Q é exterior a ele e existem duas tangentes: o problema tem **duas** soluções.
Se $\overleftrightarrow{SP}$ for paralela a π não há traço Q; nesse caso os planos procurados são os que contêm $\overleftrightarrow{SP}$ e cortam π segundo as duas tangentes à base paralelas a $\overleftrightarrow{SP}$.

53. Todo $n \geq 6$, exceto $n = 7$. Existem poliedros com 6 arestas (tetraedro) e, mais geralmente, a pirâmide de base k-gonal tem $2k$ arestas, cobrindo todos os pares ≥ 6. Cortando um vértice triédrico de uma dessas pirâmides acrescentam-se 3 arestas, o que dá todos os ímpares ≥ 9. Falta excluir 7: um poliedro com $A = 7$ teria, por (b) do exercício anterior, $3F \geq 13$ e $3F \leq 14$, logo F não é inteiro compatível ($F = 13/3$ a $14/3$). Logo não existe poliedro convexo com 7 arestas.

54. São $6n$ pontos. Toda reta determinada por dois deles está contida numa face exatamente quando os dois pontos estão numa mesma circunferência; descontando esses casos,

$$R = \binom{6n}{2} - 6\binom{n}{2} = \frac{6n(6n-1)}{2} - 6\,\frac{n(n-1)}{2} = 3n\,[(6n-1)-(n-1)] = \boxed{15n^2}.$$

Do mesmo modo, um triângulo está contido numa face exatamente quando os três vértices estão na mesma circunferência (e aí não chega a ser degenerado, pois três pontos de um círculo não são colineares):

$$T = \binom{6n}{3} - 6\binom{n}{3} = n(6n-1)(6n-2) - n(n-1)(n-2) = n\left[35n^2 - 15n\right] = \boxed{5n^2(7n-3)}.$$

Conferência com $n = 1$: um ponto por face, $R = \binom{6}{2} = 15$ e $T = \binom{6}{3} = 20$, que é o que as fórmulas dão.

55. (a) Um tetraedro com três vértices numa mesma face tem exatamente uma face do cubo com três dos seus vértices — quatro vértices numa mesma circunferência seriam coplanares e não formariam tetraedro. Escolhem-se a face (6 modos), os três pontos nela ($\binom{n}{3}$) e o quarto vértice entre os $5n$ pontos restantes:

$$6\binom{n}{3}(5n) = 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 5n = \boxed{5n^2(n-1)(n-2)}.$$

(b) Escolhem-se as quatro faces ($\binom{6}{4} = 15$ modos) e um ponto em cada uma (n^4 modos); pela hipótese do enunciado esses quatro pontos nunca são coplanares, e todos os tetraedros são distintos:

$$\binom{6}{4} n^4 = \boxed{15n^4}.$$

56. Cada plano de corte passa pelos pontos médios de três arestas concorrentes e destaca um tetraedro tri-retângulo de catetos $\frac{a}{2}$. O que resta é o **cuboctaedro** (seção 2.8), cujos vértices são os 12 pontos médios das arestas do cubo e cuja aresta é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos $\frac{a}{2}$:

$$\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Arestas. O cuboctaedro tem 24 arestas, logo $24\ell = \boxed{12a\sqrt{2}}$.

Área. São 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados de lado ℓ:

$$A = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + 6\ell^2 = 2\ell^2\sqrt{3} + 6\ell^2 = \ell^2\left(6 + 2\sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{2}\left(6 + 2\sqrt{3}\right) = \boxed{a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)}.$$

Volume. Cada canto retirado vale $\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{48}$, e são oito:

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{48} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \boxed{\frac{5a^3}{6}}.$$

Conferência pela fórmula do cuboctaedro de aresta ℓ, $V = \frac{5\ell^3\sqrt{2}}{3}$: com $\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ vem $\ell^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ e $V = \frac{5}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{5a^3}{6}$ ✓.

57. [A] Os pontos médios das seis arestas formam um octaedro regular de aresta $\frac{a}{2}$, e o tetraedro se decompõe nele mais quatro tetraedros de aresta $\frac{a}{2}$, cada um com $\frac{V}{8}$ do volume. Logo $V_o = V - 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

58. [C] Os centros das faces são os transformados dos vértices pela homotetia de centro no centro do sólido e razão $-\frac{1}{3}$. Logo o tetraedro interno é semelhante ao original na razão $\frac{1}{3}$ e $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. Com $m = 1$ e $n = 27$, $m + n = 28$.

59. Cada corte destaca um tetraedro cuja face de corte é um triângulo equilátero de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de área $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. O octaedro montado tem essas 8 faces como superfície externa, logo

$$A = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}.$$

60. A esfera tangente a todas as arestas tem centro no centro do sólido e raio $r_a = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Logo

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{32} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}.$$

61. **(a)** O diedro do icosaedro é $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 138°11'$.

(b) V e seus cinco vizinhos formam uma **pirâmide pentagonal regular** de base de lado a e arestas laterais a. O raio da base é $\rho = \frac{a}{2\,\mathrm{sen}\,36°}$, e a altura é $H = \sqrt{a^2 - \rho^2}$. Efetuando as contas,

$$V_P = \frac{(5 + \sqrt{5})\,a^3}{24} \approx 0{,}3015\,a^3.$$

62. Os dois planos são paralelos à face, logo cortam o tetraedro segundo tetraedros semelhantes com vértice no ápice. Se a razão de semelhança é k, o volume é k^3V. Para dividir em três partes iguais, $k_1^3 = \frac{1}{3}$ e $k_2^3 = \frac{2}{3}$, isto é, $k_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e $k_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$. Com $H = \dfrac{d\sqrt{6}}{3}$, as alturas contadas do ápice são $k_1 H$ e $k_2 H$, e as três fatias medem

$$h_1 = \frac{d\sqrt{6}\,\sqrt[3]{9}}{9}, \qquad h_2 = \frac{d\sqrt{6}\,(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{9})}{9}, \qquad h_3 = \frac{d\sqrt{6}\,(3 - \sqrt[3]{18})}{9},$$

que somam exatamente H ($\approx 0{,}566d$, $0{,}147d$ e $0{,}103d$).

63. **[C]** O octaedro inscrito tem os três pontos médios das arestas da base em $z = 0$ e os três pontos médios das arestas laterais em $z = \frac{H}{2}$. O plano $z = \frac{H}{4}$ é, portanto, a **seção central** do octaedro, paralela a um par de faces opostas: um hexágono regular de lado igual à metade da aresta do octaedro, isto é, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}$. Sua área é

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{32}.$$

64. Trata-se de duas homotetias encadeadas.

Do cubo ao octaedro. Num cubo de aresta a os seis centros de faces formam um octaedro regular de aresta $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, cujo volume é

$$V_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6}\,V_{\text{cubo}}.$$

Do octaedro ao cubo. Os oito centros das faces de um octaedro regular de aresta e formam um cubo de aresta $\frac{e\sqrt{2}}{3}$ — dois centros de faces adjacentes distam esse valor. Logo

$$V_{\text{cubo}} = \frac{2e^3\sqrt{2}}{27} = \frac{2}{9} \cdot \frac{e^3\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{9}\,V_{\text{oct}}.$$

Assim, partindo de V, os volumes inscritos são

$$\underbrace{\frac{V}{6}}_{1^{\circ}\text{ octaedro}}, \quad \underbrace{\frac{2}{9} \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{27}}_{2^{\circ}\text{ cubo}}, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{V}{27} = \frac{V}{162}, \quad \frac{V}{729}, \ \cdots$$

isto é, duas progressões geométricas de razão $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{27}$, uma começando em $\frac{V}{6}$ (os octaedros) e outra em $\frac{V}{27}$ (os cubos). Somando,

$$\frac{S}{V} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{27}} + \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{27}}{\frac{26}{27}} = \frac{\frac{27+6}{162} \cdot 27}{26} = \frac{33 \cdot 27}{162 \cdot 26} = \boxed{\frac{11}{52}}.$$

Ou seja, todos os infinitos poliedros inscritos juntos ocupam pouco mais de 21% do cubo inicial.

65. A altura do tetraedro regular de aresta a é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ e o centro da esfera inscrita dista $r = \frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ de cada face. O plano paralelo a BCD e tangente à esfera do lado de A dista $2r = \frac{h}{2}$ da base, logo dista $\frac{h}{2}$ também de A: o tetraedro que ele recorta em A é homótetico de $ABCD$ na razão $\frac{1}{2}$, de aresta $\frac{a}{2}$ e esfera inscrita de raio $\frac{r}{2}$. São quatro tetraedros desses — os quatro cantos da subdivisão pelos pontos médios das arestas — e eles não se invadem.

Na etapa n há, portanto, 4^n esferas de raio $\frac{r}{2^n}$, cujo volume somado vale $4^n \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{8^n} = \frac{4\pi r^3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Somando a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$,

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{8\pi r^3}{3}.$$

Com $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ tem-se $r^3 = \frac{a^3\sqrt{6}}{288}$ e

$$\boxed{V = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{288} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{108} \approx 0{,}0713\, a^3.}$$

66. [D] Ponha o octaedro com os vértices nos eixos: como as diagonais são $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$, tome

$$A = (1,0,0), \quad E = (-1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad F = (0,-1,0), \quad C = (0,0,1), \quad D = (0,0,-1),$$

de aresta $a = \sqrt{2}$. Como $FM = DN = DP = \frac{a}{3}$,

$$M = F + \tfrac{1}{3}(A-F) = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0\right), \quad N = D + \tfrac{1}{3}(A-D) = \left(\tfrac{1}{3}, 0, -\tfrac{2}{3}\right), \quad P = D + \tfrac{1}{3}(B-D) = \left(0, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right).$$

Então $\overrightarrow{NM} = \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\overrightarrow{NP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, de modo que

$$\cos M\widehat{N}P = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad M\widehat{N}P = \frac{2\pi}{3}.$$

67. Com A na origem, $B = (a,0,0)$, $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $D = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$, o baricentro de ABC é $O = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ e o vetor da translação é $\vec{t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$, de módulo $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, paralelo à face ABC.

Intersectando os oito semiespaços (quatro de cada tetraedro) resulta um sólido de quatro vértices, todos os seus seis lados iguais a $\frac{2a}{3}$: o sólido comum é um **tetraedro regular de aresta** $\frac{2a}{3}$. (Conferência: o seu volume vale $\frac{(2a/3)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{81}$.)

Para o tetraedro regular de aresta e, $r = \frac{e\sqrt{6}}{12}$ e $R = \frac{e\sqrt{6}}{4} = 3r$. Com $e = \frac{2a}{3}$,

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{18}, \qquad R = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

e portanto

$$V_{\text{insc}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{18}\right)^3 = \boxed{\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{729}}, \qquad V_{\text{circ}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \boxed{\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}},$$

na razão 27, como tem de ser, já que $R = 3r$.

68. Ponha a base no plano $z=0$, com centro na origem: $A=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, $B=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$, $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$, $D=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$. Como todas as arestas medem a, a altura é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $V=\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

(a) Os pontos médios das quatro arestas da base distam $\frac{a}{2}$ do centro, e o ponto médio de $\overline{VA}$ é $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4},\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, que também dista $\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{8}}=\frac{a}{2}$. Logo os oito pontos médios estão numa mesma esfera de centro na base e raio

$$r_m=\frac{a}{2}.$$

A esfera circunscrita também tem centro na base (a distância do centro a cada vértice da base é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, igual à altura), e

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Para a inscrita, o plano da face VAB é $2y+\sqrt{2}\,z=a$; a distância de $(0,0,\varrho)$ a esse plano é $\frac{a-\sqrt{2}\varrho}{\sqrt{6}}$, e igualando a ϱ,

$$a-\sqrt{2}\varrho=\sqrt{6}\,\varrho \implies \varrho=\frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\approx 0{,}2588\,a.$$

(b) Com $VA'=VB'=x$ e $VC'=VD'=y$,

$$A'=\left(\tfrac{x}{2},\tfrac{x}{2},\tfrac{(a-x)\sqrt{2}}{2}\right),\quad B'=\left(-\tfrac{x}{2},\tfrac{x}{2},\tfrac{(a-x)\sqrt{2}}{2}\right),$$

e analogamente C', D' com y no lugar de x e $-\frac{y}{2}$ no lugar de $\frac{x}{2}$ na segunda coordenada. Assim $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são paralelos ao eixo Ox, de comprimentos x e y: o quadrilátero é um trapézio (duas retas paralelas são coplanares), de altura

$$d=\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\frac{(y-x)^2}{2}}.$$

Com $x+y=a$,

$$S=\frac{x+y}{2}\,d=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{(y-x)^2}{2}}.$$

Impondo $S=\frac{a^2}{4}$ vem $\frac{a^2}{4}+\frac{(y-x)^2}{2}=\frac{a^2}{4}$, isto é $y=x$, e de $x+y=a$,

$$\boxed{x=y=\frac{a}{2}.}$$

Note que $\frac{a^2}{4}$ é justamente o *menor* valor possível de S: a área cresce com $|y-x|$.

69. O dodecaedro tem 20 vértices e 12 faces pentagonais. Duas faces distintas têm em comum, no máximo, uma aresta — dois vértices — de modo que nenhum terno de vértices pertence a duas faces ao mesmo tempo, e os casos favoráveis se contam sem repetição:

$$P=\frac{12\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{12\cdot 10}{1140}=\frac{120}{1140}=\boxed{\frac{2}{19}}\approx 10{,}5\%.$$

70. Arestas a, $2a$, $4a$: $A_t=2(2a^2+8a^2+4a^2)=28a^2=28\Rightarrow a=1$. A diagonal mede $\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$ cm. **[C]**

71. Tome A na origem e $\vec{AB} = (a, 0, 0)$. O plano $ABFE$ faz $60°$ com a base, e $\widehat{AEF} = 120°$ implica $\widehat{EAB} = 60°$; nesse plano,

$$\vec{AE} = a\cos 60°\,(1,0,0) + a\,\mathrm{sen}\,60°\left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\tfrac{a}{2},\ \tfrac{a\sqrt{3}}{4},\ \tfrac{3a}{4}\right).$$

A face superior $EFGH$ é a transladada de $ABCD$ por $\vec{AE}$, logo o ângulo θ em E é o ângulo entre $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$, e $\vec{AD} = a(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$. Portanto

$$V = \left|\vec{AB}\cdot(\vec{AD}\times\vec{AE})\right| = a\cdot a\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{3a}{4} = \frac{3a^3\,\mathrm{sen}\,\theta}{4}.$$

Pelo triedro. O mesmo resultado sai da fórmula da seção 1.9: no triedro de A, as faces adjacentes à aresta $\overline{AB}$ medem $b = 60°$ (pois o ângulo em E da face $ABFE$ é $120°$) e $c = \theta$, e o diedro dessa aresta é $\widehat{A} = 60°$. Como o produto misto unitário vale $\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}$,

$$V = a^3\,\mathrm{sen}\,60°\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,60° = \frac{3a^3\,\mathrm{sen}\,\theta}{4}.$$

72. Como $AA_1 \perp$ base, o triângulo DAC é retângulo em A: de $CD = x$ e $\widehat{DCA} = \beta$ vem $AC = x\cos\beta$ e $AD = x\,\mathrm{sen}\,\beta$. Logo a aresta lateral mede $AA_1 = 2AD = 2x\,\mathrm{sen}\,\beta$. Na base isósceles, $AB = AC = x\cos\beta$ e $BC = 2AC\cos\alpha$, de modo que o perímetro é $2x\cos\beta(1+\cos\alpha)$. Assim

$$A_\ell = 2x\cos\beta(1+\cos\alpha)\cdot 2x\,\mathrm{sen}\,\beta = 2x^2\,\mathrm{sen}\,2\beta\,(1+\cos\alpha) = 4x^2\,\mathrm{sen}\,2\beta\,\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

73. Seja o prisma $ABC-A'B'C'$, de aresta lateral ℓ, e considere a face lateral $ABB'A'$ e a aresta oposta $\overline{CC'}$, paralela ao plano dessa face. Seja d a distância entre a face e essa aresta.

Corte o prisma por uma **seção reta**, isto é, por um plano perpendicular às arestas laterais. Ela é um triângulo PQR, com $P \in AA'$, $Q \in BB'$, $R \in CC'$, e o volume do prisma oblíquo vale

$$V = S_{PQR}\cdot\ell.$$

Na seção reta, o lado $\overline{PQ}$ está no plano da face $ABB'A'$ e o vértice R está sobre $\overline{CC'}$; como o plano da seção é perpendicular às arestas, a distância de R à reta PQ é exatamente a distância d entre a face e a aresta. Logo

$$S_{PQR} = \frac{PQ\cdot d}{2}.$$

Por outro lado, a face $ABB'A'$ é um paralelogramo cujas "bases" são as arestas laterais, de medida ℓ, e cuja altura correspondente é PQ — pois $\overline{PQ}$ lhe é perpendicular. Assim $S_{ABB'A'} = PQ\cdot\ell$. Reunindo,

$$V = \frac{PQ\cdot d}{2}\cdot\ell = \frac{1}{2}\,(PQ\cdot\ell)\,d = \frac{1}{2}\,S_{ABB'A'}\cdot d,$$

como se queria demonstrar. ■

74. a) A seção hexagonal regular tem por vértices os pontos médios das seis arestas que não concorrem em A nem em G. Dois vértices consecutivos são pontos médios de duas arestas de uma mesma face, logo o lado do hexágono é a metade da diagonal da face:

$$\ell = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{4}}.$$

b) A esfera procurada tangencia as três faces que passam por A, logo seu centro está sobre a diagonal $\overline{AG}$ e dista de cada uma dessas faces o próprio raio ρ: com A na origem e as arestas nos eixos, o centro é (ρ, ρ, ρ).

O plano da seção passa pelo centro do cubo e tem $\overline{AG}$ por normal, logo sua equação é $x+y+z=\frac{3a}{2}$. A distância do centro a esse plano deve valer ρ:

$$\frac{\frac{3a}{2}-3\rho}{\sqrt{3}}=\rho \implies \frac{3a}{2}=\rho\left(3+\sqrt{3}\right) \implies \rho=\frac{3a}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}.$$

Racionalizando,

$$\boxed{\rho=\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}\approx 0{,}3170\,a}.$$

Confere: $\rho<\frac{a}{2}$, de modo que a esfera cabe no cubo, e $3\rho\approx 0{,}951a<\frac{3a}{2}$, isto é, o centro está entre A e a seção.

75. [B] Com A na origem e o cubo em $[0,a]^3$, tem-se $M=(x,0,0)$, $N=(0,x,0)$ e $L=(0,0,x)$, de modo que o plano MNL é $X+Y+Z=x$. A esfera inscrita tem centro $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ e raio $\frac{a}{2}$, e

$$d=\frac{\left|\frac{3a}{2}-x\right|}{\sqrt{3}}=\frac{a}{2} \implies \frac{3a}{2}-x=\frac{a\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{a}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}634\,a,$$

valor que de fato cai dentro da aresta. A outra raiz, $\frac{a}{2}(3+\sqrt{3})>a$, fica fora do cubo.

76. [D] Ponha o quadrado de baixo com vértices $\left(\pm\frac{a}{2},\pm\frac{a}{2},0\right)$. O de cima está girado de 45°, com os vértices sobre os eixos: $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},0,d\right)$ e $\left(0,\pm\frac{a}{\sqrt{2}},d\right)$. A distância de $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$ a $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},0,d\right)$ é

$$\ell^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+d^2=a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{a^2}{4}+d^2=a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+d^2.$$

Impondo $\ell=a$:

$$d^2=\frac{a^2\sqrt{2}}{2} \implies d=\frac{a}{\sqrt[4]{2}}=\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}\approx 0{,}841\,a.$$

77. [D] Ponha o hexágono com centro na origem e lado a; as arestas $\overline{EF}$ e $\overline{BC}$ são paralelas e distam $a\sqrt{3}$. Se $\vec{v}$ é o vetor da translação que leva a base na base de cima, dizer que a projeção de $\overline{F'E'}$ coincide com $\overline{BC}$ é dizer que a componente horizontal de $\vec{v}$ é perpendicular a $\overline{EF}$ e vale $a\sqrt{3}$.

A face $EFF'E'$ contém $\overline{EF}$ e a direção $\vec{v}$; o seu diedro com a base, medido no plano perpendicular a $\overline{EF}$, tem tangente igual a $\dfrac{H}{a\sqrt{3}}$, onde H é a altura do prisma. De 45° vem $H=a\sqrt{3}$, e

$$V=\mathcal{A}_{\text{base}}\cdot H=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{3}=\frac{9a^3}{2}.$$

78. Sejam $AB=p$ a maior aresta da base, $BC=q$ a menor e h a altura do prisma. Como N é a projeção de P na face oposta, $\overline{NA}^2=\overline{PA}^2+h^2$ e $\overline{NC}^2=\overline{PC}^2+h^2$, de modo que a altura se cancela:

$$\overline{NA}^2-\overline{NC}^2=\overline{PA}^2-\overline{PC}^2.$$

Como $\overline{MP}\perp\overline{AC}$, os triângulos MPA e MPC são retângulos em P e

$$\overline{PA}^2-\overline{PC}^2=\left(\overline{MA}^2-\overline{MP}^2\right)-\left(\overline{MC}^2-\overline{MP}^2\right)=\overline{MA}^2-\overline{MC}^2.$$

Com M no meio de $\overline{AB}$, $\overline{MA}=\frac{p}{2}$ e $\overline{MC}^2=\frac{p^2}{4}+q^2$, donde

$$\overline{NA}^2-\overline{NC}^2=-q^2 \implies q^2=k \implies \boxed{q=\sqrt{k}}.$$

A menor aresta da base não depende nem de p nem da altura.

79. Com A na origem, $B=(a,0,0)$, $C=(a,a,0)$, $D=(0,a,0)$ e a diagonal principal tirada de A na direção $(1,1,1)$, tem-se $V=(ta,ta,ta)$ com $0<t<1$, e a altura da pirâmide é $h=ta$. Somando os quadrados das arestas laterais,

$$\overline{VA}^2+\overline{VB}^2+\overline{VC}^2+\overline{VD}^2=a^2\left[8t^2+4(t-1)^2\right]=a^2\left(12t^2-8t+4\right).$$

Igualando a ka^2,

$$12t^2-8t+(4-k)=0 \implies t=\frac{2\pm\sqrt{3k-8}}{6}.$$

A condição $0<t<1$ exige $\sqrt{3k-8}<4$, ou seja $k<8$, e a raiz com sinal negativo só serve se $\sqrt{3k-8}<2$, isto é $k<4$. Entre os primos sobram $k=3$, $k=5$ e $k=7$, e as alturas possíveis são

$$\boxed{\frac{a}{6},\quad \frac{a}{2},\quad \frac{\left(2+\sqrt{7}\right)a}{6},\quad \frac{\left(2+\sqrt{13}\right)a}{6}.}$$

(As duas primeiras correspondem a $k=3$; a terceira a $k=5$ e a quarta a $k=7$.)

80. O volume da piscina é $5\cdot6\cdot3=90\ \text{m}^3$; dois terços são $60\ \text{m}^3$, e como a seção horizontal é constante a água tem altura $\frac{60}{30}=2$ m.

Tome a origem num canto do fundo, o eixo Ox ao longo da parede de base 6 m mais próxima da bolha, o eixo Oy ao longo da parede de base 5 m e Oz vertical. Ser equidistante das duas paredes de base 5 m significa $x=3$; em relação às de base 6 m, as distâncias d e $2d$ somam 5, donde $d=\frac{5}{3}$ e, sendo a mais próxima a que está sobre Ox, $y=\frac{5}{3}$. Por fim a bolha está na superfície da água, $z=2$:

$$\boxed{\left(3,\ \frac{5}{3},\ 2\right)\ \text{metros.}}$$

81. Com A na origem, $B=(3,0,0)$, $C=(3,3,0)$, $D=(0,3,0)$ e $E=(0,0,3)$, os dados dão $M=(0,2,0)$, $N=(2,0,0)$ e $P=\left(3,0,\frac{1}{2}\right)$. Um vetor normal ao plano MNP é

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=(2,-2,0)\times\left(3,-2,\tfrac{1}{2}\right)=(-1,-1,2),$$

de modo que o plano é $x+y-2z=2$. Intersectando-o com as arestas do cubo obtêm-se cinco pontos:

$$N=(2,0,0),\quad P=\left(3,0,\tfrac{1}{2}\right),\quad (3,3,2),\quad \left(0,3,\tfrac{1}{2}\right),\quad M=(0,2,0),$$

e a seção é o pentágono $NP(3,3,2)\left(0,3,\frac{1}{2}\right)M$. Os lados medem

$$NP=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad P(3,3,2)=\frac{3\sqrt{5}}{2},\quad (3,3,2)\left(0,3,\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2},\quad \left(0,3,\tfrac{1}{2}\right)M=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad MN=2\sqrt{2},$$

e o perímetro é

$$\boxed{4\sqrt{5}+2\sqrt{2}\approx 11{,}77.}$$

82. Cada esfera tangencia quatro outras, logo cada centro tem quatro vizinhos à distância $2R$: os seis centros são os vértices de um **octaedro regular** de aresta $2R$, cujo circunraio vale $\frac{2R}{\sqrt{2}}=R\sqrt{2}$. Postos os centros sobre os eixos, em $\left(\pm R\sqrt{2},0,0\right)$, $\left(0,\pm R\sqrt{2},0\right)$ e $\left(0,0,\pm R\sqrt{2}\right)$, o cubo que as tangencia é o cubo de faces perpendiculares aos eixos: a face $x=\frac{s}{2}$ tangencia a esfera de centro $\left(R\sqrt{2},0,0\right)$ quando

$$\frac{s}{2}=R\sqrt{2}+R \implies \boxed{s=2R\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 4{,}83\,R.}$$

Cada face tangencia exatamente uma esfera, e as seis ficam tangentes ao cubo.

Há também o cubo *interior* à configuração, de aresta $2R\left(\sqrt{2}-1\right)$, cujas faces tangenciam as mesmas seis esferas por dentro.

83. Ponha $A=(0,0,0)$, $B=(2a,0,0)$, $C=(2a,a,0)$, $D=(0,a,0)$, com as arestas da superfície na direção Oz, e seja $C'=(2a,a,b)$.

(a) Um plano por A tem equação $z=px+qy$; ele corta as arestas por B e por D em $B'=(2a,0,\beta)$ e $D'=(0,a,\delta)$ com $\beta=2ap$ e $\delta=aq$, e passar por C' equivale a $\beta+\delta=b$. Como $\overline{AB'}$ e $\overline{D'C'}$ são paralelos (e $\overline{AD'}$, $\overline{B'C'}$ também), $AB'C'D'$ é sempre um paralelogramo, com

$$\overline{AB'}^2=4a^2+\beta^2, \qquad \overline{B'C'}^2=a^2+\delta^2.$$

Ser losango é $\delta^2-\beta^2=3a^2$; junto com $\beta+\delta=b$ isso dá $\delta-\beta=\frac{3a^2}{b}$ e

$$\beta=\frac{b^2-3a^2}{2b}, \qquad \delta=\frac{b^2+3a^2}{2b},$$

que determinam B' e D': o losango existe sempre, para todo $b>0$.

(b) Para que ele fique de um só lado de π é preciso $\beta\geq 0$ (pois $\delta>0$ sempre), ou seja

$$\boxed{b\geq a\sqrt{3}}.$$

Em $b=a\sqrt{3}$ o vértice B' cai sobre B, no próprio plano π.

(c) Sobre a base retângulo, a cota do plano é a função afim $z=px+qy$, e

$$V=\iint_{ABCD} z\,dA=\mathcal{A}\cdot z(G),$$

onde G é o centro do retângulo. Como $z(G)$ é a média das quatro cotas dos vértices, $z(G)=\frac{0+\beta+b+\delta}{4}=\frac{b}{2}$, e

$$V=2a^2\cdot\frac{b}{2}=\boxed{a^2b},$$

independentemente de o paralelogramo ser ou não um losango.

84. Tudo se passa na base: os dois planos são verticais e cortam o paralelepípedo em prismas de mesma altura h, de modo que as razões de volume são razões de área. Com $A=(0,0)$, $B=(a,0)$, $C=(a,b)$, $D=(0,b)$, tem-se $M=(x,0)$ e $N=(a,b-y)$.

(a) Os segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{DN}$ dividem o retângulo no triângulo ADM, no quadrilátero $MBND$ e no triângulo DNC. Impondo que o primeiro e o terceiro valham $\frac{ab}{3}$:

$$\frac{xb}{2}=\frac{ab}{3}\implies x=\frac{2a}{3}, \qquad \frac{ya}{2}=\frac{ab}{3}\implies y=\frac{2b}{3},$$

e o pedaço do meio fica automaticamente com o terço restante.

(b) Com esses valores, $M=\left(\frac{2a}{3},0\right)$ e $N=\left(a,\frac{b}{3}\right)$, de modo que

$$[MBN]=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}=\frac{ab}{18}, \qquad [MDN]=\frac{ab}{3}-\frac{ab}{18}=\frac{5ab}{18},$$

e a razão pedida é

$$\boxed{\frac{V_{MBNM'B'N'}}{V_{MDNM'D'N'}}=\frac{1}{5}.}$$

(c) Como as duas faces do diedro de aresta $\overline{MM'}$ são verticais, o diedro mede o ângulo $D\widehat{M}N$ da base. De $\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{2a}{3},b\right)$ e $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$,

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MN}=-\frac{2a^2}{9}+\frac{b^2}{3}=0\implies \boxed{3b^2=2a^2,\ \text{isto é}\ b=\frac{a\sqrt{6}}{3}.}$$

85. Ponha k no plano $z=0$ com centro na origem e

$$A=(R,0,0),\quad B=\left(-\frac{R}{2},\frac{R\sqrt{3}}{2},0\right),\quad C=\left(-\frac{R}{2},-\frac{R\sqrt{3}}{2},0\right).$$

A corda $\overline{BC}$ mede $R\sqrt{3}$ e está sobre a reta $x=-\frac{R}{2}$ do plano da base. Se $D=(R\cos\theta,R\,\mathrm{sen}\,\theta,0)$ percorre o arco BC que não contém A, então $A'=(R\cos\theta,R\,\mathrm{sen}\,\theta,h)$ e a distância de A' à reta $\overleftrightarrow{BC}$ vale

$$\sqrt{\left(R\cos\theta+\frac{R}{2}\right)^2+h^2},$$

que é máxima quando $\cos\theta$ é mínimo, ou seja $\theta=180°$: D é o ponto médio do arco, diametralmente oposto a A, e $A'=(-R,0,h)$. Nessa posição

$$\mathcal{A}_{\max}=\frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{4}+h^2}=\frac{R\sqrt{3}}{4}\sqrt{R^2+4h^2}.$$

O plano $A'BC$ contém a direção $(0,1,0)$ e o vetor $\overrightarrow{BA'}=\left(-\frac{R}{2},-\frac{R\sqrt{3}}{2},h\right)$; um normal é $\left(h,0,\frac{R}{2}\right)$ e o plano é $hx+\frac{R}{2}z+\frac{hR}{2}=0$. Com $O=\left(0,0,\frac{h}{2}\right)$,

$$d(O,A'BC)=\frac{\left|\frac{Rh}{4}+\frac{Rh}{2}\right|}{\sqrt{h^2+\frac{R^2}{4}}}=\boxed{\frac{3Rh}{2\sqrt{4h^2+R^2}}}.$$

86. O hexágono regular de lado ℓ tem circunraio ℓ e o triângulo equilátero de lado ℓ tem circunraio $\frac{\ell}{\sqrt{3}}$. Com os baricentros sobre o eixo Oz e as alturas do triângulo paralelas a diagonais maiores, os vértices do hexágono ficam nos ângulos $0°,60°,\dots,300°$ e os do triângulo em $0°,120°,240°$, estes à altura ℓ.

Cada vértice do triângulo liga-se a três vértices consecutivos do hexágono e vértices vizinhos do triângulo compartilham um vértice do hexágono, de modo que a superfície lateral se fecha com nove triângulos. Com o hexágono, o triângulo e essas nove faces, o poliedro tem $V=9$, $A=18$ e $F=11$, e $9-18+11=2$: é um poliedro convexo, o *fecho* dos nove pontos.

Decompondo-o em tetraedros a partir do seu centroide e somando,

$$\boxed{V=\frac{\ell^3}{2}+\frac{7\ell^3\sqrt{3}}{12}=\frac{\left(6+7\sqrt{3}\right)\ell^3}{12}\approx 1{,}510\,\ell^3.}$$

87. Ponha o cubo em $[0,a]^3$ com a face $ABCD$ no plano $z=a$: $A=(0,0,a)$, $B=(0,a,a)$, $C=(a,a,a)$, $D=(a,0,a)$; P está na face $y=a$ e Q na face $x=a$. Escreva $M=(\mu,a,a)$, $N=(a,\nu,a)$, $P=(p_1,a,p_3)$ e $Q=(a,q_2,q_3)$.

(a) Planificando as duas faces laterais sobre o plano da face $ABCD$, o menor caminho torna-se um segmento de reta: P vai para $P'=(p_1,2a-p_3)$, Q vai para $Q'=(2a-q_3,q_2)$, e P', M, N, Q' ficam alinhados. Escrevendo $A_1=a-\mu$ e $A_2=a-\nu$, a direção de $\overline{MN}$ é $(A_1,-A_2)$, e o alinhamento dá

$$(p_1-\mu)(-A_2)=(a-p_3)A_1,\qquad(2a-q_3-\mu)(-A_2)=(q_2-a)A_1.$$

Por outro lado, P, M, N, Q coplanares significa

$$(p_1-\mu)(\nu-a)(q_3-a)+(p_3-a)(a-\mu)(q_2-\nu)=0.$$

Substituindo a primeira relação do alinhamento, o fator comum $(p_3-a)(a-\mu)$ sai e sobra $\nu=q_2-q_3+a$; levando isso à segunda relação, obtém-se $(a-q_3)(A_1-A_2)=0$. Como $q_3\neq a$ (Q não está na face $ABCD$), vem $A_1=A_2$, ou seja

$$\overline{CM}=\overline{CN}.$$

Então $\overrightarrow{MN}$ é paralelo a $(1,-1,0)$ e $\overrightarrow{AC}$ a $(1,1,0)$: os dois são perpendiculares. ■

(b) Com $\overline{BM} = b$ tem-se $M = (b,a,a)$ e $N = (a,b,a)$. O alinhamento planificado mostra ainda que o caminho corta cada face lateral a 45° com a aresta, de modo que $\overrightarrow{MP}$ é paralelo a $(1,0,1)$. O plano da seção contém M e as direções $(1,-1,0)$ e $(1,0,1)$, logo tem normal $(1,1,-1)$:

$$x + y - z = b.$$

Esse plano separa os vértices do cubo em quatro de cada lado e corta seis arestas, produzindo o hexágono

$$(b,0,0),\ (0,b,0),\ (0,a,a-b),\ (b,a,a),\ (a,b,a),\ (a,0,a-b),$$

cujos lados valem alternadamente $b\sqrt{2}$ e $(a-b)\sqrt{2}$. A sua área é

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + 2ab - 2b^2\right).}$$

(Conferência: para $b = \frac{a}{2}$ o hexágono é regular, de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, e a fórmula dá $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ ✓.)

88. Ponha A na origem, $B = (a,0,0)$, $C = (a,b,0)$, $D = (0,b,0)$ e as arestas verticais na direção Oz. De $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$ vem $NB' = \frac{c}{4}$, logo

$$M = \left(\frac{a}{2},0,0\right), \qquad N = \left(a,0,\frac{3c}{4}\right), \qquad P = (a,p,c).$$

Um cálculo direto do normal dá, para o plano MNP,

$$6x + \frac{a}{p}\,y - \frac{4a}{c}\,z = 3a.$$

Avaliando $f(X) = 6x + \frac{a}{p}y - \frac{4a}{c}z - 3a$ nos oito vértices,

$$f(A) = -3a, \quad f(B) = 3a, \quad f(A') = -7a, \quad f(B') = -a,$$

$$f(C) = 3a + \frac{ab}{p}, \quad f(D) = \frac{ab}{p} - 3a, \quad f(C') = \frac{ab}{p} - a, \quad f(D') = \frac{ab}{p} - 7a.$$

Como $0 < p \le b$, tem-se $\frac{ab}{p} \ge a$: $f(C) > 0$ sempre e $f(C') \ge 0$, anulando-se só em $p = b$. Já $f(D)$ troca de sinal em $p = \frac{b}{3}$ e $f(D')$ em $p = \frac{b}{7}$. Contando, em cada caso, as arestas que ligam um vértice positivo a um negativo:

- $0 < p < \frac{b}{7}$: cinco arestas cortadas — a seção é um **pentágono** (separa os vértices A, A', B' dos outros cinco);
- $p = \frac{b}{7}$: o plano passa por D', e o pentágono tem um vértice sobre D';
- $\frac{b}{7} < p < \frac{b}{3}$: seis arestas cortadas — a seção é um **hexágono**;
- $p = \frac{b}{3}$: o plano passa por D, e o hexágono degenera num pentágono com um vértice sobre D;
- $\frac{b}{3} < p < b$: cinco arestas cortadas — **pentágono** (agora separando B, C, C' dos demais);
- $p = b$: o plano passa por C' e a seção é um **quadrilátero** $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$, $\left(a,0,\frac{3c}{4}\right)$, C' e um ponto de $\overline{AD}$.

Note que os valores críticos $\frac{b}{7}$ e $\frac{b}{3}$ não dependem de a nem de c.

89. Com o bico para baixo, a bebida ocupa um sólido semelhante de razão $\frac{8}{9}$, isto é, $\frac{512}{729}$ do volume. Virando o copo, a parte *vazia* é uma pirâmide semelhante de razão k com $k^3 = 1 - \frac{512}{729} = \frac{217}{729}$, logo $k = \frac{\sqrt[3]{217}}{9}$ e a altura vazia mede $\sqrt[3]{217}$. Portanto

$$h = 9 - \sqrt[3]{217} \approx 2{,}99 \text{ cm}.$$

90. Corte pelo plano que contém o eixo e um apótema: o triângulo isósceles de base $2a$ e altura h tem círculo inscrito de raio R, logo $R = \frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$. Isolando, $\sqrt{a^2+h^2} = \frac{a(h-R)}{R}$ e, ao quadrado, $h^2R^2 = a^2h(h-2R)$, isto é, $a^2 = \frac{hR^2}{h-2R}$. Como o hexágono de apótema a tem área $2\sqrt{3}a^2$,

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\,a^2\cdot h = \frac{2\sqrt{3}\,R^2h^2}{3(h-2R)}.$$

[A]

91. O dodecágono de aresta a tem apótema $a_b = \frac{a}{2}\cot 15°$. Do diedro, $h = a_b \tan 15° = \frac{a}{2}$. A área da base é $\frac{1}{2}\cdot 12a\cdot a_b = 3a^2\cot 15° = 3a^2(2+\sqrt{3})$. Logo

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3a^2(2+\sqrt{3})\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^3(2+\sqrt{3})}{2}.$$

92. As duas faces perpendiculares à base se cortam numa vertical: o vértice fica sobre um dos cantos do retângulo. Se os lados são p e q, as outras duas faces dão $\tan 30° = \frac{h}{p}$ e $\tan 60° = \frac{h}{q}$, isto é, $p = h\sqrt{3}$ e $q = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Então $S = pq = h^2$, $h = \sqrt{S}$ e $V = \frac{S\sqrt{S}}{3}$. **[A]**

93. É a pirâmide quadrangular de arestas todas iguais, já estudada: $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $a_{\text{base}} = \frac{a}{2}$. Logo

$$\tan\theta = \frac{h}{a_{\text{base}}} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a/2} = \sqrt{2},$$

isto é, $\theta \approx 54°44'$ — o mesmo ângulo do cubo e do tetraedro.

Duas faces laterais *opostas* se cortam ao longo de uma reta paralela à base (elas são dois planos que passam por lados opostos do quadrado e pelo mesmo vértice V). O ângulo entre elas é $180° - 2\theta \approx 70°32'$ — exatamente o ângulo diedro do tetraedro regular: esta pirâmide é meia octaedro, e octaedro e tetraedro preenchem o espaço juntos.

94. Sejam a a aresta da base, O o centro da base, V o vértice e M o ponto médio de $\overline{BC}$. Então

$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad VM^2 = h^2 + \frac{a^2}{12}.$$

Na face lateral VBC, isósceles, o ortocentro H está sobre a altura $\overline{VM}$, e vale a relação entre ortocentro e pé da altura:

$$MH\cdot MV = MB\cdot MC = \frac{a^2}{4} \implies \frac{MH}{MV} = \frac{a^2}{4\,VM^2} = \frac{3a^2}{a^2+12h^2}.$$

Com o eixo Oz na altura da pirâmide, H está à cota e à distância do eixo

$$z_H = h\cdot\frac{MH}{MV} = \frac{3a^2h}{a^2+12h^2}, \qquad \rho_H = OM\left(1-\frac{MH}{MV}\right) = \frac{a\sqrt{3}\,(6h^2-a^2)}{3\,(a^2+12h^2)}.$$

Os três ortocentros estão, pois, numa mesma circunferência de eixo Oz; logo o centro da esfera está no eixo, digamos em $(0,0,k)$, e de $V = (0,0,h)$ vem $r = h-k$. Impondo que H esteja na esfera,

$$\rho_H^2 + (z_H-k)^2 = r^2 = (h-k)^2 \implies r = \frac{(h-z_H)^2+\rho_H^2}{2\,(h-z_H)}.$$

Escrevendo $D = a^2 + 12h^2$ e $u = 6h^2 - a^2$, tem-se $h - z_H = \dfrac{2hu}{D}$ e $\rho_H = \dfrac{au\sqrt{3}}{3D}$, donde

$$(h - z_H)^2 + \rho_H^2 = \frac{u^2}{D^2}\left(4h^2 + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{u^2}{3D}, \qquad r = \frac{u^2/(3D)}{4hu/D} = \frac{u}{12h} = \frac{6h^2 - a^2}{12h}.$$

Portanto

$$12hr = 6h^2 - a^2 \implies \boxed{a^2 = 6h\,(h - 2r)},$$

e finalmente

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}\,a^2 h = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 6h(h-2r)\cdot h = \boxed{\frac{\sqrt{3}\,h^2(h-2r)}{2}}.$$

A condição $h > 2r$ é necessária para que a pirâmide exista.

95. [A] Como $C\widehat{D}B = A\widehat{D}C = 90°$, a aresta $\overline{DC}$ é perpendicular a $\overline{DA}$ e a $\overline{DB}$, logo é perpendicular ao plano DAB. Tomando D na origem,

$$A = (4, 0, 0), \qquad B = (4\cos 60°,\ 4\operatorname{sen} 60°,\ 0) = (2,\ 2\sqrt{3},\ 0), \qquad C = (0, 0, 3).$$

Então

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2\sqrt{3}, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 3), \qquad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(6\sqrt{3},\ 6,\ 8\sqrt{3}\right).$$

Com $|\vec{n}| = \sqrt{108 + 36 + 192} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$ e $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$,

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{24\sqrt{3}}{4\sqrt{21}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{6\sqrt{7}}{7}}.$$

Sem coordenadas. $V = \frac{1}{3}S_{DAB}\cdot DC$, com $S_{DAB} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\operatorname{sen} 60° = 4\sqrt{3}$, logo $V = 4\sqrt{3}$. Como $AB = 4$ (o triângulo DAB é equilátero) e $AC = BC = 5$, a altura de ABC relativa a $\overline{AB}$ vale $\sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$ e $S_{ABC} = 2\sqrt{21}$. Daí $d = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \frac{6\sqrt{7}}{7}$.

96. Seja a a aresta do triângulo equilátero comum e H a altura do prisma. As áreas totais valem

$$A_1 = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}, \qquad A_2 = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.$$

De $\frac{A_2}{A_1} = 2$:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH = 2a^2\sqrt{3} \implies 3aH = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \implies H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Os volumes são

$$V_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}, \qquad V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

logo

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3a^3}{8}\cdot\frac{12}{a^3\sqrt{2}} = \frac{36}{8\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{9\sqrt{2}}{4}} \approx 3{,}18.$$

97. [D] A geratriz do cone vale

$$g = \sqrt{R^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{13}}{2}, \qquad A_\ell = \pi R g = \frac{\pi R^2\sqrt{13}}{2}.$$

A fronteira entre luz e sombra é formada por *geratrizes*: um plano que passa pelo vértice V e pela fonte L separa luz de sombra exatamente quando é tangente ao cone. Ora, todo plano por V e L corta o plano do solo segundo uma reta que passa pelo ponto Q em que a reta VL fura esse plano.

Com o centro da base na origem, $V = (0, 0, \frac{3R}{2})$ e $L = (2R, 0, 3R)$, a reta VL atinge $z = 0$ em

$$Q = V - \big(L - V\big) = (-2R,\, 0,\, 0),$$

que dista $2R$ do centro da base. As tangentes traçadas de Q à circunferência da base tocam-na em pontos T com $\widehat{OQT}$ reto em T, de modo que

$$\cos\big(\widehat{TOQ}\big) = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \implies \widehat{TOQ} = 60^\circ.$$

Os dois pontos de tangência ficam, pois, a 60° de cada lado da direção $\overrightarrow{OQ}$, que aponta para o lado oposto ao da fonte. O arco iluminado é o que contém o ponto mais próximo da fonte, e mede

$$360^\circ - 2\cdot 60^\circ = 240^\circ.$$

Como a superfície lateral é proporcional ao arco de base,

$$S = \frac{240^\circ}{360^\circ}\, A_\ell = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi R^2\sqrt{13}}{2} = \boxed{\frac{\pi R^2\sqrt{13}}{3}}.$$

98. Ponha $QP = x$, de modo que $AP = \frac{a}{2} - x$ e $BP = \frac{a}{2} + x$. Nas faces que contêm $\overline{AB}$ os ângulos em A e em B medem 60°, logo as projeções de P satisfazem

$$AM = AM' = AP\cos 60^\circ = \frac{a - 2x}{4}, \qquad BN = BN' = BP\cos 60^\circ = \frac{a + 2x}{4}.$$

Escreva

$$\lambda = \frac{AM}{AC} = \frac{a - 2x}{4a}, \qquad \mu = \frac{BN}{BC} = \frac{a + 2x}{4a}, \qquad \text{com} \quad \lambda + \mu = \frac{1}{2}.$$

Como $MM' \parallel CD \parallel NN'$, os quatro pontos são coplanares. O sólido que contém $\overline{AB}$ decompõe-se em três tetraedros, e a razão de volumes de tetraedros com um triedro comum dá, sendo V o volume total,

$$\frac{[ABMM']}{V} = \lambda^2, \quad \frac{[BMM'N']}{V} = \lambda\mu(1-\lambda), \quad \frac{[BMN'N]}{V} = \mu^2(1-\lambda).$$

Somando e usando $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$,

$$\frac{V_1}{V} = \lambda^2 + \mu(1-\lambda)(\lambda+\mu) = \lambda^2 + \frac{\mu(1-\lambda)}{2} = \frac{5}{32} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{a^2}.$$

A parte que contém $\overline{AB}$ é a menor, logo deve valer $\frac{V}{5}$:

$$\frac{5}{32} + \frac{3x^2}{8a^2} = \frac{1}{5} \implies \frac{3x^2}{8a^2} = \frac{7}{160} \implies \frac{x^2}{a^2} = \frac{7}{60},$$

$$\boxed{QP = x = \frac{a\sqrt{105}}{30} \approx 0{,}3416\,a}.$$

Como $\frac{a}{2} - x \approx 0{,}158\,a > 0$, o ponto P fica de fato entre Q e A.

99. [D] De $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ segue $AB = AC$; com M ponto médio de $\overline{BC}$, a mediana $\overline{AM}$ é altura, isto é, $AM \perp BC$. Por hipótese também $AD \perp BC$; logo

$$BC \perp \text{plano } AMD,$$

e em particular $DM \perp BC$.

No triângulo ABM, retângulo em M, com $BM = 1$ e $B\widehat{A}M = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$,

$$AM = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 2 + \sqrt{3}.$$

Daí

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{2\,(2+\sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

A hipótese $M\widehat{A}D = M\widehat{D}A$ diz que o triângulo AMD é isósceles, com $MD = MA = 2 + \sqrt{3}$. Logo

$$S_{BCD} = \frac{BC \cdot DM}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

A reflexão no plano AMD troca B e C e fixa A e D, de modo que $S_{ABD} = S_{ACD}$; e a hipótese dá $S_{ACD} = S_{ABC} = 2 + \sqrt{3}$. Somando as quatro faces,

$$A_t = S_{ABC} + S_{BCD} + S_{ABD} + S_{ACD} = 4\big(2+\sqrt{3}\big)\ \text{cm}^2 \approx 14{,}93.$$

100. [E] Um tronco de pirâmide com 12 vértices tem 6 vértices em cada base: as bases são hexágonos regulares, de lados L e ℓ. Então

$$6L + 6\ell = 36 \implies L + \ell = 6,$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\big(L^2 + \ell^2\big) = 30\sqrt{3} \implies L^2 + \ell^2 = 20.$$

Daí $2L\ell = (L+\ell)^2 - (L^2+\ell^2) = 36 - 20 = 16$, isto é, $L\ell = 8$ — e, de fato, $L = 4$ e $\ell = 2$. As áreas das bases são $B_1 = 24\sqrt{3}$ e $B_2 = 6\sqrt{3}$, com $\sqrt{B_1 B_2} = \sqrt{144 \cdot 3} = 12\sqrt{3}$. Logo

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right) = \frac{3}{3}\left(24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) = \boxed{42\sqrt{3}\ \text{cm}^3} \approx 72{,}7.$$

101. [C] As retas traçadas são perpendiculares a α, de modo que $ABCD$ é a **projeção ortogonal** de $A'B'C'D'$ sobre α. Para uma figura plana contida em β, a projeção ortogonal sobre α multiplica as áreas pelo cosseno do diedro entre os dois planos, logo

$$\frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

qualquer que seja o quadrilátero — os dados sobre o trapézio apenas garantem que $A'B'C'D'$ é um quadrilátero verdadeiro.

102. [D] De $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ vem $AB = AC$: o triângulo ABC é isósceles, e a mediana $\overline{AM}$ é também altura. Com $BC = 2$ e $B\widehat{A}C = 30°$,

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{1}{\overline{AM}} \implies \overline{AM} = \operatorname{cotg} 15° = 2 + \sqrt{3}, \qquad [ABC] = \frac{2 \cdot \overline{AM}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Como $\overline{BC} \perp \overline{AM}$ e $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, a aresta $\overline{BC}$ é perpendicular ao plano AMD; em particular $\overline{BC} \perp \overline{MD}$ e B, C são simétricos em relação a esse plano, donde $[ABD] = [ACD]$.
De $M\widehat{A}D = M\widehat{D}A$ o triângulo AMD é isósceles, com $\overline{MD} = \overline{MA} = 2 + \sqrt{3}$; e como $\overline{MD} \perp \overline{BC}$,

$$[BCD] = \frac{BC \cdot \overline{MD}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Por hipótese $[ACD] = [ABC] = 2 + \sqrt{3}$. Somando as quatro faces,

$$\mathcal{A}_t = 4\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 14{,}93.$$

103. Com $A = (0,0,0)$, $B = (a,0,0)$, $C = (a,a,0)$, $D = (0,a,0)$ e $H = (0,a,a)$, o cone tem base de centro $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{a}{2}$, vértice $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right)$; a sua seção à altura z é o círculo de raio $\frac{a-z}{2}$. O plano ABH contém o eixo Ox e o ponto H, de modo que a sua equação é $z = y$.

Substituindo $z = y$ na equação do cone,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{(a-y)^2}{4} \implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{12},$$

uma elipse com $0 \le y \le \frac{2a}{3}$, inteiramente contida no cone. Na própria seção, o eixo Oy aparece esticado pelo fator $\sqrt{2}$ (porque $z = y$), de modo que os semieixos são

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3},$$

e a área vale

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{18} \approx 0{,}428\, a^2.}$$

104. [B] Em ADC, $AD^2 + DC^2 = 2 + 2 = 4 = AC^2$: o ângulo em D é reto e $[ADC] = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$. Em ABC, isósceles de lados $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ e 2, a altura relativa a $\overline{AC}$ vale $\sqrt{5-1} = 2$ e $[ABC] = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$. Logo a base tem área 3.

Ponha $A = (-1,0,0)$, $C = (1,0,0)$, $D = (0,-1,0)$, $B = (0,2,0)$ e $S = (0,-1,h)$, já que $\overline{SD}$ é a altura. Então $SA = \sqrt{2 + h^2}$ e $SB = \sqrt{9 + h^2}$, e

$$\sqrt{2+h^2} + \sqrt{9+h^2} = 7 \implies \sqrt{9+h^2} = 4 \implies h = \sqrt{7}$$

(de fato $3 + 4 = 7$). Portanto $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}$.

105. Ponha a origem em D e sejam $\vec{u} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DC}$, de módulo a e com $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{a^2}{2}$. Escrevendo $\overline{DE} = p$, $\overline{DF} = q$ e $\overline{DG} = s$, tem-se $E = \frac{p}{a}\vec{u}$, $F = \frac{q}{a}\vec{v}$, $G = \frac{s}{a}\vec{w}$, e um ponto $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ está no plano EFG exatamente quando

$$a\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{s}\right) = 1.$$

A altura tirada de D tem a direção do baricentro de ABC, isto é $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$; pondo $T = \lambda(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$ e substituindo,

$$\lambda = \frac{1}{a\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s}\right)}.$$

Como $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2 = 3a^2 + 2\cdot 3\cdot\frac{a^2}{2} = 6a^2$,

$$\overline{DT} = \lambda\, a\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s}},$$

que não depende da aresta. Com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{6}}$,

$$\boxed{\overline{DT} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = 6.}$$

106. Seja a a aresta da base e ℓ a aresta lateral. O ângulo do vértice é o ângulo do topo de cada face lateral, isósceles de lados ℓ, ℓ e base a; pela lei dos senos nessa face, o seu circunraio vale

$$\mathcal{R} = \frac{a}{2\operatorname{sen} 30^\circ} = a.$$

Falta escrever a em função de V. De $a = 2\ell\operatorname{sen} 15^\circ$ vem $\ell = \dfrac{a}{2\operatorname{sen} 15^\circ}$, e como o circunraio da base é $\frac{a}{\sqrt{3}}$,

$$h^2 = \ell^2 - \frac{a^2}{3} = a^2\left(\frac{1}{4\operatorname{sen}^2 15^\circ} - \frac{1}{3}\right) = a^2\left(2 + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{a^2\left(5+3\sqrt{3}\right)}{3},$$

usando $\operatorname{sen}^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. Então

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}} = \frac{a^3\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{12} \implies \boxed{\mathcal{R} = a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}} \approx 1{,}5547\sqrt[3]{V}.}$$

107. Com base de lado a e apótema da face lateral m, a área lateral é $2am$ e a da base, a^2; de $2am = 2a^2$ vem $m = a$, e a altura sai de $m^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ponha $A = (0,0,0)$, $B = (a,0,0)$, $C = (a,a,0)$, $D = (0,a,0)$ e $S = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Então $Q = \frac{S+D}{2} = \left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ e $P = \frac{S+C}{2} = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, de modo que

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{a}{4}\left(1, 3, \sqrt{3}\right), \qquad \overrightarrow{DP} = \frac{a}{4}\left(3, -1, \sqrt{3}\right),$$

ambos de módulo $\frac{a\sqrt{13}}{4}$, com produto escalar $\frac{3a^2}{16}$. Logo

$$\cos\theta = \frac{3/16}{13/16} = \frac{3}{13} \implies \boxed{\theta = \arccos\frac{3}{13} \approx 76^\circ 40'.}$$

108. Seja O o centro do hexágono. Os pontos médios M de $\overline{AB}$ e N de $\overline{BC}$ estão ambos à distância $\frac{3a}{4}$ de O, e a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é perpendicular a $\overline{OB}$: o plano de corte é o plano vertical que dista $\frac{3a}{4}$ do eixo da pirâmide, deixando B de um lado e o vértice do outro. O pedaço que contém B tem por base o triângulo MBN, de lados $\frac{a}{2}$ e ângulo $120°$:

$$[MBN] = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{sen}120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

À altura z, a seção da pirâmide é o hexágono homotético de razão $t = 1 - \frac{z}{h}$, e o pedaço além do plano é o triângulo de vértice correspondente a B, semelhante a MBN na razão $\frac{t-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 4t - 3$. Essa razão anula-se em $t = \frac{3}{4}$, isto é, na cota $z = \frac{h}{4}$: as seções do pedaço reduzem-se linearmente a um ponto, de modo que ele é uma pirâmide de base MBN e altura $\frac{h}{4}$. Logo

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{h}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}\,h}{192}.$$

Como o volume total é $\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}h}{2} = \frac{96\,a^2\sqrt{3}h}{192}$, o outro pedaço vale $\frac{95a^2\sqrt{3}h}{192}$ e

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{95}.}$$

109. Com $A = (0,0,0)$, $B = (\ell,0,0)$, $C = (\ell,\ell,0)$, $D = (0,\ell,0)$ e aresta lateral $\ell\sqrt{2}$, a altura sai de $h^2 + \frac{\ell^2}{2} = 2\ell^2$: $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$ e $V = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}, \frac{\ell\sqrt{6}}{2}\right)$. O ponto médio de $\overline{VC}$ é $M = \left(\frac{3\ell}{4}, \frac{3\ell}{4}, \frac{\ell\sqrt{6}}{4}\right)$, e o plano por A e M paralelo a $\overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$ tem normal $(-1,1,0)\times\overrightarrow{AM}$, o que dá $x + y = \sqrt{6}\,z$.
Esse plano deixa V de um lado e B, C, D do outro, e passa por A: ele corta $\overline{VB}$ e $\overline{VD}$ a $\frac{2}{3}$ de V e $\overline{VC}$ no meio. A seção é o quadrilátero $APMQ$ com

$$P = \left(\frac{5\ell}{6}, \frac{\ell}{6}, \frac{\ell\sqrt{6}}{6}\right), \qquad Q = \left(\frac{\ell}{6}, \frac{5\ell}{6}, \frac{\ell\sqrt{6}}{6}\right).$$

As diagonais $\overline{AM}$ e $\overline{PQ}$ são perpendiculares, com $\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$ e $\overline{PQ} = \frac{2\ell\sqrt{2}}{3}$, logo

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{PQ}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ell\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2\ell\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{3}}.$$

110. Sejam R o raio comum, h a altura (a mesma para os dois sólidos, pois o vértice do cone está no centro da outra base) e α o ângulo entre o eixo e a geratriz, de modo que $h = R\operatorname{cotg}\alpha$ e $g = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}$. Então

$$\frac{\mathcal{A}_{\text{cil}}}{\mathcal{A}_{\text{cone}}} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{\pi R^2 + \pi Rg} = \frac{2\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha + 1} = \frac{7}{4},$$

donde $\operatorname{sen}\alpha + 8\cos\alpha = 7$. Elevando ao quadrado, $65\cos^2\alpha - 112\cos\alpha + 48 = 0$, com raízes $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ e $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; a primeira dá $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e se descarta. Logo

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \implies \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 36°52'.}$$

111. Com base de n lados e circunraio R, a área da base é $\frac{n}{2}R^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$ e a altura, $h = \sqrt{\ell^2 - R^2}$. O produto pedido é

$$P = V \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} R^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \cdot \left(\ell^2 - R^2\right) = \frac{n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{6} R^2 \left(\ell^2 - R^2\right).$$

O fator $R^2\left(\ell^2 - R^2\right)$ é um produto de dois números de soma constante ℓ^2, máximo quando são iguais:

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}, \qquad R^2\left(\ell^2 - R^2\right) = \frac{\ell^4}{4},$$

e portanto

$$\boxed{P_{\max} = \frac{n\,\ell^4}{24} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.}$$

112. Sejam R o raio da base do cone, h a sua altura e $g = \sqrt{R^2 + h^2}$. O raio da esfera inscrita é o inraio do triângulo meridiano, de base $2R$ e altura h:

$$\varrho = \frac{Rh}{R + g}.$$

O cilindro circunscrito à esfera tem raio ϱ e altura 2ϱ, logo

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{2\pi\varrho^3} = \frac{(R+g)^3}{6Rh^2}.$$

Pondo $s = \frac{g}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2} > 1$, tem-se $\left(\frac{h}{R}\right)^2 = s^2 - 1$ e

$$k = \frac{(1+s)^3}{6\left(s^2-1\right)} = \frac{(1+s)^2}{6\left(s-1\right)}.$$

Derivando, $\frac{d}{ds}\frac{(s+1)^2}{s-1} = \frac{(s+1)(s-3)}{(s-1)^2}$, que se anula em $s = 3$ (mínimo). Logo $h = 2R\sqrt{2}$ e

$$\boxed{k_{\min} = \frac{16}{6 \cdot 2} = \frac{4}{3}.}$$

113. Como $\overline{CD} \perp$ plano ABC, os triângulos DCA e DCB são retângulos em C. Com $CD = 10\sqrt{3}$,

$$CA = CD \operatorname{tg} 60^\circ = 30, \quad CB = CD \operatorname{tg} 30^\circ = 10, \quad DA = \frac{CD}{\cos 60^\circ} = 20\sqrt{3}, \quad DB = \frac{CD}{\cos 30^\circ} = 20.$$

No triângulo ADB, com $A\widehat{D}B = 60^\circ$,

$$AB^2 = 1200 + 400 - 2 \cdot 20\sqrt{3} \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 1600 - 400\sqrt{3}.$$

Então, em ABC,

$$\cos A\widehat{C}B = \frac{900 + 100 - \left(1600 - 400\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 30 \cdot 10} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}, \qquad \operatorname{sen}^2 A\widehat{C}B = \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3},$$

de modo que $[ABC] = \frac{30 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3\left(\sqrt{3}-1\right)}}{3} = 100\sqrt{3\sqrt{3} - 3}$ e

$$V = \frac{1}{3}[ABC]\,CD = \frac{1000\sqrt{3}}{3}\sqrt{3\left(\sqrt{3}-1\right)} = \boxed{1000\sqrt{\sqrt{3}-1} \approx 855{,}6}.$$

114. Dizer que os dois cones são *opostos pelo vértice* é dizer que as suas superfícies laterais prolongam-se uma na outra: eles têm o mesmo ângulo, logo $\frac{R}{h_1} = \frac{r}{h_2}$, e de $h_1 + h_2 = H$ vem $h_1 = \frac{HR}{R+r}$ e $h_2 = \frac{Hr}{R+r}$. Assim

$$V_{\text{cones}} = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h_1 + r^2 h_2\right) = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{R^3 + r^3}{R+r} = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 - Rr + r^2\right),$$

enquanto $V_{\text{tronco}} = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$. Logo, com $m = \frac{R}{r}$,

$$K = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 - Rr + r^2} = \frac{m^2 + m + 1}{m^2 - m + 1},$$

isto é $(K-1)\,m^2 - (K+1)\,m + (K-1) = 0$ e

$$\boxed{m = \frac{(K+1) + \sqrt{(3-K)\,(3K-1)}}{2\,(K-1)}, \qquad 1 < K \leq 3.}$$

A outra raiz é $\frac{1}{m}$, que corresponde a trocar R por r.

115. Seja α o semiângulo do cone e V o seu vértice. Uma esfera de raio ϱ inscrita tem centro à distância $\frac{\varrho}{\operatorname{sen}\alpha}$ de V, e as duas esferas são tangentes exteriormente:

$$\frac{R-r}{\operatorname{sen}\alpha} = R + r \implies \operatorname{sen}\alpha = \frac{R-r}{R+r}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{4Rr}{(R+r)^2}.$$

O círculo de contato da esfera de raio ϱ tem raio $\varrho\cos\alpha$, e o comprimento da tangente de V a essa esfera vale $\varrho\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; logo a geratriz do tronco mede $g = (R-r)\,\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ e

$$\mathcal{A}_\ell = \pi\,(R\cos\alpha + r\cos\alpha)\,g = \pi\,(R+r)\,(R-r)\,\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \pi\,(R+r)\,(R-r)\cdot\frac{4Rr}{(R+r)^2}\cdot\frac{R+r}{R-r},$$

isto é

$$\boxed{\mathcal{A}_\ell = 4\pi Rr.}$$

116. No cone equilátero a seção meridiana é um triângulo equilátero, de modo que o semiângulo vale $\alpha = 30°$. Uma esfera inscrita de raio ϱ tem centro à distância $\frac{\varrho}{\operatorname{sen}\alpha} = 2\varrho$ do vértice, e o comprimento da tangente tirada do vértice vale $\sqrt{4\varrho^2 - \varrho^2} = \varrho\sqrt{3}$. Com $\varrho_1 = R$ e $\varrho_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R = \left(2-\sqrt{3}\right)R$, as duas esferas não se tocam (os centros distam $2R\left(\sqrt{3}-1\right) > R + \varrho_2$).

O plano tangente às duas é, por isso, um plano secante, e as duas esferas são as **esferas de Dandelin** da seção: ela é uma elipse cujos focos são os pontos de tangência. Para um ponto P da elipse, a soma das distâncias aos focos é a distância, medida sobre a geratriz por P, entre as duas circunferências de contato; logo o eixo maior vale

$$2a = R\sqrt{3} - \left(2-\sqrt{3}\right)R\sqrt{3} = R\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right) = \boxed{\left(3-\sqrt{3}\right)R \approx 1{,}268\,R},$$

que é o maior segmento possível ligando dois pontos da curva.

117. **(a)** O triângulo equilátero circunscrito ao círculo de raio r tem inraio r, logo circunraio $2r$ e lado $2r\sqrt{3}$. Para que $VABC$ seja regular é preciso $\overline{VA} = AB$:

$$h^2 + (2r)^2 = \left(2r\sqrt{3}\right)^2 = 12r^2 \implies h^2 = 8r^2 \implies \boxed{h = 2r\sqrt{2}}.$$

(b) Os dois planos tangentes ao cone que passam por $\overline{VA}$ cortam o plano da base nas duas tangentes tiradas de A ao círculo, de pontos de contato T_1 e T_2. O sólido pedido é, portanto, o cone de vértice V sobre a região plana limitada por $\overline{AT_1}$, $\overline{AT_2}$ e pelo arco T_1T_2 mais próximo de A.

Como $\overline{AO} = 2r$ e $\overline{OT_i} = r$, os triângulos AT_iO são retângulos com $\overline{AT_i} = r\sqrt{3}$ e $A\widehat{O}T_i = 60°$; o setor correspondente tem $120°$. Logo a região vale

$$\mathcal{S} = 2 \cdot \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{2} = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3},$$

e

$$V = \frac{1}{3}\,\mathcal{S}\,h = \frac{1}{3}\left(r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3}\right) 2r\sqrt{2} = \boxed{\frac{2r^3\sqrt{2}\,(3\sqrt{3} - \pi)}{9} \approx 0{,}646\, r^3.}$$

118. Como $\overline{AB} \perp \pi$ e $\overline{BC} \perp Ox$, o teorema das três perpendiculares dá $\overline{AC} \perp Ox$: C é o pé da perpendicular baixada de A sobre Ox.

(a) Todas as quatro faces são **triângulos retângulos**: OAC e OBC são retos em C; OAB e ABC são retos em A, pois $\overline{AB} \perp \pi$.

(b) $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = a$, $\overline{OC} = a\cos\alpha$, $\overline{AC} = a\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $\overline{OB} = a\sqrt{2}$ e $\overline{BC} = a\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2\,\alpha}$.

(c) Como $\overline{AB}$ é perpendicular ao plano OAC,

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{OC} \cdot \overline{AC}}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha = \frac{a^3}{12}\,\mathrm{sen}\,2\alpha.$$

(d) $\frac{a^3}{12}\,\mathrm{sen}\,2\alpha = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ dá $\mathrm{sen}\,2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, isto é $\boxed{\alpha = 30° \text{ ou } \alpha = 60°}$.

(e) Os dois tetraedros têm em comum a face OAB; cada um é o cone de vértice B sobre o seu triângulo de base, OAC_1 ou OAC_2, de modo que o sólido comum é o cone de vértice B sobre a interseção dos dois triângulos. Com O na origem e $A = (a, 0, 0)$,

$$C_\alpha = \left(a\cos^2\alpha,\ a\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha,\ 0\right),$$

donde $C_1 = \left(\frac{3a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ e $C_2 = \left(\frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$. As retas $\overline{OC_1}$ e $\overline{AC_2}$ cortam-se em $P = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, e a interseção dos dois triângulos é OAP, de área $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. Como $\overline{AB}$ é perpendicular ao plano e mede a,

$$V_{\text{comum}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot a = \boxed{\frac{a^3\sqrt{3}}{36}},$$

que é $\frac{2}{3}$ do volume de cada tetraedro.

119. Ponha A na origem, $B=(a,0,0)$, $C=(0,a,0)$, $B'=(a,0,a)$ e $C'=(0,a,a)$.

(a) A base $BCC'B'$ é um retângulo $a\sqrt{2}\times a$, de área $a^2\sqrt{2}$. As faces laterais são: ABC, retângulo isósceles de catetos a, área $\frac{a^2}{2}$; ABB' e ACC', retângulos de catetos a e a, área $\frac{a^2}{2}$ cada; e $AB'C'$, com $\overline{AB'}=\overline{AC'}=\overline{B'C'}=a\sqrt{2}$, equilátero de área $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Somando,

$$\mathcal{A}_t = a^2\sqrt{2}+\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}{2}\approx 3{,}780\,a^2}.$$

(b) O plano $BCC'B'$ é $x+y=a$, que dista $\frac{a}{\sqrt{2}}$ de A, logo

$$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\sqrt{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{a^3}{3}}.$$

(c)(d) Os cinco pontos são cinco vértices do cubo de aresta a determinado por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e pela vertical; logo pertencem à esfera circunscrita a esse cubo, de centro no seu centro $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ e raio

$$\mathcal{R}=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

o que se confirma calculando as cinco distâncias. ■

120. Uma esfera tangente aos planos de todas as faces tem centro no eixo, digamos à cota z, e raio $\varrho=|z|$ (tangência ao plano da base). Sendo $m=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ o apótema da base e $g=\sqrt{h^2+m^2}$, o plano de uma face lateral é $hy+mz=hm$, cuja distância a $(0,0,z)$ vale $\frac{m|z-h|}{g}$. Impondo a igualdade com $|z|$ obtêm-se exatamente duas soluções:

$$z_1=\frac{mh}{m+g}\in(0,h)\qquad\text{e}\qquad z_2=-\frac{mh}{g-m}<0,$$

isto é, a esfera **inscrita** e uma esfera **exinscrita**, do outro lado do plano da base (a possibilidade $z>h$ leva a contradição). Os raios são

$$\varrho_1=\frac{mh}{m+g},\qquad \varrho_2=\frac{mh}{g-m},$$

e

$$\varrho_1\varrho_2=\frac{m^2h^2}{g^2-m^2}=\frac{m^2h^2}{h^2}=m^2=\boxed{\frac{3\ell^2}{4}},$$

que não depende de h. ■

121. Sejam ABC a base inferior e $A'B'C'$ a superior, homótetica da primeira na razão k. Chamando G e G' os baricentros das duas bases, $A'=G'+k\,(A-G)$ e analogamente para B' e C'. O ponto médio de $\overline{B'C'}$ é

$$M_A=\frac{B'+C'}{2}=G'+k\left(\frac{B+C}{2}-G\right)=G'-\frac{k}{2}\,(A-G)\,,$$

pois $\frac{B+C}{2}-G=-\frac{1}{2}\,(A-G)$. Escrevendo $A=G+\vec{u}$, um ponto da reta $\overline{AM_A}$ é

$$A+t\,(M_A-A)=G+t\,\big(G'-G\big)+\vec{u}\left[1-t\left(1+\tfrac{k}{2}\right)\right],$$

que deixa de depender de $\vec{u}$ exatamente para $t=\dfrac{2}{2+k}$. Para esse valor as três retas passam pelo mesmo ponto

$$G+\frac{2}{2+k}\,\big(G'-G\big)\,,$$

situado sobre a reta dos baricentros. ■

122. Como $\overline{BC}$ é diâmetro, $B\widehat{A}C = 90°$; com $A\widehat{B}C = \theta$,

$$\overline{AB} = 2r\cos\theta, \quad \overline{AC} = 2r\operatorname{sen}\theta, \quad \overline{BC} = 2r, \quad \overline{AV} = 2r,$$

e, como $\overline{AV}$ é perpendicular ao plano,

$$\overline{VB} = 2r\sqrt{1+\cos^2\theta}, \qquad \overline{VC} = 2r\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}.$$

(b) A soma dos quadrados vale $4r^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 1 + 1 + 1 + \cos^2\theta + 1 + \operatorname{sen}^2\theta\right) = 24r^2$, constante. ■

(c) Como A é a projeção de V sobre π, o teorema das três perpendiculares dá $\overline{VH} \perp \overline{BC} \iff \overline{AH} \perp \overline{BC}$: H é o pé da perpendicular baixada de A sobre uma reta que passa por O, e o lugar geométrico é a **circunferência de diâmetro** $\overline{OA}$.

(d) $\overline{AH} = \overline{AB}\operatorname{sen}\theta = r\operatorname{sen}2\theta$ e

$$[VBC] = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{\overline{AV}^2 + \overline{AH}^2} = r\sqrt{4r^2 + r^2\operatorname{sen}^2 2\theta},$$

máxima para $\theta = 45°$, isto é com $\overline{BC} \perp \overline{OA}$, valendo $r^2\sqrt{5}$.

(e) No triângulo VAH, reto em A, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{AV}}{\overline{AH}} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}2\theta}$.

(f) α é o próprio diedro de aresta $\overline{BC}$, e é mínimo quando $\operatorname{sen}2\theta = 1$: $\theta = 45°$, com $\alpha = \operatorname{arctg}2$.

(g) $\dfrac{2}{\operatorname{sen}2\theta} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ dá $\operatorname{sen}2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, isto é $\boxed{\theta = 30° \text{ ou } \theta = 60°}$.

123. O centro está no eixo, à cota z. A distância dele à reta de uma aresta da base, que está a $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ do eixo no plano $z = 0$, vale $\sqrt{m^2 + z^2}$. Já a distância à reta de uma aresta lateral, que liga $(\ell, 0, 0)$ a $(0, 0, h)$, vale $\dfrac{\ell\,(h - z)}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}$. Igualando e simplificando,

$$4h^2z^2 + 8\ell^2hz + 3\ell^4 - \ell^2h^2 = 0 \implies z = \frac{\ell\left(\sqrt{\ell^2 + h^2} - 2\ell\right)}{2h},$$

tomada a raiz positiva. O centro existe (isto é, $z > 0$) exatamente quando $\sqrt{\ell^2 + h^2} > 2\ell$, ou seja

$$\boxed{h > \ell\sqrt{3}},$$

e o raio da esfera é $\varrho = \dfrac{\ell\,(h - z)}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}$. Para $h \le \ell\sqrt{3}$ não existe esfera tangente às doze arestas.

124. Se o cone tem semiângulo β e o plano secante faz ângulo φ com o eixo, a excentricidade da seção vale $e = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}$. Com $\varphi = 45°$ e $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\cos\beta = \frac{\cos 45°}{\sqrt{2/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \beta = 30°.$$

No plano meridiano perpendicular ao plano secante, ponha V na origem e o eixo em Oz; as geratrizes são $t\,(\operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$ e $-s\,(\operatorname{sen}\beta, -\cos\beta)$, e a corda que elas determinam na reta do plano secante é o eixo maior, de comprimento $2a$. A condição de essa corda fazer 45° com o eixo dá $s + t = \sqrt{3}\,(s - t)$, isto é $s = \left(2 + \sqrt{3}\right)t$, e

$$2a = t\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \implies t^2 = \frac{4a^2}{6 + 3\sqrt{3}}.$$

A distância de V à corda vale $\dfrac{ts\,\mathrm{sen}\,2\beta}{2\cdot 2a}\cdot 2=\dfrac{\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})\,t^2}{4a}$, e substituindo t^2,

$$d=\frac{\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})}{4a}\cdot\frac{4a^2}{3\,(2+\sqrt{3})}=\boxed{\frac{a\sqrt{3}}{3}}.$$

125. Ponha $V=\left(0,0,\frac{3b}{2}\right)$, $A=(b,0,0)$, $B=\left(\frac{b}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2},0\right)$ e $C=\left(-\frac{b}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2},0\right)$. Como $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{VB}=0$, o plano por A e C perpendicular a $\overline{VB}$ existe. Escrevendo $M=V+\lambda\,(B-V)$ e impondo $(M-A)\cdot(B-V)=0$,

$$\lambda=\frac{11}{13},\qquad M=\left(\frac{11b}{26},\frac{11b\sqrt{3}}{26},\frac{3b}{13}\right).$$

(a) $\overline{AM}=\dfrac{b}{26}\sqrt{225+363+36}=\dfrac{4b\sqrt{39}}{26}=\boxed{\dfrac{2b\sqrt{39}}{13}\approx 0{,}961\,b}$.

(b) A base ABC está no plano $z=0$ e tem área $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; a altura da pirâmide de vértice M é a cota de M, $\frac{3b}{13}$. Logo

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3b}{13}=\boxed{\frac{b^3\sqrt{3}}{52}}.$$

126. **(a)** A seção de um cone de semiângulo β por um plano que faz ângulo φ com o eixo tem excentricidade $e=\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$; quando φ varia de β a $90°$, e percorre todo o intervalo $[0,1)$. Dada a elipse de semieixos a e b, basta escolher φ com $\cos\varphi=\cos\beta\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ e, em seguida, afastar o plano do vértice até que o eixo maior valha $2a$ — a homotetia de centro V ajusta o tamanho sem mudar a forma. ■

(b) No plano meridiano, ponha V na origem e o eixo em Oz, com $A=p\,(\mathrm{sen}\,\beta,\cos\beta)$ e $B=q\,(-\mathrm{sen}\,\beta,\cos\beta)$, $p=\overline{VA}$, $q=\overline{VB}$. O centro da elipse é $\frac{A+B}{2}$, de cota $z_c=\frac{p+q}{2}\cos\beta$ e à distância $x_c=\frac{p-q}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta$ do eixo. O semieixo menor é perpendicular ao plano meridiano, logo é a meia-corda, pelo centro, do círculo que o cone determina na cota z_c, de raio $z_c\,\mathrm{tg}\,\beta$:

$$b^2=z_c^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta-x_c^2=\mathrm{sen}^2\,\beta\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]=pq\,\mathrm{sen}^2\,\beta,$$

isto é $\overline{VA}\cdot\overline{VB}=b^2\,\mathrm{cosec}^2\,\beta$. ■

127. Ponha π em $z=0$ e π' em $z=h$, com o vértice de c em π e o de c' em π'; sendo β o semiângulo comum, as duas bases têm raio $R=h\,\mathrm{tg}\,\beta$. À distância x de π,

$$r=x\,\mathrm{tg}\,\beta\quad(\text{em } c),\qquad r'=(h-x)\,\mathrm{tg}\,\beta\quad(\text{em } c').$$

(a) A soma dos perímetros vale $2\pi\,(r+r')=2\pi h\,\mathrm{tg}\,\beta=2\pi R$: constante. ■

(b) A soma das áreas é $\pi\,\mathrm{tg}^2\,\beta\left[x^2+(h-x)^2\right]$ e a área da base é $\pi h^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta$, de modo que, com $u=\frac{x}{h}$,

$$m=u^2+(1-u)^2=2u^2-2u+1\implies\boxed{x=\frac{h}{2}\left(1\pm\sqrt{2m-1}\right).}$$

Como $u\in[0,1]$, m varia de $\frac{1}{2}$ (em $u=\frac{1}{2}$) a 1 (em $u=0$ ou $u=1$):

$$\frac{1}{2}\le m\le 1.$$

128. **(III)** Um plano perpendicular a uma geratriz faz com o eixo o ângulo $90^\circ - \beta$, de modo que a seção tem $e = \frac{\cos(90^\circ-\beta)}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$. Ser equilátera significa $e = \sqrt{2}$, logo

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(I) Entre todas as seções, $e = \frac{\cos\varphi}{\cos\beta}$ é máxima para $\varphi = 0$, isto é para um plano **paralelo ao eixo**, e vale $e = \frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{3}$.

(II) Com V na origem, o cone é $x^2 + y^2 = 2z^2$ e o plano, paralelo ao eixo e a 6 de V, é $x = 6$. Substituindo,

$$36 + y^2 = 2z^2 \implies \frac{z^2}{18} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Trata-se da hipérbole de

$$\boxed{\text{eixo real } 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}, \quad \text{eixo imaginário } 12, \quad e = \sqrt{1 + \tfrac{36}{18}} = \sqrt{3}}$$

— a excentricidade confirma o item (I).

129. Calota de altura h numa esfera de raio R: área $2\pi Rh$; o círculo-base tem raio r com $r^2 = h(2R - h)$. A condição é

$$2\pi Rh = 2\pi r^2 = 2\pi h(2R - h) \implies R = 2R - h \implies h = R.$$

A calota é, portanto, uma **semiesfera**, e o raio do círculo-base é $r = \sqrt{R(2R - R)} = R$.

130. **O raio.** O centro da esfera equidista das seis arestas; por simetria, ele é o centro O do tetraedro. Duas arestas opostas de um tetraedro regular são perpendiculares e a distância entre elas é o segmento que une os seus pontos médios, de comprimento $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, cujo ponto médio é O. Logo cada ponto médio de aresta dista $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ de O, e essa distância é a menor de O a cada aresta:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{4}}$$

A esfera toca, portanto, as seis arestas exatamente nos seus pontos médios.

a) Volume da esfera.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3\,2\sqrt{2}}{64} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}}$$

b) Parte interior ao tetraedro. O apótema do tetraedro — distância de O a cada face — é a quarta parte da altura $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$:

$$r = \frac{H}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Como

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{12} > \frac{a\sqrt{6}}{12} = r,$$

a esfera atravessa as quatro faces, e cada uma delas destaca uma calota de altura

$$h = R - r = \frac{3a\sqrt{2} - a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{12}.$$

O círculo de contato de cada calota com o plano da face tem raio

$$\rho = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

que é exatamente o raio do círculo inscrito na face — coerente com a tangência nos pontos médios das arestas. As quatro calotas são, pois, duas a duas tangentes (tocam-se apenas nos pontos médios das arestas comuns) e não se superpõem:

$$V_{\text{int}} = V - 4V_{\text{calota}}.$$

Com $V_{\text{calota}} = \pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3}\right)$:

$$h^2 = \frac{a^2\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)^2}{144} = \frac{a^2\left(24 - 12\sqrt{3}\right)}{144} = \frac{a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{12},$$

$$R - \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)}{36} = \frac{a\left(6\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{36},$$

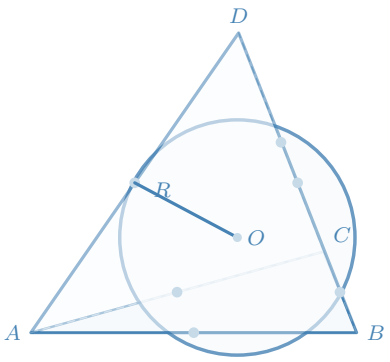
$$V_{\text{calota}} = \pi\,\frac{a^3\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{432} = \frac{\pi a^3\left(9\sqrt{2} - 4\sqrt{6}\right)}{432},$$

onde se usou $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = 9\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$. Portanto

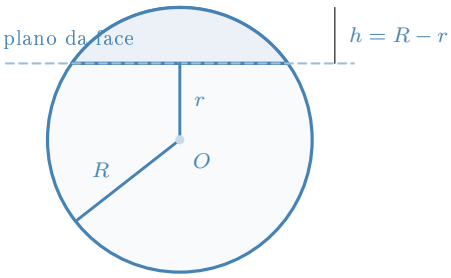
$$V_{\text{int}} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24} - \frac{\pi a^3\left(9\sqrt{2} - 4\sqrt{6}\right)}{108} = \frac{\pi a^3\left(9\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 8\sqrt{6}\right)}{216},$$

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{\pi a^3\left(8\sqrt{6} - 9\sqrt{2}\right)}{216}}$$

Numericamente $V_{\text{int}} \approx 0{,}0999\,a^3$, contra $V \approx 0{,}1851\,a^3$: cerca de 54% da esfera fica dentro do tetraedro.



(a) tangente às seis arestas



(b) a calota que cada face destaca

131. Seja V o vértice e A, B, C os pontos de tangência das três arestas. Os segmentos tangentes tirados de V são iguais, $\overline{VA}=\overline{VB}=\overline{VC}=t$, e cada triângulo VAB, VBC, VCA é isósceles com ângulo 60° no vértice: logo é equilátero e $AB=BC=CA=t$. Portanto $VABC$ é um **tetraedro regular de aresta** t.

Ponha V na origem com o eixo de simetria em Oz: A, B, C estão no plano $z=h=t\sqrt{\frac{2}{3}}$, sobre a circunferência de raio $\varrho=\frac{t}{\sqrt{3}}$, e o centro O está no eixo, em $(0,0,z_0)$. A tangência dá $\overline{OA}\perp\overline{VA}$, isto é $(A-O)\cdot A=0$, ou $|A|^2=z_0h$; como $|A|^2=\varrho^2+h^2=t^2$,

$$z_0=\frac{t^2}{h}=t\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

De $R^2=\varrho^2+(h-z_0)^2=\frac{t^2}{3}+\frac{t^2}{6}=\frac{t^2}{2}$ vem $t=R\sqrt{2}$, e

$$\overline{VO}^2=t^2+R^2=3R^2\implies \overline{VO}=R\sqrt{3}.$$

O vértice dista sempre $R\sqrt{3}$ do centro: o lugar geométrico está contido na **superfície esférica de centro O e raio $R\sqrt{3}$**, concêntrica com a dada. ■

132. Cilindro equilátero. Altura igual ao diâmetro da base: $h=2\varrho$. Inscrito na esfera, $\varrho^2+\varrho^2=R^2$, donde $\varrho=\frac{R}{\sqrt{2}}$ e

$$A_{\text{cil}}=2\pi\varrho^2+2\pi\varrho\,(2\varrho)=6\pi\varrho^2=3\pi R^2.$$

Cone equilátero. A sua seção meridiana é um triângulo equilátero inscrito no círculo máximo, de lado $R\sqrt{3}$; logo o raio da base é $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ e a geratriz, $R\sqrt{3}$:

$$A_{\text{cone}}=\pi\frac{3R^2}{4}+\pi\frac{R\sqrt{3}}{2}R\sqrt{3}=\frac{3\pi R^2}{4}+\frac{3\pi R^2}{2}=\frac{9\pi R^2}{4}.$$

Com $A_{\text{esf}}=4\pi R^2$,

$$\sqrt{A_{\text{esf}}\cdot A_{\text{cone}}}=\sqrt{4\pi R^2\cdot\frac{9\pi R^2}{4}}=3\pi R^2=A_{\text{cil}}.\qquad\blacksquare$$

133. Com $A=(0,0)$, $B=(2R,0)$ e centro $O=(R,0)$: como $A\widehat{C}B=90^\circ$, $\overline{AC}=2R\cos 30^\circ=R\sqrt{3}$ e $C=\left(\frac{3R}{2},\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. A tangente em C é perpendicular a $\overline{OC}$ e corta AB em $D=(3R,0)$.

(a) O triângulo ACD tem dois vértices sobre o eixo (A e D) e o terceiro à distância $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ dele: a rotação produz dois cones de mesma base, de raio $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ e alturas somando $\overline{AD}=3R$. Logo

$$V_S=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot 3R=\boxed{\frac{3\pi R^3}{4}}.$$

(b) Em $x=\frac{R}{3}$ a seção da esfera é o círculo de raio $\sqrt{R^2-\left(R-\frac{R}{3}\right)^2}=\frac{R\sqrt{5}}{3}$. A seção de S está no primeiro cone, cujo raio cresce linearmente de 0 em $x=0$ a $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ em $x=\frac{3R}{2}$, ou seja vale $\frac{x}{\sqrt{3}}$; em $x=\frac{R}{3}$ dá $\frac{R\sqrt{3}}{9}$. Portanto

$$\frac{\mathcal{A}_E}{\mathcal{A}_S}=\left(\frac{R\sqrt{5}/3}{R\sqrt{3}/9}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2=\boxed{15}.$$

134. **(a)** Em coordenadas cilíndricas de eixo $\overleftrightarrow{OV}$, um ponto P de π tem $\overline{OP} = \varrho$ e o seu correspondente tem cota $z = k\varrho$: a superfície S é $z = k\varrho$, isto é, uma **superfície cônica de revolução** de vértice O e eixo $\overleftrightarrow{OV}$, cujo semi-ângulo β satisfaz $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{k}$. As seções por planos que contêm o eixo são pares de geratrizes (duas retas por O); as seções por planos perpendiculares ao eixo são circunferências centradas no eixo. O plano tangente em P_1 é o plano determinado pela geratriz $\overleftrightarrow{OP_1}$ e pela tangente, em P_1, ao paralelo que passa por P_1 — e ele toca a superfície ao longo de toda a geratriz.

(b) Como Q está no eixo, a sua distância a *todas* as geratrizes é a mesma, $\overline{QN} = h\operatorname{sen}\beta$: a esfera E é a esfera inscrita no cone e a curva comum a E e S é a **circunferência de contato**. Escrevendo $u = \sqrt{1+k^2}$, tem-se $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{u}$, $\cos\beta = \frac{k}{u}$ e

$$\overline{QN} = \frac{h}{u}, \qquad \overline{ON} = h\cos\beta = \frac{hk}{u},$$

de modo que a circunferência de contato está no plano $z = h\cos^2\beta = \frac{hk^2}{u^2}$ e tem raio $h\operatorname{sen}\beta\cos\beta = \frac{hk}{u^2}$. O volume entre as duas superfícies é o do cone, do vértice até o plano de contato, menos o da calota de E abaixo desse plano:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^2k^2}{u^4}\cdot\frac{hk^2}{u^2} = \frac{\pi h^3k^4}{3u^6},$$

$$V_{\text{calota}} = \frac{\pi}{3}\,\frac{h^2(u-1)^2}{u^4}\left(\frac{3h}{u} - \frac{h(u-1)}{u^2}\right) = \frac{\pi h^3(u-1)^2(2u+1)}{3u^6}.$$

Como $k^2 = u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$,

$$k^4 - (u-1)^2(2u+1) = (u-1)^2\left[(u+1)^2 - (2u+1)\right] = (u-1)^2u^2,$$

e portanto

$$\boxed{V = \frac{\pi h^3}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+k^2}-1\right)^2}{\left(1+k^2\right)^2}.}$$

135. **(a)** Em qualquer tetraedro as três bimedianas concorrem no baricentro $G = \frac{1}{4}(V+A+B+D)$. Como $\overline{BD}$ é diâmetro, $B + D = 2O$, de modo que $G = \frac{1}{4}(V + A + 2O)$ não depende da posição de $\overline{BD}$: o ponto de encontro é fixo. ■

(b) $\overline{VA}$ é perpendicular a π e $\overline{BD} \subset \pi$, logo $\overline{VA} \perp \overline{BD}$. Para os outros dois pares, escreva $V = A + x\,\vec{n}$ com $\vec{n} \perp \pi$; então

$$\overrightarrow{BV}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{BA} + x\vec{n}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD},$$

que é nulo porque $B\widehat{A}D = 90°$ ($\overline{BD}$ é diâmetro). O mesmo vale para $\overline{VD}$ e $\overline{AB}$: o tetraedro é **ortocêntrico**. ■

(c) Seja H o pé da altura tirada de V no triângulo VBD. Como A é a projeção de V sobre π, o teorema das três perpendiculares dá $\overline{VH} \perp \overline{BD} \iff \overline{AH} \perp \overline{BD}$: H é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BD}$, que passa por O. O lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas de A às retas que passam por O é a **circunferência de diâmetro** $\overline{OA}$ — de centro no ponto médio de $\overline{OA}$ e raio $\frac{r}{2}$.

(d) A, B e D estão em c, logo o centro da esfera circunscrita está na perpendicular a π por O: é um ponto (O, z). De $r^2 + z^2 = r^2 + (x-z)^2$ vem $z = \frac{x}{2}$, e

$$\boxed{\text{centro: na vertical por } O,\ \text{altura } \frac{x}{2}; \qquad \mathcal{R} = \sqrt{r^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r^2+x^2}}{2}.}$$

136. Os três segmentos tangentes tirados de V são iguais, $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = t$. Ponha V na origem com as três retas sobre os eixos: $A = (t,0,0)$, $B = (0,t,0)$, $C = (0,0,t)$. A tangência dá $(O - A) \cdot A = 0$, isto é $O \cdot A = t^2$, donde a primeira coordenada de O vale t; o mesmo para as outras duas, de modo que $O = (t,t,t)$. Então

$$r^2 = \overline{OA}^2 = 2t^2 \implies t = \frac{r}{\sqrt{2}}, \qquad x = \overline{VO} = t\sqrt{3} = \boxed{\frac{r\sqrt{6}}{2}} \approx 1{,}2247\, r > r.$$

O plano VAB é o plano $z = 0$, que dista $t = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ do centro. A seção é, portanto, o círculo de raio

$$\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \boxed{\frac{r\sqrt{2}}{2}},$$

e a calota correspondente (a menor) tem altura

$$r - \frac{r\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{r\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}} \approx 0{,}293\, r.$$

137. [E] A reta está a 3 do baricentro e o circunraio do triângulo vale $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$, de modo que o eixo não corta a figura. Pelo teorema de Pappus para superfícies, $S = 2\pi\, \bar{d}\, L$, em que $L = 6$ é o perímetro e $\bar{d}$ é a distância ao eixo do centro de gravidade do *contorno*; num triângulo equilátero esse centro coincide com o baricentro, logo $\bar{d} = 3$ e

$$S = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi.$$

138. Ponha O na origem e $O^* = (d,0)$ com $d = r + r^*$ (tangência exterior). Se $\vec{n}$ é o unitário normal à tangente comum, apontando dos centros para a reta, então $A = O + r\vec{n}$ e $A^* = O^* + r^*\vec{n}$, e projetando sobre o eixo,

$$n_1 = \frac{r - r^*}{d}, \qquad n_2 = \sqrt{1 - n_1^2} = \frac{2\sqrt{r\, r^*}}{r + r^*}.$$

As distâncias de A e A^* ao eixo são, portanto, $r\, n_2$ e $r^* n_2$, e

$$\overline{AA^*} = \sqrt{d^2 - (r - r^*)^2} = 2\sqrt{r\, r^*}.$$

O sólido é um tronco de cone, de área lateral

$$S = \pi\left(r\, n_2 + r^* n_2\right)\overline{AA^*} = \pi \cdot \frac{2\sqrt{rr^*}}{r + r^*}\left(r + r^*\right) \cdot 2\sqrt{rr^*} = \boxed{4\pi\, r\, r^*}.$$

139. Ponha O na origem, $P = (-r,0)$, $Q = (r,0)$ e $N = (-x,0)$, de modo que $M = \left(-x, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$. Escreva $\mu = \sqrt{r^2 - x^2}$.

(a) O triângulo MPQ tem dois vértices sobre o eixo, logo gera dois cones de mesma base, de raio μ e alturas somando $\overline{PQ} = 2r$:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\mu^2 \cdot 2r = \boxed{\frac{2\pi r}{3}\left(r^2 - x^2\right)}.$$

(b) A tangente em M é $M \cdot X = r^2$ e corta o eixo em $T = \left(-\frac{r^2}{x}, 0\right)$, com $-\frac{r^2}{x} \le -r$: o vértice M projeta-se *fora* do segmento $\overline{TP}$. Logo o sólido gerado por MPT é a diferença de dois cones de mesma base (o círculo de raio μ no plano de M): o de vértice T, de altura $\frac{r^2}{x} - x$, menos o de vértice P, de altura $r - x$. Assim

$$V_2 = \frac{\pi\mu^2}{3}\left(\frac{r^2 - x^2}{x} - (r - x)\right) = \frac{\pi\left(r^2 - x^2\right)}{3} \cdot \frac{r^2 - rx}{x} = \boxed{\frac{\pi r}{3x}\left(r - x\right)^2\left(r + x\right)}.$$

140. Pelo teorema de Pappus, $S = 2\pi\,\bar{d}\,L$ com $L = 3a$ e $\bar{d}$ a distância ao eixo do centro de gravidade do contorno, que num triângulo equilátero é o próprio centro G, com $\overline{AG} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. A semirreta $\overrightarrow{AG}$ faz $30°$ com $\overrightarrow{AB}$, de modo que

$$\bar{d} = \frac{a}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,(\Theta - 30°)\,, \qquad S = 2\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,(\Theta - 30°) \cdot 3a = 2\sqrt{3}\,\pi a^2\,\mathrm{sen}\,(\Theta - 30°)\,.$$

Para que o eixo não atravesse o triângulo é preciso que a semirreta $\overrightarrow{AX}$ fique fora do setor de $60°$ em A, isto é $60° \le \Theta \le 180°$.

(a) S é máximo quando $\Theta - 30° = 90°$: $\boxed{\Theta = 120°}$, com $S = 2\sqrt{3}\,\pi a^2$. Aí o eixo é paralelo a $\overline{BC}$ e dista dele a altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$: o sólido é o **cilindro** de raio $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e altura a *menos* os dois cones de vértice comum A e bases as duas bases do cilindro.

(b) S é mínimo nos extremos, $\boxed{\Theta = 60° \text{ ou } \Theta = 180°}$, com $S = \sqrt{3}\,\pi a^2$. Nos dois casos o eixo contém um lado ($\overline{AC}$ ou $\overline{AB}$) e o sólido é o par de cones de mesma base, de raio $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e alturas $\frac{a}{2}$ cada.

(c) $2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,(\Theta - 30°) = 3$ dá $\mathrm{sen}\,(\Theta - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, isto é $\boxed{\Theta = 90° \text{ ou } \Theta = 150°}$: o eixo é perpendicular a um lado num extremo ($\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$). O sólido é o tronco de cone de raios a e $\frac{a}{2}$ e altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, do qual se retira o cone de vértice A e base o círculo de raio $\frac{a}{2}$.

141. Ponha I na origem, r sobre Ox e a perpendicular comum sobre Oz, com $K = (0,0,p)$ e s paralela a Oy por K (as duas retas são ortogonais). Então $A = (x,0,0)$, $B = (0,y,p)$, e a condição $\overline{AB} = \ell$ é

$$x^2 + y^2 + p^2 = \ell^2.$$

As seis arestas são $\overline{AB} = \ell$, $\overline{AI} = |x|$, $\overline{BK} = |y|$, $\overline{IK} = p$, $\overline{AK} = \sqrt{x^2+p^2}$ e $\overline{BI} = \sqrt{y^2+p^2}$, de modo que

$$\sum (\text{arestas})^2 = \ell^2 + 2x^2 + 2y^2 + 3p^2 = \ell^2 + 2\left(\ell^2 - p^2\right) + 3p^2 = 3\ell^2 + p^2,$$

constante, pois p é a distância entre as duas retas. ■

Para a esfera circunscrita, o centro equidista de $I = (0,0,0)$ e $K = (0,0,p)$, logo tem cota $\frac{p}{2}$; equidistar de I e A dá abscissa $\frac{x}{2}$ e de I e B, ordenada $\frac{y}{2}$. Assim o centro é $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{p}{2}\right)$ — o ponto médio de $\overline{AB}$ — e

$$\mathcal{R}^2 = \frac{x^2+y^2+p^2}{4} = \frac{\ell^2}{4} \implies \boxed{\mathcal{R} = \frac{\overline{AB}}{2}}:$$

$\overline{AB}$ é um diâmetro da esfera circunscrita.