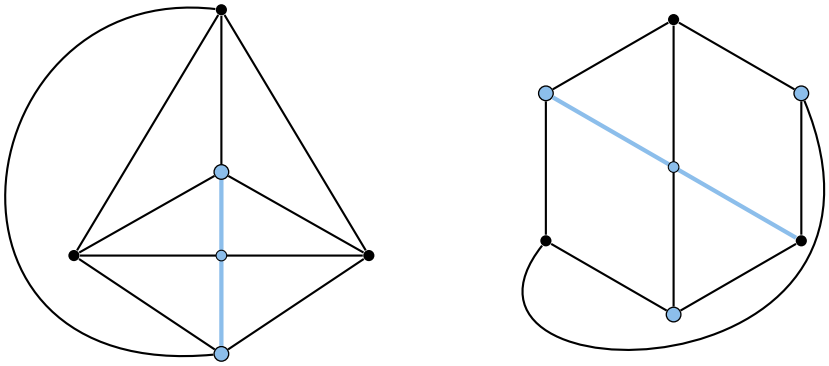
Apostila

Teoria dos Grafos

dos fundamentos ao número de cruzamentos

com os principais problemas resolvidos e em aberto de 2006 a 2026



Prof. Haroldo Costa Silva Filho

2026

Apresentação

Esta apostila acompanha um curso completo de Teoria dos Grafos que começa nas definições mais elementares e termina na fronteira da pesquisa sobre o número de cruzamentos. O fio condutor é uma pergunta simples, feita por Paul Turán num campo de trabalho forçado em 1944: quantas vezes os trilhos que ligam fornos a depósitos precisam se cruzar? Para responder bem a ela é preciso conhecer grafos planares, a fórmula de Euler, teoria extremal, probabilidade, geometria combinatória e um pouco de complexidade computacional. Por isso o caminho é longo, e cada etapa tem valor próprio.

A Parte I reúne os fundamentos: graus, árvores, conectividade, percursos eulerianos e hamiltonianos, emparelhamentos, coloração, teoria extremal e números de Ramsey. A Parte II trata da planaridade: a fórmula de Euler, os teoremas de Kuratowski, Wagner e Fáry, os teoremas das cinco e das quatro cores e grafos em superfícies. A Parte III é dedicada ao número de cruzamentos: as primeiras cotas, o lema do cruzamento e suas aplicações à geometria (incidências, distâncias unitárias, somas e produtos), as conjecturas de Zarankiewicz e de Harary–Hill, o número de cruzamentos retilíneo, as variantes (par, ímpar, local, de livro), a complexidade computacional, os grafos críticos e a conjectura de Albertson. O último capítulo organiza, ano a ano, o que foi resolvido entre 2006 e 2026 e o que continua em aberto.

Cada capítulo termina com exercícios. Todos exigem alguma ideia, e todos têm resolução completa no final da apostila. Sugiro que você tente cada um por pelo menos meia hora antes de consultar a resolução: é nessa meia hora que a teoria se fixa.

Ao longo do texto, os resultados de pesquisa recentes vêm com autor e ano, para que você possa localizar o artigo original. Quando um resultado foi anunciado em preprint e ainda não passou por revisão, isso está dito explicitamente.

Prof. Haroldo Costa Silva Filho

Notação

Símbolo	Significado
$G = (V, E)$	grafo com conjunto de vértices V e de arestas E
$n = \|V\|$, $m = \|E\|$	ordem e tamanho do grafo
$d(v)$, $\delta(G)$, $\Delta(G)$	grau de v, grau mínimo, grau máximo
K_n, $K_{m,n}$, C_n, P_n	completo, bipartido completo, ciclo, caminho
Q_n	hipercubo de dimensão n
$\chi(G)$, $\chi'(G)$	número cromático e índice cromático
$\kappa(G)$, $\lambda(G)$	conectividade de vértices e de arestas
$g(G)$	cintura (comprimento do menor ciclo)
$\gamma(G)$	gênero orientável
$\mathrm{cr}(G)$	número de cruzamentos
$\overline{\mathrm{cr}}(G)$	número de cruzamentos retilíneo
$\mathrm{pcr}(G)$, $\mathrm{ocr}(G)$	número de cruzamentos de pares e ímpar
$\mathrm{lcr}(G)$	número de cruzamentos local
$Z(m,n)$	$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$
$H(n)$	$\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$
$G \,\square\, H$	produto cartesiano
$\binom{n}{k}$	coeficiente binomial

Sumário

I Fundamentos **1**

1 Grafos: conceitos básicos **2**

1.1 Definições 2
1.2 Famílias que aparecem o tempo todo 3
1.3 Subgrafos, complemento e operações 4
1.4 Isomorfismo 5
1.5 Passeios, caminhos e distância 5
1.6 Grafos bipartidos 6
1.7 Sequências de graus 6
1.8 Matriz de adjacência e contagem de passeios 7
1.9 Grafos orientados, grafos de linha e grafos de interseção 8

2 Árvores e conectividade **10**

2.1 Caracterizações de árvores 10
2.2 A fórmula de Cayley 11
2.3 O teorema da matriz-árvore 11
2.4 Árvore geradora de custo mínimo 12
2.5 Árvores enraizadas e buscas 13
2.6 Pontes, articulações e blocos 14
2.7 Conectividade 14

3 Percursos: eulerianos e hamiltonianos **17**

3.1 Trilhas eulerianas 17
3.2 O problema do carteiro chinês 18
3.3 Digrafos eulerianos e sequências de de Bruijn 18
3.4 Ciclos hamiltonianos 19
3.5 O caixeiro-viajante 21
3.6 Torneios 22

4 Emparelhamentos e caminhos disjuntos **24**

4.1 Emparelhamentos e o teorema de Berge 24
4.2 O teorema de Hall 25
4.3 O teorema de König 26
4.4 O teorema de Tutte 26
4.5 Emparelhamentos estáveis 27
4.6 O teorema de Menger 28
4.7 Fluxo máximo e corte mínimo 29

5 Coloração **31**
5.1 Número cromático 31
5.2 O algoritmo guloso 32
5.3 O teorema de Brooks 32
5.4 Grafos sem triângulos com número cromático alto 33
5.5 Grafos de intervalos e alocação de salas 34
5.6 Coloração por listas 34
5.7 Coloração de arestas 34
5.8 O polinômio cromático 35

6 Teoria extremal e números de Ramsey **37**
6.1 O Teorema de Mantel 37
6.2 O Teorema de Turán 37
6.3 O Teorema de Erdős–Stone 39
6.4 Grafos sem quadriláteros: o Teorema de Kővári–Sós–Turán 39
6.4.1 A cota é justa para C_4 40
6.4.2 O plano de Fano e o grafo de Heawood 41
6.5 Números de Ramsey 41

II Planaridade **44**

7 Grafos planares e a fórmula de Euler **45**
7.1 Desenhos e imersões 45
7.2 Faces e a fórmula de Euler 46
7.3 Grafos planares são esparsos 46
7.4 Triangulações maximais 48
7.5 Os sólidos platônicos 49
7.6 Dualidade 50
7.7 Grafos exteriormente planares 51

8 Kuratowski, Wagner, Fáry e a coloração de mapas **52**

8.1 Subdivisões e menores 52

8.2 O Teorema de Kuratowski 52

8.3 O Teorema de Wagner 53

8.4 Desenhos com segmentos de reta 55

8.5 Representações por moedas 56

8.6 Coloração de mapas 57

8.7 Teste de planaridade 58

9 Superfícies e gênero **60**

9.1 Superfícies 60

9.2 A característica de Euler 60

9.3 O gênero de um grafo 61

9.4 K_7 no toro 62

9.5 Outras imersões clássicas 63

9.6 Coloração em superfícies 64

9.7 Gênero e número de cruzamentos 64

III O número de cruzamentos **66**

10 Desenhos e número de cruzamentos **67**

10.1 A olaria de Turán 67

10.2 Desenhos de grafos 67

10.3 Desenhos bons 68

10.4 Uma cota inferior linear 69

10.5 Os primeiros valores exatos 70

10.5.1 O grafo de Petersen 72

10.5.2 O grafo $K_{3,n}$ 72

10.6 Os grafos principais, um a um 72

10.7 Componentes e blocos 75

10.8 Um exemplo prático: o projeto de uma placa 76

11 O lema do cruzamento e suas aplicações **77**

11.1 O enunciado e a demonstração 77

11.1.1 Exemplos de uso direto 78

11.1.2 A ordem de grandeza é a correta 78

11.2 A corrida pela constante 79

11.2.1 A densidade dos grafos k-planares . . . 80
11.2.2 Grafos sem quadriláteros . . . 80
11.3 O teorema de Szemerédi–Trotter . . . 80
11.3.1 O teorema de Beck . . . 81
11.4 Distâncias unitárias . . . 82
11.5 Distâncias distintas . . . 83
11.6 Somas e produtos . . . 83
11.7 Bissecção, leiautes e circuitos . . . 84

12 Grafos completos e bipartidos completos **86**
12.1 O desenho de Zarankiewicz . . . 86
12.1.1 Por que dividir ao meio . . . 87
12.2 A técnica de contagem . . . 88
12.2.1 O caso $K_{3,n}$ . . . 88
12.3 Kleitman e o que veio depois . . . 89
12.4 A conjectura de Harary–Hill . . . 89
12.4.1 O desenho cilíndrico de Hill . . . 90
12.5 Contagem para o grafo completo . . . 91
12.6 Cotas assintóticas . . . 91
12.7 Classes de desenhos em que a conjectura de Hill está provada . . . 92
12.8 Grafos multipartidos completos . . . 93

13 Número de cruzamentos retilíneo **94**
13.1 Definição e primeiras relações . . . 94
13.2 Quadriláteros convexos . . . 94
13.3 O problema dos quatro pontos de Sylvester . . . 95
13.4 k-arestas . . . 96
13.5 Valores exatos e complexidade . . . 98
13.5.1 A forma dos conjuntos ótimos . . . 98
13.6 Desenhos pseudolineares . . . 99

14 Variantes do número de cruzamentos **100**
14.1 Três maneiras de contar . . . 100
14.2 O teorema de Hanani–Tutte . . . 101
14.2.1 A ideia algébrica: paridade como invariante . . . 101
14.2.2 Do zero ao pequeno . . . 103
14.3 O número de cruzamentos ímpar é diferente . . . 103

14.4 Pares que se cruzam e cruzamentos: a conjectura cr = pcr . . . 104
14.5 Hanani–Tutte em outras superfícies . . . 104
14.6 Cruzamentos por aresta: grafos k-planares . . . 105
14.6.1 Desenhos com ângulos retos . . . 106
14.7 Grafos quase-planares . . . 106
14.8 Thrackles . . . 107
14.9 Livros, cores e superfícies . . . 108
14.9.1 Desenhos em livro . . . 108
14.9.2 Número de cruzamentos biplanar e k-planar . . . 108
14.9.3 Cruzamentos em superfícies . . . 108
14.10Estruturas planas em desenhos simples de K_n . . . 110

15 Complexidade e algoritmos 112
15.1 Classes de complexidade em linguagem simples . . . 112
15.2 O número de cruzamentos é NP-completo . . . 113
15.2.1 Uma redução ilustrativa: pesos e feixes . . . 113
15.3 Difícil até em classes restritas . . . 114
15.4 Quando k é pequeno: tratabilidade por parâmetro fixo . . . 114
15.5 Inserir uma aresta . . . 115
15.6 Aproximação . . . 116
15.7 O caso retilíneo: $\exists\mathbb{R}$ . . . 117
15.8 Métodos exatos na prática . . . 117

16 Grafos críticos, produtos e a conjectura de Albertson 119
16.1 Grafos cruzamento-críticos . . . 119
16.1.1 O grau máximo de grafos críticos . . . 121
16.2 Produtos de ciclos . . . 121
16.3 Petersen generalizados e hipercubos . . . 122
16.4 A conjectura de Albertson . . . 123
16.4.1 Grafos cromáticos sem cliques grandes . . . 123
16.4.2 A ordem de grandeza está certa . . . 124
16.4.3 Histórico . . . 124

17 Panorama 2006–2026: problemas resolvidos e problemas em aberto 127
17.1 Cronologia . . . 127
17.1.1 Leitura da cronologia . . . 128
17.2 Problemas em aberto . . . 129

A Galeria dos grafos principais **133**

Resoluções dos exercícios **138**

Parte I

Fundamentos

CAPÍTULO 1

Grafos: conceitos básicos

Uma rede de metrô, o conjunto de amizades de uma turma, as ligações entre os componentes de uma placa de circuito impresso e a tabela de jogos de um campeonato têm a mesma estrutura: alguns objetos e uma relação que liga certos pares deles. A teoria dos grafos estuda exatamente essa estrutura, deixando de lado tudo o que é acidental (distâncias, cores, nomes) e guardando apenas quem está ligado a quem. Neste capítulo fixamos a linguagem que será usada no restante da apostila, até chegarmos, na Parte III, ao número de cruzamentos.

1.1 Definições

Definição 1.1. Um *grafo* G é um par (V, E) em que V é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são os *vértices*, e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*. Escrevemos uv (ou vu) para a aresta $\{u, v\}$; dizemos que u e v são *adjacentes* (ou *vizinhos*) e que a aresta uv *incide* em u e em v, que são suas *extremidades*.

Usaremos $n = |V(G)|$ para a *ordem* e $m = |E(G)|$ para o *tamanho* do grafo. O grafo assim definido é chamado *simples*: não há laços (arestas de um vértice para ele mesmo) nem arestas múltiplas. Quando precisarmos de laços ou arestas paralelas, por exemplo ao tratar de dualidade de mapas no Capítulo 8, falaremos em *multigrafo*. Num *grafo orientado* (ou *digrafo*) as arestas são pares ordenados (u, v), desenhados como setas.

Definição 1.2. O *grau* $d(v)$ de um vértice v é o número de arestas que incidem em v; num grafo simples, é o número de vizinhos de v. O conjunto dos vizinhos é $N(v)$. Indicamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior grau. Se todos os vértices têm grau k, o grafo é *k-regular*; um grafo 3-regular também é chamado *cúbico*. Um vértice de grau zero é *isolado*, e um de grau um é uma *folha*.

Teorema 1.3 (Lema do aperto de mãos)**.** *Em todo grafo,* $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. *Em particular, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Demonstração. Conte os pares (v, e) com $v \in V$, $e \in E$ e v extremidade de e. Fixando v, há $d(v)$ pares; somando sobre v obtemos $\sum d(v)$. Fixando e, há exatamente dois pares, um para cada extremidade; somando sobre e obtemos $2m$. Como a soma dos graus é par, a soma dos graus ímpares também é par, e isso só acontece se a quantidade de parcelas ímpares for par. ∎

O nome vem da situação concreta: numa festa, se cada pessoa anota quantas mãos apertou, a soma das anotações é o dobro do número de apertos. Essa técnica, contar a mesma coisa de duas maneiras, é a *contagem dupla*, e voltará muitas vezes, inclusive na prova de que $\mathrm{cr}(K_n)/\binom{n}{4}$ converge (Capítulo 12).

Exemplo 1.4. Não existe grafo com graus $3, 3, 3, 3, 3$: são cinco vértices de grau ímpar. Também não existe uma rede de 15 computadores em que cada um esteja ligado a exatamente 3 outros, pois a soma dos graus seria 45, ímpar.

1.2 Famílias que aparecem o tempo todo

- O *grafo completo* K_n tem n vértices, todos adjacentes entre si; tem $\binom{n}{2}$ arestas.
- O *caminho* P_n tem vértices $v_1, \ldots, v_n$ e arestas $v_i v_{i+1}$; seu *comprimento* é $n-1$.
- O *ciclo* C_n ($n \geq 3$) é P_n acrescido da aresta $v_n v_1$.
- O *grafo bipartido completo* $K_{m,n}$ tem vértices divididos em classes A e B, com $|A| = m$, $|B| = n$, e todas as mn arestas entre A e B. O caso $K_{1,n}$ é a *estrela*.
- O *cubo* Q_d tem como vértices as 2^d palavras binárias de comprimento d, duas sendo adjacentes quando diferem em exatamente uma posição. É d-regular e tem $d\,2^{d-1}$ arestas.
- O *grafo de Petersen* tem como vértices os 10 subconjuntos de dois elementos de $\{1,2,3,4,5\}$, sendo adjacentes dois subconjuntos disjuntos. É cúbico, tem 15 arestas e nenhum ciclo de comprimento menor que 5.

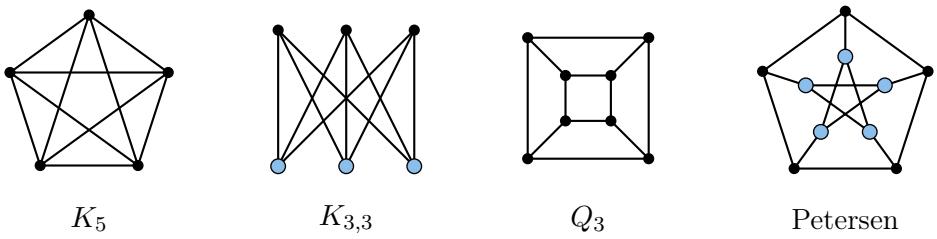


Figura 1.1: Quatro grafos que reaparecerão ao longo da apostila.

Os dois primeiros grafos da Figura 1.1, K_5 e $K_{3,3}$, são os protagonistas do teorema de Kuratowski (Capítulo 8) e os primeiros exemplos de grafos com número de cruzamentos positivo.

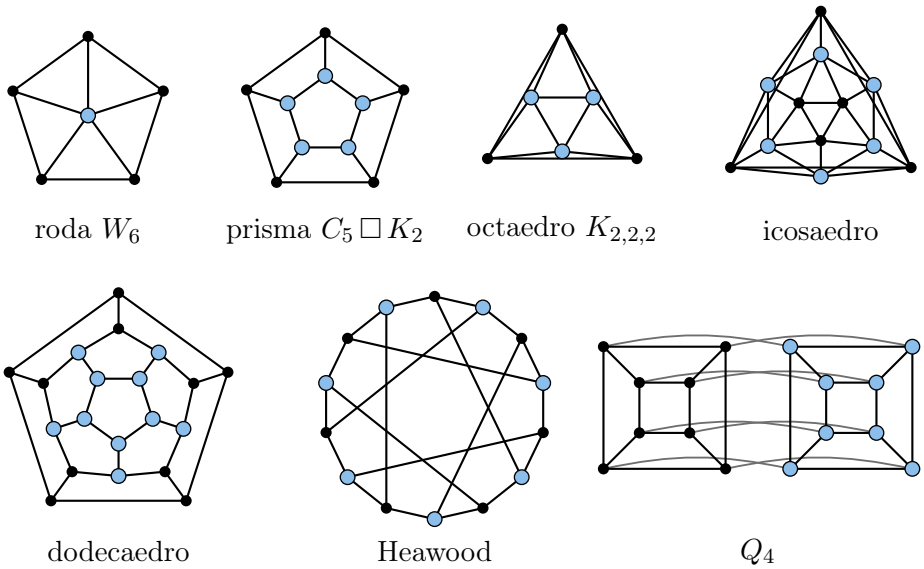


Figura 1.2: Mais grafos clássicos: a roda, um prisma, três dos cinco grafos de Platão (os outros dois são K_4 e Q_3), o grafo de Heawood e o hipercubo Q_4, formado por duas cópias de Q_3 (preta e azul) ligadas pelas arestas cinzentas.

A lista acima ganha alguns nomes que serão usados como exemplos-teste ao longo do texto (Figura 1.2).

- A *roda* W_n é um ciclo C_{n-1} mais um vértice central adjacente a todos os vértices do ciclo; tem n vértices.
- O *prisma* $C_n \,\square\, K_2$ tem dois n-ciclos com vértices correspondentes ligados.
- Os *grafos de Platão* são os esqueletos dos cinco poliedros regulares: tetraedro (K_4), cubo (Q_3), octaedro ($K_{2,2,2}$), dodecaedro e icosaedro.
- O *grafo de Heawood* tem como vértices os 7 pontos e as 7 retas do plano de Fano, sendo um ponto adjacente às retas que o contêm.

Exemplo 1.5 (A roda)**.** Em W_n ($n \geq 4$), o centro tem grau $n-1$ e cada vértice do aro tem grau 3. Pelo aperto de mãos, $2m = (n-1) + 3(n-1) = 4(n-1)$, e $m = 2(n-1)$, que confere com as $n-1$ arestas do aro mais os $n-1$ raios. Dois vértices do aro não adjacentes têm o centro como vizinho comum, então o diâmetro é 2 para $n \geq 5$; W_4 é o próprio K_4, de diâmetro 1.

Exemplo 1.6 (Prismas e grafos de Platão)**.** O prisma $C_n \,\square\, K_2$ tem $2n$ vértices, é cúbico e, portanto, tem $3 \cdot 2n/2 = 3n$ arestas. Ele contém o ciclo C_n, logo não é bipartido para n ímpar; para n par, as cores alternadas no ciclo de fora e invertidas no de dentro formam uma bipartição. Nos grafos de Platão, todos os vértices têm o mesmo grau k e $m = nk/2$: o tetraedro tem $4 \cdot 3/2 = 6$ arestas, o cubo $8 \cdot 3/2 = 12$, o octaedro $6 \cdot 4/2 = 12$, o dodecaedro $20 \cdot 3/2 = 30$ e o icosaedro $12 \cdot 5/2 = 30$. As coincidências $12 = 12$ e $30 = 30$ não são acaso: cubo e octaedro são duais, assim como dodecaedro e icosaedro (Capítulo 7).

Exemplo 1.7 (O hipercubo Q_4)**.** Em Q_d, a distância entre duas palavras é o número de posições em que diferem (a *distância de Hamming*): cada aresta corrige uma posição, e corrigir as posições uma a uma dá um caminho desse comprimento. Logo o diâmetro de Q_4 é 4, atingido por pares complementares como 0000 e 1111. Separando as palavras pela paridade do número de uns, toda aresta liga uma palavra par a uma ímpar: Q_d é bipartido, e sua cintura é 4. Um 4-ciclo é determinado por uma palavra e duas posições a variar, com as outras $d-2$ fixas: há $2^{d-2}\binom{d}{2}$ deles, ou seja, 24 em Q_4.

Exemplo 1.8 (O grafo de Heawood)**.** Os pontos do plano de Fano são $\{1,\dots,7\}$ e as retas são $\{1,2,4\}$ e suas translações módulo 7: $\{2,3,5\}, \{3,4,6\}, \dots, \{7,1,3\}$. Cada ponto está em três retas e cada reta tem três pontos, então o grafo de Heawood é cúbico, com 14 vértices e 21 arestas, e é bipartido (pontos de um lado, retas do outro). Dois pontos estão em exatamente uma reta comum, logo não existe 4-ciclo ponto–reta–ponto–reta, e a cintura é pelo menos 6; o hexágono $1, \{1,2,4\}, 2, \{2,3,5\}, 3, \{7,1,3\}$ mostra que é exatamente 6. O diâmetro é 3: dois pontos estão a distância 2; duas retas também (elas se cortam num ponto); um ponto fora de uma reta está a distância 3 dela.

1.3 Subgrafos, complemento e operações

Definição 1.9. Um grafo H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se $V(H) = V(G)$, o subgrafo é *gerador*. Para $S \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido* $G[S]$ tem vértices S e todas as arestas de G com ambas as extremidades em S. Escrevemos $G - v$, $G - e$, $G - S$ para a remoção de um vértice (com suas arestas), de uma aresta ou de um conjunto de vértices.

Definição 1.10. O *complemento* $\overline{G}$ tem os mesmos vértices de G, com $uv \in E(\overline{G})$ se e só se $uv \notin E(G)$. Um conjunto de vértices dois a dois adjacentes é uma *clique*; dois a dois não adjacentes, um *conjunto independente*.

Cliques de G são conjuntos independentes de $\overline{G}$. Essa troca de papéis é a porta de entrada da teoria de Ramsey (Capítulo 6).

Outras operações frequentes: a *subdivisão* de uma aresta uv troca-a por um caminho $u\,w\,v$ com um vértice novo w; a *contração* de uv identifica u e v num só vértice, adjacente a todos os vizinhos de ambos. O *produto cartesiano* $G \,\square\, H$ tem vértices $V(G) \times V(H)$, com $(g,h) \sim (g',h')$ quando $g = g'$ e $hh' \in E(H)$, ou $h = h'$ e $gg' \in E(G)$. Por exemplo, $Q_d = K_2 \,\square\, Q_{d-1}$ e $C_m \,\square\, C_n$ é a grade toroidal, cujo número de cruzamentos é objeto de uma conjectura famosa do Capítulo 16.

1.4 Isomorfismo

Definição 1.11. Dois grafos G e H são *isomorfos*, $G \cong H$, se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$.

Isomorfismo preserva tudo o que é estrutural: número de arestas, sequência de graus, número de triângulos, comprimento do menor ciclo (a *cintura*), bipartição etc. Para mostrar que dois grafos *não* são isomorfos basta encontrar um invariante que os separe; para mostrar que são, é preciso exibir a bijeção.

Exemplo 1.12. O desenho clássico do grafo de Petersen (pentágono externo, pentagrama interno, Figura 1.1) e a definição por subconjuntos descrevem o mesmo grafo. Percorrendo o pentágono externo, rotule seus vértices por

$$\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{5,1\},\ \{2,3\},\ \{4,5\},$$

e os vértices internos ligados a eles, na mesma ordem, por

$$\{3,5\},\ \{2,5\},\ \{2,4\},\ \{1,4\},\ \{1,3\}.$$

Pares consecutivos no pentágono são disjuntos, cada raio liga pares disjuntos e, no pentagrama (que liga cada vértice interno ao segundo seguinte), também: $\{3,5\}$ com $\{2,4\}$, $\{2,4\}$ com $\{1,3\}$, e assim por diante. São 15 pares disjuntos, que esgotam as 15 arestas.

Exemplo 1.13 (Dois grafos cúbicos com 6 vértices)**.** O bipartido $K_{3,3}$ e o prisma $C_3 \,\square\, K_2$ são cúbicos, com 6 vértices e 9 arestas, e mesmo assim não são isomorfos: o prisma contém triângulos e $K_{3,3}$, sendo bipartido, não. Os complementos confirmam a diferença de outro modo. O complemento de $K_{3,3}$ são dois triângulos disjuntos. No prisma, com triângulos $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ e arestas a_ib_i, o complemento tem as arestas a_ib_j com $i \neq j$, que formam o hexágono $a_1\,b_2\,a_3\,b_1\,a_2\,b_3\,a_1$. Como $2K_3 \ncong C_6$, os grafos originais também não são isomorfos.

Exemplo 1.14 (O octaedro é um grafo de linha)**.** Em $L(K_4)$ há 6 vértices, um por aresta de K_4. Cada aresta de K_4 compartilha extremidade com 4 das outras 5 e é disjunta de exatamente uma (a aresta "oposta"). Logo o complemento de $L(K_4)$ é um emparelhamento perfeito com três arestas, e $L(K_4)$ é K_6 menos um emparelhamento perfeito, isto é, o octaedro $K_{2,2,2}$.

1.5 Passeios, caminhos e distância

Um *passeio* é uma sequência $v_0, v_1, \ldots, v_k$ de vértices com $v_{i-1}v_i \in E$; seu comprimento é k. Se os vértices são distintos, é um *caminho*; se $v_0 = v_k$, $k \geq 3$ e os demais são distintos, é um *ciclo*. O grafo é *conexo* se há caminho entre quaisquer dois vértices; as classes de equivalência de "estar ligado por caminho" são as *componentes conexas*. A *distância* $d(u,v)$ é o comprimento de um menor caminho entre u e v, e o *diâmetro* é a maior distância.

Lema 1.15. *Todo passeio de u a v contém um caminho de u a v. Todo passeio fechado de comprimento ímpar contém um ciclo ímpar.*

Demonstração. Num passeio com vértice repetido, $v_i = v_j$ com $i < j$, apague o trecho $v_{i+1}, \dots, v_j$; o resultado ainda é um passeio de u a v, mais curto. Repetindo, chega-se a um caminho. Para a segunda parte, use indução no comprimento: se o passeio fechado ímpar não repete vértices, ele já é um ciclo ímpar (comprimento 1 é impossível sem laços). Se repete, $v_i = v_j$, ele se divide em dois passeios fechados cujos comprimentos somam o original; um deles é ímpar e mais curto. ∎

1.6 Grafos bipartidos

Definição 1.16. G é *bipartido* se V admite partição $A \cup B$ tal que toda aresta tem uma extremidade em A e outra em B.

Teorema 1.17 (König, 1936)**.** *Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclo de comprimento ímpar.*

Demonstração. Se G é bipartido, todo ciclo alterna entre A e B e, para voltar ao ponto de partida, faz um número par de passos.

Reciprocamente, suponha que G não tem ciclo ímpar; basta tratar cada componente separadamente, então suponha G conexo. Fixe $r \in V$ e ponha $A = \{v : d(r, v) \text{ par}\}$, $B = \{v : d(r, v) \text{ ímpar}\}$. Se houvesse uma aresta uv com u, v na mesma classe, os menores caminhos de r a u e de r a v, junto com uv, formariam um passeio fechado de comprimento $d(r, u) + d(r, v) + 1$, que é ímpar. Pelo lema, haveria um ciclo ímpar, contradição. ∎

A prova é construtiva: uma busca em largura a partir de r produz a bipartição ou encontra um ciclo ímpar. É assim que um programa decide, por exemplo, se é possível dividir uma lista de tarefas conflitantes entre dois turnos.

1.7 Sequências de graus

Dada uma lista de inteiros $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$, ela é *gráfica* se existe um grafo simples com esses graus. A soma par é necessária, mas não suficiente: $3, 3, 1, 1$ tem soma par e não é gráfica, porque os dois vértices de grau 3 precisariam ser vizinhos de todos os outros, dando grau pelo menos 2 aos dois últimos.

Teorema 1.18 (Havel, 1955; Hakimi, 1962)**.** *Para $n \geq 2$, a sequência $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ é gráfica se e somente se a sequência obtida removendo d_1 e subtraindo 1 dos d_1 termos seguintes, $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$, é gráfica.*

Demonstração. Se a sequência reduzida é gráfica, acrescente um vértice novo ligado aos vértices correspondentes aos termos diminuídos. Reciprocamente, seja G um grafo com graus d_i nos vértices v_i. Basta mostrar que existe um tal G em que v_1 é adjacente a $v_2, \dots, v_{d_1+1}$, pois então $G - v_1$ realiza a sequência reduzida. Entre todos os G que realizam a sequência, escolha um que maximize o número de vizinhos de v_1 em $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. Se faltar algum v_i nesse conjunto, então v_1 tem um vizinho v_j com $j > d_1 + 1$, logo $d_i \geq d_j$. Como v_j tem o vizinho v_1 que v_i não tem, e $d_i \geq d_j$, existe w vizinho de v_i que não é vizinho de v_j (com $w \neq v_1$). Troque as arestas v_1v_j e v_iw por v_1v_i e v_jw: os graus não mudam e v_1 ganha um vizinho no conjunto, contradizendo a maximalidade. ∎

Exemplo 1.19. A sequência $4,4,3,3,2,2$ reduz-se a $3,2,2,1,2$, isto é, $3,2,2,2,1$; depois a $1,1,1,1$, que é gráfica (dois segmentos). Logo a original é gráfica.

Há também uma caracterização direta, sem recursão.

Teorema 1.20 (Erdős–Gallai, 1960)**.** *A sequência $d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$ com soma par é gráfica se e somente se, para cada $k = 1, \ldots, n$,*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k).$$

A necessidade é fácil: os k vértices de maior grau recebem no máximo $k(k-1)$ contribuições de arestas internas e cada vértice externo contribui com no máximo $\min(d_i, k)$ arestas para o grupo. A suficiência é mais trabalhosa e não a faremos.

1.8 Matriz de adjacência e contagem de passeios

Numerando $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, a *matriz de adjacência* $A = (a_{ij})$ tem $a_{ij} = 1$ se $v_i v_j \in E$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Ela é simétrica, com diagonal nula, e a soma da linha i é $d(v_i)$.

Proposição 1.21. *A entrada (i,j) de A^k é o número de passeios de comprimento k de v_i a v_j.*

Demonstração. Por indução em k. Para $k = 1$ é a definição. Um passeio de comprimento $k+1$ de v_i a v_j é um passeio de comprimento k de v_i até algum v_ℓ seguido da aresta $v_\ell v_j$; logo o número deles é $\sum_\ell (A^k)_{i\ell} a_{\ell j} = (A^{k+1})_{ij}$. ∎

Corolário 1.22. *O número de triângulos de G é $\operatorname{tr}(A^3)/6$.*

Demonstração. Cada triângulo $\{x,y,z\}$ produz passeios fechados de comprimento 3 partindo de cada um de seus três vértices, em dois sentidos: seis passeios. Todo passeio fechado de comprimento 3 num grafo simples percorre um triângulo. ∎

Exemplo 1.23 (Contando no grafo de Petersen com a matriz)**.** Seja A a matriz de adjacência do grafo de Petersen. A entrada (i,j) de A^2 conta vizinhos comuns: vale 3 na diagonal, 0 quando i,j são adjacentes (não há triângulos) e 1 quando não são (Exercício 1.5). Portanto

$$A^2 = 3I + (J - I - A), \qquad \text{isto é,} \qquad A^2 + A - 2I = J.$$

Aplicando ao vetor de uns, 3 é autovalor. Para autovetores ortogonais ao vetor de uns, $Jx = 0$ e $\theta^2 + \theta - 2 = 0$, logo $\theta \in \{1, -2\}$. Como $\operatorname{tr} A = 0$ e há dez autovalores, as multiplicidades a de 1 e b de -2 satisfazem $a + b = 9$ e $3 + a - 2b = 0$, donde $a = 5$, $b = 4$. Agora

$$\operatorname{tr}(A^3) = 27 + 5 - 32 = 0, \qquad \operatorname{tr}(A^5) = 243 + 5 - 128 = 120.$$

O primeiro confirma que não há triângulos. Para o segundo: num grafo sem triângulos, todo passeio fechado de comprimento 5 percorre um pentágono (um passeio fechado ímpar contém um ciclo ímpar de comprimento no máximo 5), e cada pentágono gera 10 passeios (5 pontos de partida, 2 sentidos). O grafo de Petersen tem, portanto, $120/10 = 12$ pentágonos.

Em análise de redes sociais, $(A^2)_{ij}$ é o número de amigos em comum de i e j, e a razão entre triângulos e caminhos de comprimento 2 mede o quanto a rede é "fechada".

1.9 Grafos orientados, grafos de linha e grafos de interseção

Em muitas aplicações a relação não é simétrica: ruas de mão única, quem segue quem numa rede social, dependências entre tarefas de um projeto. Num digrafo D, cada vértice tem *grau de saída* $d^+(v)$ e *grau de entrada* $d^-(v)$, e a contagem dupla dá $\sum_v d^+(v) = \sum_v d^-(v) = |E(D)|$. Um digrafo sem ciclos orientados (um *DAG*) é exatamente o que admite uma *ordenação topológica*, isto é, uma numeração dos vértices em que todo arco vai de um número menor para um maior: basta retirar repetidamente um vértice com $d^- = 0$, que sempre existe num DAG (siga arcos para trás a partir de qualquer vértice; sem ciclos, o percurso termina). É assim que um gerenciador de pacotes decide a ordem de instalação, e que o cronograma de uma obra respeita a precedência entre etapas.

Duas construções produzem grafos a partir de outros objetos.

Definição 1.24. O *grafo de linha* $L(G)$ tem um vértice para cada aresta de G, sendo dois adjacentes quando as arestas correspondentes têm extremidade comum. Dada uma família de conjuntos $S_1, \dots, S_n$, o *grafo de interseção* tem vértices $1, \dots, n$, com $i \sim j$ quando $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

O grafo de linha transforma problemas sobre arestas em problemas sobre vértices: emparelhamentos de G são conjuntos independentes de $L(G)$, e colorações de arestas de G são colorações de vértices de $L(G)$, de modo que $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Contando, $L(G)$ tem $\sum_v \binom{d(v)}{2}$ arestas. O complemento do grafo de linha de K_5 é o grafo de Petersen, como você pode conferir a partir da definição por subconjuntos.

Todo grafo é grafo de interseção de alguma família (associe a cada vértice o conjunto das arestas que nele incidem). Restringindo o tipo de conjunto, aparecem classes importantes: *grafos de intervalos* (intervalos da reta, que modelam reservas de salas e turnos de trabalho, Capítulo 5), *grafos de discos unitários* (antenas de alcance fixo) e *grafos de cordas* (cordas de uma circunferência). Os grafos de cordas reaparecem nos desenhos de livro com uma página, em que os vértices ficam numa reta e as arestas são semicírculos: duas arestas se cruzam exatamente quando as cordas correspondentes se cruzam. Esse é o ponto de partida dos números de cruzamento em livros do Capítulo 14.

Exercícios

Exercício 1.1. Numa reunião com $n \geq 2$ pessoas, cada uma cumprimentou algumas das outras. Mostre que duas pessoas cumprimentaram o mesmo número de pessoas.

Exercício 1.2. Mostre que, se G tem n vértices e $\delta(G) \geq (n-1)/2$, então G é conexo e tem diâmetro no máximo 2.

Exercício 1.3. Prove que G ou $\overline{G}$ é conexo. Mostre ainda que, se G tem diâmetro pelo menos 3, então $\overline{G}$ tem diâmetro no máximo 3.

Exercício 1.4. Um grafo é *autocomplementar* se $G \cong \overline{G}$. Mostre que, nesse caso, $n \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$, e exiba um grafo autocomplementar com 4 e outro com 5 vértices.

Exercício 1.5. Mostre que o grafo de Petersen não tem ciclo de comprimento 3 nem 4, e que dois vértices não adjacentes têm exatamente um vizinho em comum.

Exercício 1.6. Prove que todo grafo com m arestas tem um subgrafo gerador bipartido com pelo menos $m/2$ arestas.

Exercício 1.7. Seja G um grafo k-regular com $k \geq 1$, bipartido com classes A e B. Mostre que $|A| = |B|$.

Exercício 1.8. Conte os passeios fechados de comprimento 4 em K_n partindo de um vértice fixo, usando a matriz de adjacência $A = J - I$, em que J é a matriz de uns.

Exercício 1.9. Seja G um grafo k-regular com cintura pelo menos 5. Mostre que $n \geq k^2 + 1$ e que o grafo de Petersen atinge a igualdade para $k = 3$.

Exercício 1.10. Mostre que todo ciclo de Q_d tem comprimento par e que, fixado um vértice, exatamente $\binom{d}{k}$ vértices estão a distância k dele.

CAPÍTULO 2

Árvores e conectividade

Quando uma companhia de saneamento planeja ligar todos os bairros de uma cidade com a menor quantidade possível de tubulação, ou quando um roteador decide por onde encaminhar pacotes sem criar laços, a estrutura que aparece é uma árvore. Árvores são os grafos conexos mais econômicos, e entendê-las bem é o primeiro passo para medir o quanto um grafo é robusto, que é o assunto da segunda metade deste capítulo.

2.1 Caracterizações de árvores

Definição 2.1. Uma *floresta* é um grafo sem ciclos. Uma *árvore* é uma floresta conexa.

Lema 2.2. *Toda árvore com $n \geq 2$ vértices tem pelo menos duas folhas.*

Demonstração. Tome um caminho $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ de comprimento máximo. Se v_0 tivesse um vizinho além de v_1, esse vizinho estaria em P (o que criaria um ciclo) ou fora de P (o que permitiria estender P). Logo $d(v_0) = 1$, e o mesmo vale para v_k. ■

Teorema 2.3. *Para um grafo T com n vértices, são equivalentes:*

(i) T *é uma árvore;*

(ii) quaisquer dois vértices de T *são ligados por um único caminho;*

(iii) T *é conexo e cada aresta é uma ponte (removê-la desconecta* T*);*

(iv) T *é conexo e tem* $n - 1$ *arestas;*

(v) T *não tem ciclos e tem* $n - 1$ *arestas;*

(vi) T *não tem ciclos, mas acrescentar qualquer aresta cria exatamente um ciclo.*

Demonstração. (i)⇒(ii): se houvesse dois caminhos distintos de u a v, seguindo-os a partir do primeiro ponto em que divergem até o primeiro ponto em que se reencontram obteríamos um ciclo. (ii)⇒(iii): se $T - uv$ fosse conexo, haveria um caminho de u a v distinto da aresta uv. (iii)⇒(i): um ciclo conteria uma aresta cuja remoção não desconecta. (i)⇒(iv),(v): por indução em n; remova uma folha (Lema 2.2): sobra uma árvore com $n-1$ vértices e, por hipótese, $n-2$ arestas. (iv)⇒(i): enquanto houver ciclo, remova uma aresta de um ciclo; o grafo segue conexo. Ao fim temos uma árvore geradora, com $n-1$ arestas; como já tínhamos $n-1$, nenhuma aresta foi removida. (v)⇒(i): se T tem c componentes, cada uma é árvore com $n_i - 1$ arestas, totalizando $n - c$; logo $c = 1$. (i)⇔(vi): acrescentar uv fecha um ciclo com o único caminho de u a v, e com nenhum outro; reciprocamente, se acrescentar qualquer uv cria ciclo, u e v já estavam ligados, e T é conexo. ■

Corolário 2.4. *Uma floresta com n vértices e c componentes tem $n - c$ arestas. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

2.2 A fórmula de Cayley

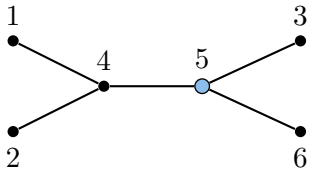
Quantas árvores existem com vértices rotulados $1, 2, \ldots, n$? Para $n = 4$ há 16: são 12 caminhos ($4!/2$) e 4 estrelas. O padrão $1, 1, 3, 16, 125, \ldots$ sugere a resposta.

Teorema 2.5 (Cayley, 1889)**.** *O número de árvores com conjunto de vértices* $\{1, \ldots, n\}$ *é* n^{n-2}.

Demonstração (Prüfer, 1918). Associamos a cada árvore T uma sequência $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$, o *código de Prüfer*: para $i = 1, \ldots, n-2$, remova a folha de menor rótulo e anote em a_i o rótulo do seu único vizinho. Sobram, ao final, dois vértices ligados por uma aresta.

Observe que um vértice v aparece no código exatamente $d(v) - 1$ vezes: ele é anotado uma vez para cada vizinho removido antes dele, e só é removido (como folha) depois de perder todos os vizinhos menos um; se nunca for removido, é um dos dois finais e perdeu $d(v) - 1$ vizinhos. Em particular, as folhas de T são exatamente os rótulos ausentes do código.

Para inverter: dada a sequência $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, a primeira folha removida é o menor rótulo b_1 ausente da sequência; a aresta $b_1 a_1$ está em T. Retire b_1 da lista de rótulos e a_1 da sequência e repita: b_2 é o menor rótulo restante ausente de $(a_2, \ldots, a_{n-2})$, e assim por diante. Por fim, ligue os dois rótulos que sobraram. Esse procedimento está definido para toda sequência e reconstrói a única árvore com aquele código. Assim a correspondência é uma bijeção entre árvores e as n^{n-2} sequências. ■



Remoções: $1, 2, 3, 4$
Código: $(4, 4, 5, 5)$

Figura 2.1: Uma árvore com 6 vértices e seu código de Prüfer. Os vértices 4 e 5, de grau 3, aparecem duas vezes.

Exemplo 2.6 (Decodificando um código de Prüfer)**.** Qual árvore com vértices $1, \ldots, 5$ tem código $(3, 3, 1)$? O menor rótulo ausente de $(3, 3, 1)$ é 2: aresta 2 3. Retirando 2 e o primeiro termo, sobram os rótulos $\{1, 3, 4, 5\}$ e o código $(3, 1)$; o menor ausente é 4: aresta 4 3. Sobram $\{1, 3, 5\}$ e (1); o menor ausente é 3: aresta 3 1. Restam 1 e 5: aresta 1 5. A árvore tem arestas $23, 34, 13, 15$; o vértice 3 tem grau 3 e aparece duas vezes no código, o vértice 1 tem grau 2 e aparece uma vez, como previsto.

A propriedade "v aparece $d(v) - 1$ vezes" dá mais: o número de árvores rotuladas em que o vértice i tem grau d_i é o coeficiente multinomial $\binom{n-2}{d_1-1, \ldots, d_n-1}$.

2.3 O teorema da matriz-árvore

Para um grafo qualquer, o número $\tau(G)$ de árvores geradoras é calculado por um determinante. A *matriz laplaciana* de G é $L = D - A$, em que D é a matriz diagonal dos graus e A a de adjacência.

Teorema 2.7 (Kirchhoff, 1847)**.** *Para qualquer* i, $\tau(G)$ *é igual ao determinante da matriz obtida de* L *removendo a linha* i *e a coluna* i.

Kirchhoff chegou a esse resultado estudando correntes em circuitos elétricos, e a ligação não

é acidental: a corrente que atravessa cada resistor de uma rede pode ser expressa por razões entre contagens de árvores geradoras. Não faremos a prova, que usa a fórmula de Cauchy–Binet aplicada à matriz de incidência orientada.

Exemplo 2.8. Para K_n, a laplaciana é $nI - J$. Removendo uma linha e uma coluna, obtém-se a matriz $(n-1)\times(n-1)$ igual a $nI - J$ (agora de ordem $n-1$), cujos autovalores são n (com multiplicidade $n-2$) e $n-(n-1)=1$. O determinante é n^{n-2}, recuperando Cayley. Para o ciclo C_4, o menor é

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4,$$

e de fato C_4 tem 4 árvores geradoras, uma para cada aresta removida.

Os autovalores da laplaciana tornam o cálculo mais rápido em grafos simétricos. A laplaciana é simétrica, com autovalores $0 = \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$, e uma consequência do teorema (via o polinômio característico) é

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\,\mu_2\mu_3\cdots\mu_n.$$

Para um grafo k-regular, $L = kI - A$, e os autovalores de L são $k-\theta$, com θ percorrendo os autovalores de A.

Exemplo 2.9 (Árvores geradoras do grafo de Petersen e do cubo)**.** No grafo de Petersen, os autovalores de A são $3, 1, -2$ com multiplicidades $1, 5, 4$ (exemplo do Capítulo 1); os da laplaciana são $0, 2, 5$ com as mesmas multiplicidades. Logo

$$\tau(\text{Petersen}) = \frac{2^5\cdot 5^4}{10} = 2000.$$

No cubo Q_3, os autovalores de A são $3-2j$ com multiplicidade $\binom{3}{j}$, $j=0,1,2,3$ (cada coordenada contribui com ± 1); os da laplaciana são $2j$. Então

$$\tau(Q_3) = \frac{2^3\cdot 4^3\cdot 6}{8} = 384.$$

Exemplo 2.10 (O bipartido completo)**.** A laplaciana de $K_{m,n}$ tem autovalores 0, m (multiplicidade $n-1$), n (multiplicidade $m-1$) e $m+n$: os vetores que somam zero numa classe e se anulam na outra são autovetores, e o vetor que vale n numa classe e $-m$ na outra completa a lista. Assim

$$\tau(K_{m,n}) = \frac{m^{n-1}\,n^{m-1}\,(m+n)}{m+n} = m^{n-1}n^{m-1}.$$

Para $m=2$ obtemos $2^{n-1}n$, que o Exercício 2.4 pede por contagem direta.

2.4 Árvore geradora de custo mínimo

Suponha que cada aresta e tem um custo $c(e)\ge 0$ (o comprimento da tubulação, o preço de um cabo) e queremos uma árvore geradora de custo total mínimo.

Teorema 2.11 (Kruskal, 1956)**.** *Ordene as arestas por custo crescente e percorra-as, acrescentando cada aresta que não forme ciclo com as já escolhidas. O resultado é uma árvore geradora de custo mínimo.*

Demonstração. O algoritmo para com uma floresta maximal, que num grafo conexo é uma árvore geradora T. Seja T^* ótima com o maior número possível de arestas em comum com T, e suponha $T \neq T^*$. Seja e a primeira aresta de T, na ordem do algoritmo, que não está em T^*. Em $T^* + e$ há um único ciclo, e ele contém uma aresta $f \notin T$. Quando e foi escolhida, f não formava ciclo com as arestas anteriores de T (que estão todas em T^*, junto com f); se $c(f) < c(e)$, o algoritmo teria examinado f antes e a teria aceitado. Logo $c(f) \geq c(e)$, e $T^* + e - f$ é árvore geradora de custo não maior, com mais arestas em comum com T. Contradição. ∎

Exemplo 2.12 (Ligando seis bairros)**.** Na Figura 2.2, os números são custos (em milhões) de ligar pares de bairros. Kruskal examina as arestas em ordem crescente: aceita bc (1), de (2), ab (3), recusa ac (4, fecharia o triângulo abc), aceita cd (5), recusa be (6, fecharia $b\,c\,d\,e$), aceita ef (7) e para, pois já tem $5 = n - 1$ arestas. O custo mínimo é $1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 18$.

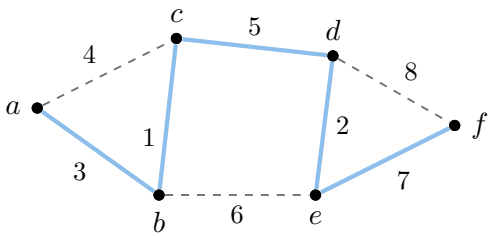


Figura 2.2: Árvore geradora mínima (arestas em azul) obtida por Kruskal; as tracejadas foram recusadas.

2.5 Árvores enraizadas e buscas

Escolhido um vértice r, a *raiz*, toda árvore ganha uma orientação natural: cada vértice $v \neq r$ tem um *pai*, o vizinho de v no caminho de v até r, e os demais vizinhos são seus *filhos*. A *profundidade* de v é $d(r, v)$. Árvores genealógicas, organogramas e o sistema de pastas de um computador são árvores enraizadas.

Duas maneiras de explorar um grafo conexo a partir de r produzem árvores geradoras enraizadas com propriedades especiais.

- Na *busca em largura*, visitam-se primeiro os vizinhos de r, depois os vizinhos destes ainda não visitados, e assim por diante; o pai de cada vértice é aquele que o descobriu. A árvore obtida preserva distâncias: $d_T(r, v) = d_G(r, v)$ para todo v. Foi essa busca que usamos na prova do Teorema 1.17.
- Na *busca em profundidade*, de cada vértice avança-se para um vizinho ainda não visitado enquanto for possível, recuando quando não há. Na árvore T obtida, toda aresta de G fora de T liga um vértice a um ancestral seu.

A propriedade da busca em profundidade é a base do algoritmo de Hopcroft e Tarjan (1973) que encontra pontes, articulações e blocos em tempo linear, e também do primeiro teste de planaridade em tempo linear (Hopcroft–Tarjan, 1974), que retomaremos no Capítulo 15. Para ver como ela revela pontes: uma aresta uv da árvore, com u pai de v, é ponte se e só se nenhuma aresta fora da árvore liga um descendente de v (incluindo v) a um ancestral próprio de v; afinal, só essas arestas poderiam formar um ciclo com uv.

2.6 Pontes, articulações e blocos

Definição 2.13. Um vértice v de um grafo conexo é *de articulação* (ou *vértice de corte*) se $G - v$ é desconexo; uma aresta e é *ponte* se $G - e$ é desconexo. Um grafo conexo sem vértices de articulação, com pelo menos três vértices, é 2-*conexo*. Um *bloco* é um subgrafo conexo maximal sem vértice de articulação próprio.

Proposição 2.14. *Uma aresta é ponte se e somente se não pertence a nenhum ciclo.*

Demonstração. Se uv está num ciclo, o resto do ciclo liga u a v em $G - uv$, e todo caminho que usava uv pode ser desviado. Se uv não é ponte, há um caminho de u a v em $G - uv$, que com uv forma um ciclo. ∎

Dois blocos distintos compartilham no máximo um vértice, que é de articulação; o grafo bipartido cujos vértices são os blocos e as articulações, com adjacência dada pela inclusão, é uma árvore (a *árvore de blocos*). Essa decomposição é útil para o número de cruzamentos: como veremos no Capítulo 10, os blocos de um grafo podem ser desenhados separadamente, e o número de cruzamentos é a soma dos números dos blocos.

Teorema 2.15 (Whitney, 1932)**.** *Um grafo com pelo menos três vértices é* 2*-conexo se e somente se quaisquer dois vértices estão num ciclo comum.*

Demonstração. Se dois vértices quaisquer estão num ciclo, remover um vértice deixa os demais ligados pelos arcos remanescentes dos ciclos; não há articulação. Para a recíproca, mostramos por indução em $d(u, v)$ que u, v estão num ciclo. Se $d(u, v) = 1$, a aresta uv não é ponte (senão uma de suas extremidades seria articulação, já que $n \geq 3$), e está num ciclo. Se $d(u, v) = k \geq 2$, seja w o penúltimo vértice de um menor caminho de u a v. Por indução, u e w estão num ciclo C. Como w não é articulação, existe um caminho P de v a u em $G - w$. Seja x o primeiro vértice de P (a partir de v) que pertence a C. O ciclo procurado é: de u a x por um arco de C que não passa por w, de x a v por P, a aresta vw, e de w a u pelo outro arco de C. ∎

Exemplo 2.16 (Blocos)**.** Na Figura 2.3, o grafo tem as articulações x e y e quatro blocos: um triângulo, um K_4, uma ponte yz e um 4-ciclo. A árvore de blocos é um caminho triângulo $-\, x \,-$ $K_4 \,-\, y$ com dois ramos em y (a ponte e o ciclo), como você pode desenhar. Note que a ponte é, sozinha, um bloco.

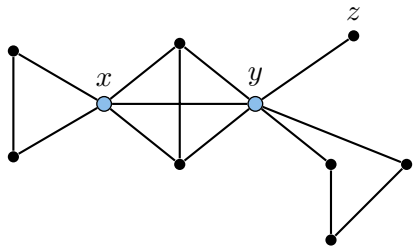


Figura 2.3: Um grafo com duas articulações e quatro blocos.

2.7 Conectividade

Definição 2.17. A *conectividade* $\kappa(G)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice; a *aresta-conectividade* $\lambda(G)$ é o menor número de arestas cuja remoção desconecta G. Dizemos que G é k*-conexo* se $\kappa(G) \geq k$ e k*-aresta-conexo* se $\lambda(G) \geq k$.

Para K_n, $\kappa = \lambda = n-1$. Para o cubo Q_3, $\kappa = \lambda = 3$. Um backbone de internet projetado para tolerar a falha de dois roteadores quaisquer precisa ser 3-conexo.

Teorema 2.18 (Whitney, 1932). *Para todo grafo G, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Demonstração. A desigualdade $\lambda \leq \delta$ é imediata: remover as δ arestas de um vértice de grau mínimo o isola. Para $\kappa \leq \lambda$, seja F um corte mínimo de arestas, $|F| = \lambda$, separando V em S e $\overline{S}$. Se todo vértice de S é adjacente a todo vértice de $\overline{S}$, então $\lambda = |S|\,|\overline{S}| \geq n-1 \geq \kappa$. Caso contrário, existem $x \in S$ e $y \in \overline{S}$ não adjacentes. Seja W o conjunto formado pelos vizinhos de x em $\overline{S}$ e pelos vértices de $S \setminus \{x\}$ que têm algum vizinho em $\overline{S}$. Todo caminho de x a y atravessa uma aresta de F; se essa aresta sai de x, sua outra extremidade está em W; se sai de outro vértice de S, esse vértice está em W. Logo W separa x de y, e $x, y \notin W$. Além disso, a cada vértice de W associamos uma aresta de F diferente: ao vizinho z de x em $\overline{S}$, a aresta xz; a cada $u \in S \setminus \{x\}$, uma aresta de u para $\overline{S}$. Portanto $\kappa \leq |W| \leq |F| = \lambda$. ■

Exemplo 2.19 (Conectividade de grafos clássicos). No grafo de Petersen, $\kappa = \lambda = \delta = 3$. Que $\kappa \geq 3$ se vê pelo teorema de Menger (Capítulo 4), exibindo três caminhos internamente disjuntos entre quaisquer dois vértices; um exemplo explícito aparece no Capítulo 4. Na roda W_n ($n \geq 5$), $\kappa = 3$: retirar o centro deixa um ciclo, que só se desconecta perdendo mais dois vértices; e os três vizinhos de um vértice do aro formam um separador. No hipercubo, $\kappa(Q_d) = d$, um fato que garante que redes de processadores ligados em hipercubo continuam funcionando após $d-1$ falhas.

As desigualdades podem ser estritas: dois K_4 com um vértice comum têm $\kappa = 1$ e $\lambda = \delta = 3$. Dois K_5 ligados por duas arestas disjuntas têm $\kappa = 2$, $\lambda = 2$, $\delta = 4$. Um exemplo com as três desigualdades estritas: tome dois K_5 disjuntos e um vértice novo v ligado a dois vértices de cada um. Então $\delta = 4$ (o vértice v e os vértices dos K_5 não ligados a v), $\lambda = 2$ (as duas arestas de v para um dos K_5) e $\kappa = 1$ (o próprio v). O teorema de Menger (Capítulo 4) dá a interpretação dual: κ e λ medem quantos caminhos disjuntos ligam dois vértices quaisquer.

Exercícios

Exercício 2.1. Uma árvore tem n_k vértices de grau k, para $k = 1, \ldots, \Delta$. Mostre que $n_1 = 2 + \sum_{k \geq 3} (k-2) n_k$. Quantas folhas tem uma árvore com dois vértices de grau 4, três de grau 3 e os demais de grau 1 ou 2?

Exercício 2.2. Mostre que toda árvore com $\Delta(T) = k$ tem pelo menos k folhas.

Exercício 2.3. Sejam T_1 e T_2 árvores geradoras de G e $e \in E(T_1) \setminus E(T_2)$. Prove que existe $f \in E(T_2) \setminus E(T_1)$ tal que $T_1 - e + f$ e $T_2 - f + e$ são ambas árvores geradoras.

Exercício 2.4. Conte as árvores geradoras de $K_{2,n}$.

Exercício 2.5. Mostre que, se todas as arestas de um grafo conexo têm custos distintos, a árvore geradora de custo mínimo é única.

Exercício 2.6. Prove que, num grafo G com $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, vale $\lambda(G) = \delta(G)$.

Exercício 2.7. Mostre que todo grafo conexo com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices que não são de articulação.

Exercício 2.8. Mostre que toda árvore com n vértices tem um vértice cuja remoção deixa componentes com no máximo $n/2$ vértices cada.

Exercício 2.9. Mostre que um grafo conexo com n vértices e exatamente n arestas contém exatamente um ciclo.

CAPÍTULO 3

Percursos: eulerianos e hamiltonianos

Em 1736 Euler resolveu o problema das sete pontes de Königsberg: é possível passear pela cidade atravessando cada ponte exatamente uma vez? A pergunta parece de almanaque, mas é a mesma que um caminhão de coleta de lixo, um limpa-neves ou um leiturista de medidores enfrentam todos os dias: percorrer todas as ruas sem repetir trechos. A pergunta *vizinha*, visitar todos os *lugares* exatamente uma vez, é a do caixeiro-viajante, e tem natureza completamente diferente. Este capítulo trata das duas.

3.1 Trilhas eulerianas

Neste capítulo permitimos arestas múltiplas, como nas pontes de Königsberg. Uma *trilha* é um passeio sem arestas repetidas. Uma *trilha euleriana* usa todas as arestas; se é fechada, é um *circuito euleriano*, e o grafo é *euleriano*.

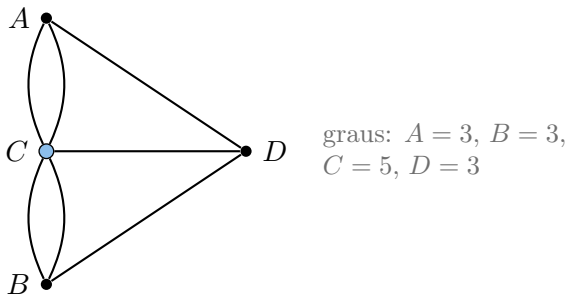


Figura 3.1: O multigrafo das pontes de Königsberg: as quatro regiões da cidade e as sete pontes.

Teorema 3.1 (Euler, 1736; Hierholzer, 1873)**.** *Um multigrafo conexo é euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par. Ele tem uma trilha euleriana aberta se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar, que são as extremidades da trilha.*

Demonstração. Se há circuito euleriano, cada passagem por um vértice usa duas arestas (uma de chegada, uma de saída), e o início e o fim se juntam no vértice inicial; logo todo grau é par.

Reciprocamente, suponha todos os graus pares, e $m \geq 1$. Primeiro: *todo multigrafo com graus pares e pelo menos uma aresta contém um ciclo.* De fato, comece em qualquer vértice com aresta e caminhe sem repetir arestas; ao chegar a um vértice w diferente do inicial, foram usadas um número ímpar de arestas de w, e como $d(w)$ é par sobra uma para sair. A caminhada só para no vértice inicial, fechando uma trilha fechada, que contém um ciclo.

Agora, por indução em m: tome uma trilha fechada W de comprimento máximo. Se W não usasse todas as arestas, removendo as arestas de W os graus continuariam pares, e, pela conexidade, haveria um vértice u de W ainda incidente a alguma aresta. O argumento acima produz uma trilha fechada W' por u, disjunta em arestas de W. Inserindo W' em W no ponto em que W passa por u, obtemos uma trilha fechada mais longa, contradição.

Para o caso aberto, acrescente uma aresta nova entre os dois vértices ímpares: o multigrafo resultante é euleriano, e retirar a aresta nova do circuito deixa uma trilha entre eles. ■

Em Königsberg os quatro graus são ímpares, então o passeio desejado não existe, nem mesmo aberto. A prova acima é um algoritmo (de Hierholzer): construa um circuito qualquer e vá emendando circuitos menores até usar tudo.

Desenhar sem tirar o lápis do papel

O conhecido desafio da "casinha" (um quadrado com um telhado triangular e as duas diagonais do quadrado) tem dois vértices de grau ímpar, os da base; por isso o desenho é possível, mas só começando num deles e terminando no outro.

Exemplo 3.2 (Quais grafos clássicos são eulerianos)**.** O grafo de Königsberg tem os quatro vértices ímpares e não tem nem trilha euleriana. O octaedro é 4-regular e conexo, logo euleriano; o icosaedro é 5-regular e não tem trilha euleriana (12 vértices ímpares). A roda W_n tem os $n-1$ vértices do aro com grau 3, então para $n \geq 4$ há pelo menos três vértices ímpares e nenhuma trilha euleriana. Já $K_{2,4}$ tem graus 4 e 2, e é euleriano.

3.2 O problema do carteiro chinês

Se o grafo das ruas não é euleriano, algumas ruas precisam ser repetidas. Dado um grafo conexo com comprimentos nas arestas, o *problema do carteiro chinês* (Kwan Mei-Ko, 1962) pede um passeio fechado de comprimento mínimo que use todas as arestas ao menos uma vez.

Repetir arestas equivale a duplicá-las e procurar um circuito euleriano no multigrafo resultante. As arestas duplicadas precisam corrigir a paridade: o conjunto O dos vértices de grau ímpar (que tem tamanho par, pelo Teorema 1.3) deve ser emparelhado, e cada par $\{u, v\}$ é ligado duplicando um caminho mínimo de u a v. A solução ótima corresponde a um *emparelhamento perfeito de peso mínimo* no grafo completo sobre O, com peso igual à distância. Edmonds e Johnson (1973) mostraram que isso se resolve em tempo polinomial; voltaremos a emparelhamentos no Capítulo 4.

Exemplo 3.3 (Carteiro em K_4 e em Königsberg)**.** Em K_4 com todas as arestas de comprimento 1, os quatro vértices têm grau 3. É preciso emparelhá-los com caminhos mínimos, e qualquer emparelhamento perfeito usa duas arestas; o passeio ótimo tem comprimento $6 + 2 = 8$. Em Königsberg, contando cada ponte com comprimento 1, os vértices ímpares A, B, C, D podem ser emparelhados por duas pontes (A com D e B com C, por exemplo), e o melhor passeio fechado atravessa 9 pontes.

3.3 Digrafos eulerianos e sequências de de Bruijn

O teorema de Euler tem uma versão orientada, com a mesma prova: *um digrafo conexo (desconsiderando a orientação) tem circuito euleriano orientado se e somente se* $d^+(v) = d^-(v)$ *para todo vértice* v. A aplicação mais bonita é a seguinte.

Um cadeado eletrônico aceita como senha qualquer sequência de n dígitos binários e abre assim que os últimos n dígitos digitados formam a senha. Qual é a menor quantidade de dígitos que, digitada de uma vez, testa todas as 2^n senhas? Cada dígito novo testa no máximo uma senha nova, então são necessários pelo menos $2^n + n - 1$ dígitos. Uma *sequência de de Bruijn* de ordem n é uma sequência circular de 2^n bits na qual cada palavra de comprimento n aparece exatamente

uma vez como bloco consecutivo; abrindo-a e repetindo os $n-1$ primeiros bits no final, obtemos uma sequência linear que atinge a cota.

Teorema 3.4 (de Bruijn, 1946; Good, 1946)**.** *Para todo $n \geq 1$ existe uma sequência de de Bruijn binária de ordem n.*

Demonstração. Para $n = 1$, serve 01. Para $n \geq 2$, construa o digrafo B_{n-1} cujos vértices são as 2^{n-1} palavras de comprimento $n-1$, com um arco de $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ para $a_2 \cdots a_{n-1} b$ para cada $b \in \{0,1\}$, rotulado pela palavra $a_1 \cdots a_{n-1} b$ de comprimento n. Cada palavra de comprimento n rotula exatamente um arco. Todo vértice tem $d^+ = d^- = 2$, e o digrafo é conexo, pois de qualquer palavra chega-se a qualquer outra acrescentando, um a um, os bits da palavra de destino. Logo há um circuito euleriano, que percorre os 2^n arcos. Registrando o último bit de cada arco ao longo do circuito, obtemos uma sequência circular de 2^n bits em que os blocos de comprimento n são exatamente os rótulos dos arcos, cada um uma vez. ■

Para $n = 3$, o circuito produz, por exemplo, a sequência circular 00011101, cujos blocos de três bits são $000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100$. Sequências de de Bruijn aparecem em codificadores de posição, em projetores de luz estruturada para escaneamento 3D e na montagem de genomas, em que pedaços curtos de DNA são encadeados por sobreposição exatamente como os arcos de B_{n-1}.

3.4 Ciclos hamiltonianos

Um *ciclo hamiltoniano* passa por todos os vértices exatamente uma vez; um grafo que o possui é *hamiltoniano*. O nome vem do jogo "volta ao mundo" de W. R. Hamilton (1857), em que se procurava um tal ciclo no dodecaedro.

Ao contrário do caso euleriano, não se conhece condição simples necessária e suficiente, e decidir se um grafo é hamiltoniano é NP-completo (Karp, 1972). Há condições necessárias úteis, por exemplo: se G é hamiltoniano, então para todo $S \subseteq V$ não vazio, $G - S$ tem no máximo $|S|$ componentes (um ciclo, ao perder $|S|$ vértices, se parte em no máximo $|S|$ arcos). Isso mostra, por exemplo, que $K_{m,n}$ com $m < n$ não é hamiltoniano: tirando a classe menor sobram $n > m$ vértices isolados.

As condições suficientes clássicas pedem graus grandes.

Exemplo 3.5 (Hamilton e o dodecaedro)**.** O jogo de Hamilton pedia uma volta pelos 20 vértices do dodecaedro. A Figura 3.2 mostra uma solução: percorra quase todo o pentágono externo, entre no anel do meio, dê a volta quase completa por ele, mergulhe no pentágono interno e retorne. Os prismas $C_n \,\square\, K_2$, os grafos de Platão e os hipercubos Q_d (Exercício 3.4) são todos hamiltonianos.

Exemplo 3.6 (O grafo de Herschel)**.** O grafo da Figura 3.3 tem 11 vértices e 18 arestas, é planar e 3-conexo, isto é, é o esqueleto de um poliedro convexo (por um teorema de Steinitz que veremos no Capítulo 8). Ele é bipartido, com uma classe de 5 vértices (em azul) e outra de 6 (em preto). Todo ciclo alterna entre as classes e, portanto, usa tantos vértices azuis quanto pretos; um ciclo hamiltoniano usaria 5 de um tipo e 6 do outro. Logo o grafo de Herschel não é hamiltoniano. Ele é o menor poliedro com essa propriedade, e mostra que a condição "$G - S$ tem no máximo $|S|$ componentes" também falha aqui de modo visível: retirando os 5 vértices azuis, sobram 6 vértices isolados.

Exemplo 3.7 (Bipartidos completos)**.** $K_{m,n}$ é hamiltoniano se e só se $m = n \geq 2$. Se

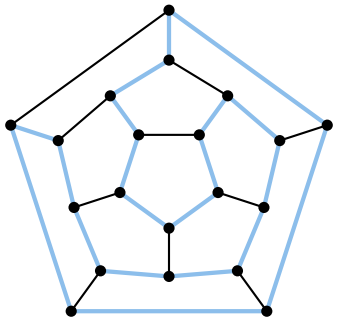


Figura 3.2: Um ciclo hamiltoniano no dodecaedro (em azul).

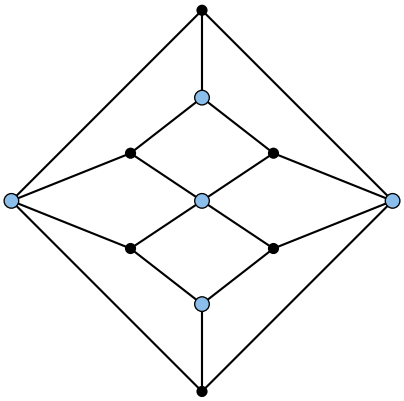


Figura 3.3: O grafo de Herschel: bipartido com classes de 5 e 6 vértices, portanto não hamiltoniano.

$m < n$, o argumento do Herschel se aplica. Se $m = n \geq 2$, com classes $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$, o ciclo $a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n a_1$ serve.

Teorema 3.8 (Dirac, 1952)**.** *Se G tem $n \geq 3$ vértices e $\delta(G) \geq n/2$, então G é hamiltoniano.*

Dirac é consequência do resultado seguinte, que trata pares não adjacentes.

Teorema 3.9 (Ore, 1960)**.** *Se G tem $n \geq 3$ vértices e $d(u) + d(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes u, v, então G é hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha que o teorema seja falso e tome um contraexemplo G com o número máximo de arestas entre os grafos com n vértices que satisfazem a hipótese. G não é completo (pois K_n é hamiltoniano). Acrescentar uma aresta preserva a hipótese; pela maximalidade, para qualquer par não adjacente u, v, o grafo $G + uv$ é hamiltoniano, e seu ciclo hamiltoniano usa uv. Portanto G tem um caminho hamiltoniano $u = x_1, x_2, \ldots, x_n = v$.

Considere os conjuntos de índices

$$S = \{i : u x_{i+1} \in E\}, \qquad T = \{i : x_i v \in E\},$$

ambos contidos em $\{1, \ldots, n-1\}$, com $|S| = d(u)$ e $|T| = d(v)$. Como $|S| + |T| \geq n > n - 1$, existe $i \in S \cap T$. Então

$$x_1\, x_{i+1}\, x_{i+2} \cdots x_n\, x_i\, x_{i-1} \cdots x_1$$

é um ciclo hamiltoniano de G: use a aresta $u x_{i+1}$, percorra o caminho até v, volte pela aresta $v x_i$ e desça até u. Contradição. ∎

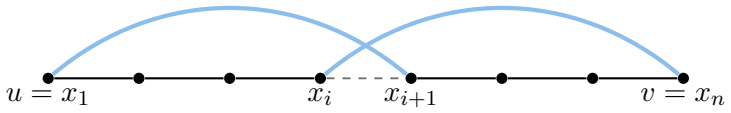


Figura 3.4: A troca na prova de Ore: a aresta tracejada $x_i x_{i+1}$ sai e entram as duas arestas em azul.

Exemplo 3.10 (Ore sem Dirac)**.** Tome K_4 e acrescente um vértice v ligado a dois de seus vértices. Com $n = 5$, o vértice v tem grau $2 < 5/2$, e Dirac não se aplica. Os pares não adjacentes são v com cada um dos dois vértices de K_4 não ligados a ele, que têm grau 3; a soma é $5 = n$, e Ore garante um ciclo hamiltoniano: entre em v por um vizinho, saia pelo outro e feche passando pelos dois vértices restantes do K_4.

Exemplo 3.11 (O grafo de Petersen)**.** O grafo de Petersen tem $\delta = 3 < 5$, e Ore também não se aplica. De fato ele não é hamiltoniano (Exercício 3.3), mas por pouco: retirando qualquer vértice, o grafo que sobra é hamiltoniano. Grafos com essa propriedade chamam-se *hipo-hamiltonianos*, e o de Petersen é o menor deles.

Demonstração do Teorema 3.8. Se $\delta \geq n/2$, então $d(u) + d(v) \geq n$ para quaisquer u, v; aplique Ore. ∎

A cota de Dirac é justa: o grafo $K_{k,k+1}$ tem $n = 2k + 1$ e $\delta = k = (n-1)/2$, e não é hamiltoniano. A prova de Ore sugere um fortalecimento. Dado G, o *fecho* $\mathrm{cl}(G)$ é obtido acrescentando repetidamente arestas uv entre vértices não adjacentes com $d(u) + d(v) \geq n$ (os graus sendo os do grafo atual), até não ser mais possível.

Teorema 3.12 (Bondy–Chvátal, 1976)**.** *G é hamiltoniano se e somente se $\mathrm{cl}(G)$ é hamiltoniano. Em particular, se $\mathrm{cl}(G)$ é completo, G é hamiltoniano.*

O mesmo argumento da prova de Ore mostra que acrescentar uma aresta uv com $d(u)+d(v) \geq n$ não altera a propriedade de ser hamiltoniano; o fecho está bem definido porque não depende da ordem dos acréscimos.

3.5 O caixeiro-viajante

No *problema do caixeiro-viajante*, dado um grafo completo com distâncias nas arestas, procura-se um ciclo hamiltoniano de comprimento mínimo: a rota mais curta para um entregador que visita todos os clientes e volta ao depósito. Por conter o problema do ciclo hamiltoniano, ele é NP-difícil. Quando as distâncias satisfazem a desigualdade triangular $c(xz) \leq c(xy) + c(yz)$, há uma aproximação simples com garantia.

Proposição 3.13. *Com desigualdade triangular, a seguinte rota tem comprimento no máximo o dobro do ótimo: tome uma árvore geradora mínima T, percorra-a em profundidade passando duas vezes por cada aresta e, nesse passeio, pule os vértices já visitados.*

Demonstração. Seja H^* uma rota ótima. Retirando uma aresta de H^* obtemos um caminho hamiltoniano, que é árvore geradora; logo $c(T) \leq c(H^*)$. O passeio duplo em T custa $2c(T)$. Cada atalho troca um trecho $x \to \cdots \to z$ do passeio pela aresta direta xz, que, pela desigualdade triangular, não é mais longa. Assim a rota final custa no máximo $2c(T) \leq 2c(H^*)$. ∎

Christofides (1976) melhorou a garantia para $3/2$: em vez de duplicar T, acrescenta-se um

emparelhamento perfeito de custo mínimo entre os vértices de grau ímpar de T, exatamente como no carteiro chinês, e toma-se um circuito euleriano com atalhos. Durante mais de quarenta anos não se soube fazer melhor; Karlin, Klein e Oveis Gharan (2021) obtiveram $3/2 - \varepsilon$ com ε positivo e extremamente pequeno.

3.6 Torneios

Um *torneio* é uma orientação de K_n: entre cada par de jogadores há um jogo, e a seta aponta do vencedor para o perdedor. Num campeonato de pontos corridos sem empates, pergunta-se se é sempre possível enfileirar os times de modo que cada um tenha vencido o seguinte.

Teorema 3.14 (Rédei, 1934)**.** *Todo torneio tem um caminho orientado hamiltoniano.*

Demonstração. Por indução em n; para $n = 1$ é trivial. Remova um vértice v e tome, por hipótese, um caminho hamiltoniano $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{n-1}$ no restante. Se $v \to x_1$, coloque v no início. Se $x_{n-1} \to v$, coloque-o no fim. Senão, $x_1 \to v$ e $v \to x_{n-1}$; seja i o maior índice com $x_i \to v$; então $i < n-1$ e $v \to x_{i+1}$, e v entra entre x_i e x_{i+1}. ∎

Exemplo 3.15 (Ordenando quatro times)**.** Num torneio entre A, B, C, D com resultados $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, $D \to A$, $B \to D$, $C \to D$, o caminho $B \to C \to D \to A$ enfileira todos os times, e a prova de Rédei o encontra inserindo os vértices um a um. Observe que um ciclo de vitórias como $A \to B \to C \to A$ impede qualquer classificação "transitiva", embora sempre exista uma fila hamiltoniana.

Rédei provou ainda que o número de caminhos hamiltonianos de um torneio é sempre ímpar. Um vértice que vence todos os outros por no máximo dois passos sempre existe: é um vértice de grau de saída máximo, chamado *rei* (Landau, 1953); o Exercício 3.6 pede essa prova.

Exercícios

Exercício 3.1. Para quais n o grafo K_n é euleriano? Para quais m, n o grafo $K_{m,n}$ é euleriano? E o cubo Q_d?

Exercício 3.2. Um grafo conexo tem exatamente $2k$ vértices de grau ímpar, $k \geq 1$. Mostre que suas arestas podem ser particionadas em k trilhas, e não em menos.

Exercício 3.3. Mostre que o grafo de Petersen não é hamiltoniano.

Exercício 3.4. Prove que Q_d é hamiltoniano para todo $d \geq 2$. Interprete o ciclo como uma maneira de listar todas as palavras binárias de comprimento d trocando um bit por vez.

Exercício 3.5. Um cavalo de xadrez pode percorrer um tabuleiro $4 \times n$ visitando cada casa exatamente uma vez e voltando à casa inicial? Mostre que não, para nenhum n.

Exercício 3.6. Num torneio, seja v um vértice de grau de saída máximo. Mostre que todo outro vértice é alcançado a partir de v por um caminho orientado de comprimento no máximo 2.

Exercício 3.7. Mostre que, se $\delta(G) \geq (n-1)/2$, então G tem um caminho hamiltoniano.

Exercício 3.8. Quantos ciclos hamiltonianos tem a roda W_n, $n \geq 5$?

Exercício 3.9. Mostre que todo grafo com $n \geq 3$ vértices e pelo menos $\binom{n-1}{2} + 2$ arestas é hamiltoniano.

CAPÍTULO 4

Emparelhamentos e caminhos disjuntos

Uma escola precisa distribuir professores entre turmas, cada professor apto a lecionar apenas certas disciplinas; um hospital precisa alocar residentes a plantões; um sistema de doação cruzada de rins precisa formar pares compatíveis. Todos esses são problemas de *emparelhamento*. O mesmo raciocínio, aplicado a caminhos em vez de arestas, leva ao teorema de Menger, que mede a robustez de uma rede pelo número de rotas independentes entre dois pontos.

4.1 Emparelhamentos e o teorema de Berge

Definição 4.1. Um *emparelhamento* M é um conjunto de arestas duas a duas sem extremidade comum. Os vértices tocados por M estão *cobertos*. M é *perfeito* se cobre todos os vértices, e *máximo* se tem o maior tamanho possível, denotado $\nu(G)$.

Dado M, um caminho é M*-alternante* se suas arestas alternam entre fora e dentro de M, e M*-aumentante* se, além disso, começa e termina em vértices não cobertos. Trocar as arestas de um caminho aumentante (as de M saem, as outras entram) produz um emparelhamento com uma aresta a mais.

Teorema 4.2 (Berge, 1957)**.** *Um emparelhamento M é máximo se e somente se não existe caminho M-aumentante.*

Demonstração. Se existe caminho aumentante, M não é máximo, como observado. Reciprocamente, seja M' com $|M'| > |M|$ e considere a diferença simétrica $D = M \triangle M'$. Em D cada vértice tem grau no máximo 2 (no máximo uma aresta de cada emparelhamento), então D é união disjunta de caminhos e ciclos cujas arestas alternam entre M e M'. Os ciclos têm tantas arestas de M quanto de M'. Como D tem mais arestas de M', algum caminho componente tem mais arestas de M' que de M: ele começa e termina com arestas de M', e suas extremidades não são cobertas por M. É um caminho M-aumentante. ∎

Exemplo 4.3 (Contando emparelhamentos perfeitos)**.** Em $K_{n,n}$, um emparelhamento perfeito escolhe um parceiro distinto para cada vértice de uma classe: há $n!$ deles. Em K_{2n}, o vértice 1 tem $2n-1$ parceiros possíveis, o menor vértice restante tem $2n-3$, e assim por diante: $(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$. No cubo Q_3, visto como dois quadrados (de cima e de baixo) ligados por quatro arestas verticais, o número de arestas verticais usadas é par, pois cada quadrado precisa ficar com um número par de vértices a emparelhar internamente. Com 4 verticais há 1 emparelhamento; com nenhuma, cada quadrado se emparelha de 2 modos, total 4; com 2 verticais, elas saem de dois cantos vizinhos (4 escolhas), e o resto fica determinado. São $1+4+4=9$.

Exemplo 4.4 (Um caminho aumentante)**.** No caminho $P_6 = v_1v_2\cdots v_6$, o emparelhamento $M = \{v_2v_3, v_4v_5\}$ é *maximal* (não cabe mais nenhuma aresta), mas não é máximo: $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ é M-aumentante, e a troca produz $\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$, perfeito. Maximal e máximo são coisas diferentes, e é por isso que algoritmos gulosos simples falham.

O algoritmo natural, procurar caminhos aumentantes enquanto existirem, é eficiente em grafos bipartidos (busca em largura alternante). Em grafos gerais, ciclos ímpares atrapalham a busca; Edmonds (1965) resolveu isso com a técnica de contrair "flores", num dos primeiros algoritmos polinomiais celebrados como tal.

4.2 O teorema de Hall

Num grafo bipartido com classes A e B, queremos um emparelhamento que cubra A. Para $S \subseteq A$, $N(S)$ denota o conjunto dos vizinhos de S em B.

Teorema 4.5 (Hall, 1935). *Um grafo bipartido com classes A, B tem um emparelhamento que cobre A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.*

Demonstração. A condição é necessária: os parceiros dos vértices de S são distintos e estão em $N(S)$. Para a suficiência, indução em $|A|$; com $|A| = 1$ é imediato. Há dois casos.

Caso folgado: $|N(S)| \geq |S| + 1$ para todo $\emptyset \neq S \subsetneq A$. Tome qualquer aresta ab, $a \in A$, e remova a e b. No grafo restante, cada $S \subseteq A \setminus \{a\}$ não vazio perdeu no máximo o vizinho b, e ainda tem $|N(S)| \geq |S|$. Por indução cobrimos $A \setminus \{a\}$, e acrescentamos ab.

Caso justo: existe $\emptyset \neq S_0 \subsetneq A$ com $|N(S_0)| = |S_0|$. O subgrafo induzido por $S_0 \cup N(S_0)$ satisfaz a condição de Hall (os vizinhos de subconjuntos de S_0 estão em $N(S_0)$), e por indução há um emparelhamento M_1 cobrindo S_0, que usa todo $N(S_0)$. No subgrafo induzido por $(A \setminus S_0) \cup (B \setminus N(S_0))$, para $T \subseteq A \setminus S_0$,

$$|N(T) \setminus N(S_0)| = |N(T \cup S_0)| - |N(S_0)| \geq |T| + |S_0| - |S_0| = |T|.$$

Por indução há M_2 cobrindo $A \setminus S_0$ ali, e $M_1 \cup M_2$ cobre A. ■

Corolário 4.6. *Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem emparelhamento perfeito. Consequentemente, suas arestas se particionam em k emparelhamentos perfeitos.*

Demonstração. Para $S \subseteq A$, as $k|S|$ arestas que saem de S chegam a $N(S)$, que recebe ao todo $k|N(S)|$ arestas; logo $|N(S)| \geq |S|$. Como $|A| = |B|$ (Exercício 1.7), o emparelhamento que cobre A é perfeito. Removendo-o, sobra um grafo bipartido $(k-1)$-regular; repita. ■

Exemplo 4.7 (Quadrados latinos). Um retângulo latino $r \times n$ ($r < n$), com cada linha uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$ e sem repetição nas colunas, sempre se estende a um quadrado latino. Monte o grafo bipartido "colunas × símbolos", ligando a coluna j ao símbolo s se s ainda não aparece na coluna j. Cada coluna tem $n - r$ símbolos faltantes e cada símbolo falta em $n - r$ colunas (aparece r vezes, uma por linha). O grafo é $(n - r)$-regular, e um emparelhamento perfeito é uma nova linha.

Exemplo 4.8 (Quando Hall falha). Cinco estagiários $e_1, \ldots, e_5$ devem ocupar cinco vagas; e_1, e_2 e e_3 só aceitam as vagas x e y, enquanto e_4, e_5 aceitam qualquer uma. Para $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, $|N(S)| = 2 < 3$, e a condição de Hall acusa a impossibilidade antes de qualquer tentativa. É exatamente esse tipo de certificado curto que torna o teorema útil na prática.

Exemplo 4.9 (O grafo de Heawood tem emparelhamento perfeito). O grafo de Heawood é bipartido e 3-regular; pelo Corolário 4.6, tem emparelhamento perfeito e, mais ainda, suas 21 arestas se dividem em três emparelhamentos perfeitos de 7 arestas. No plano de Fano, um emparelhamento perfeito é uma maneira de escolher, para cada reta, um de seus pontos, sem repetir pontos. Há exatamente 24 maneiras.

4.3 O teorema de König

Uma *cobertura por vértices* é um conjunto C de vértices que toca todas as arestas; $\tau(G)$ é o menor tamanho de uma. Como as arestas de um emparelhamento precisam de vértices distintos para serem cobertas, $\nu(G) \le \tau(G)$ em qualquer grafo. Em K_3, $\nu = 1 < 2 = \tau$.

Teorema 4.10 (König, 1931; Egerváry, 1931)**.** *Em todo grafo bipartido, $\nu(G) = \tau(G)$.*

Demonstração. Seja C uma cobertura mínima, $C = R \cup T$ com $R \subseteq A$ e $T \subseteq B$. Afirmamos que o subgrafo H_1 entre R e $B \setminus T$ satisfaz Hall para R: se $S \subseteq R$ tivesse $|N(S) \setminus T| < |S|$, então $(C \setminus S) \cup (N(S) \setminus T)$ ainda cobriria todas as arestas (as arestas de S vão para T ou para $N(S) \setminus T$) e seria menor que C. Logo há em H_1 um emparelhamento de tamanho $|R|$; analogamente, entre T e $A \setminus R$ há um de tamanho $|T|$. Os dois usam vértices disjuntos, e juntos têm $|C|$ arestas. Assim $\nu \ge \tau$. ∎

Exemplo 4.11 (Torres num tabuleiro com casas proibidas)**.** Numa matriz 0-1, uma *linha* é uma fileira ou coluna. Pelo teorema de König aplicado ao grafo bipartido fileiras × colunas (com aresta onde há 1), o maior número de uns sem dois na mesma linha é igual ao menor número de linhas que cobrem todos os uns. Na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

as colunas $1, 2$ e a fileira 3 cobrem todos os uns, e há três uns independentes nas posições $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$; logo o máximo é 3. Em linguagem de xadrez: no máximo três torres que não se atacam podem ser colocadas nas casas marcadas.

4.4 O teorema de Tutte

Para grafos gerais, o obstáculo é a presença de componentes ímpares. Seja $o(H)$ o número de componentes de H com número ímpar de vértices.

Teorema 4.12 (Tutte, 1947)**.** *G tem emparelhamento perfeito se e somente se $o(G - S) \le |S|$ para todo $S \subseteq V$.*

A necessidade é clara: num emparelhamento perfeito, cada componente ímpar de $G - S$ precisa enviar pelo menos um vértice para ser emparelhado em S, e esses parceiros são distintos. A suficiência tem várias provas; uma das mais curtas (Lovász) toma um contraexemplo maximal em arestas, analisa o conjunto U dos vértices adjacentes a todos os outros e mostra que $G - U$ é união de grafos completos, o que permite construir o emparelhamento diretamente. Não a reproduziremos. Uma aplicação clássica:

Teorema 4.13 (Petersen, 1891)**.** *Todo grafo cúbico sem pontes tem emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja $S \subseteq V$ e H uma componente ímpar de $G - S$. A soma dos graus em G dos vértices de H é $3|V(H)|$, ímpar; as arestas internas contribuem com um número par; logo o número de arestas entre H e S é ímpar. Não pode ser 1 (seria uma ponte), então é pelo menos 3. Somando sobre as componentes ímpares, há pelo menos $3\,o(G - S)$ arestas chegando a S, que recebe no máximo $3|S|$. Logo $o(G - S) \le |S|$, e Tutte se aplica. ∎

Exemplo 4.14 (Os seis emparelhamentos perfeitos do grafo de Petersen)**.** O complemento de um emparelhamento perfeito num grafo cúbico é um 2-fator. No grafo de Petersen, como a cintura é 5 e não há ciclo hamiltoniano, um 2-fator só pode ser formado por dois pentágonos disjuntos. Retirados os 5 vértices de um pentágono, os outros 5 induzem outro pentágono: um vértice de fora com dois vizinhos p, p' no pentágono formaria, com o caminho mais curto de p a p' dentro do pentágono, um ciclo de comprimento no máximo 4; logo cada vértice de fora tem exatamente um vizinho no pentágono e dois entre os de fora. Os 12 pentágonos (calculados no Capítulo 1) formam, assim, 6 pares complementares, e cada par determina um emparelhamento perfeito, as 5 arestas entre os dois pentágonos. O grafo de Petersen tem exatamente 6 emparelhamentos perfeitos.

Retirando o emparelhamento perfeito de um grafo cúbico sem ponte, sobra um 2-*fator*: um subgrafo gerador 2-regular, isto é, uma união disjunta de ciclos que cobre todos os vértices. No grafo de Petersen, todo 2-fator é formado por dois 5-ciclos, o que dá outra prova de que ele não é hamiltoniano.

4.5 Emparelhamentos estáveis

Até aqui só importava *quem pode* ser emparelhado com quem. Em muitas situações há preferências: hospitais e residentes, escolas e alunos, doadores e receptores. Considere n candidatos e n vagas; cada candidato ordena as vagas, e cada vaga ordena os candidatos. Um emparelhamento perfeito é *instável* se existem um candidato a e uma vaga b, não emparelhados entre si, que preferem um ao outro aos seus respectivos parceiros; caso contrário, é *estável*.

Teorema 4.15 (Gale–Shapley, 1962)**.** *Sempre existe um emparelhamento estável.*

Demonstração. O algoritmo das propostas. A cada rodada, cada candidato livre propõe à vaga mais bem colocada em sua lista entre as que ainda não o rejeitaram. Cada vaga, entre as propostas recebidas nessa rodada e o candidato que eventualmente já retém, fica com o preferido e rejeita os demais. Repete-se enquanto houver candidato livre.

O algoritmo termina: cada candidato propõe a cada vaga no máximo uma vez, então há no máximo n^2 propostas. Uma vaga, depois de receber a primeira proposta, permanece ocupada e só troca para candidatos que prefere; logo seu parceiro só melhora. Ao final todos estão emparelhados: se um candidato estivesse livre, teria sido rejeitado por todas as n vagas, e todas estariam ocupadas por outros n candidatos, o que é impossível.

Suponha que a e b prefiram um ao outro aos parceiros finais. Como a prefere b à sua vaga final, a propôs a b antes e foi rejeitado em algum momento; nesse momento b ficou com alguém de quem gosta mais que de a, e daí em diante só melhorou. Logo b prefere seu parceiro final a a, contradição. ∎

Exemplo 4.16 (Gale–Shapley em ação)**.** Três candidatos a, b, c e três vagas X, Y, Z têm as listas

$$a : X, Y, Z \qquad b : X, Z, Y \qquad c : Y, X, Z; \qquad X : b, a, c \qquad Y : a, c, b \qquad Z : a, b, c.$$

Na primeira rodada, a e b propõem a X e c propõe a Y; X fica com b e rejeita a. Na segunda, a propõe a Y, que troca c por a. Na terceira, c propõe a X, que mantém b. Na quarta, c propõe a Z e é aceito. Resultado: $a\,Y$, $b\,X$, $c\,Z$. Você pode verificar que nenhum par candidato–vaga prefere-se mutuamente aos parceiros obtidos: por exemplo, c prefere Y e X a Z, mas Y prefere a e X prefere b a c.

O resultado tem um refinamento notável: o emparelhamento produzido é, para cada candidato, o

melhor que ele pode ter em qualquer emparelhamento estável. Versões desse algoritmo distribuem residentes médicos nos Estados Unidos desde a década de 1950 e alunos nas escolas públicas de várias cidades; Shapley e Roth receberam o prêmio Nobel de Economia de 2012 por essa linha de trabalho.

4.6 O teorema de Menger

Sejam s, t vértices não adjacentes. Caminhos de s a t são *internamente disjuntos* se não compartilham vértices além de s e t. Um conjunto $X \subseteq V \setminus \{s, t\}$ é um *separador* s–t se $G - X$ não tem caminho de s a t.

Teorema 4.17 (Menger, 1927)**.** *Se s, t não são adjacentes, o número máximo de caminhos s–t internamente disjuntos é igual ao tamanho mínimo de um separador s–t.*

É mais cômodo provar uma versão para conjuntos. Para $A, B \subseteq V$, um *caminho* A–B começa em A, termina em B e não tem outros vértices em $A \cup B$; um conjunto X *separa* A de B se todo caminho A–B passa por X (aqui X pode conter vértices de A e de B; por exemplo, A separa A de B).

Lema 4.18. *O número máximo de caminhos A–B dois a dois disjuntos é igual ao tamanho mínimo k de um conjunto que separa A de B.*

Demonstração (Göring, 2000). Caminhos disjuntos usam vértices distintos de qualquer separador, então são no máximo k. Mostramos por indução em m que existem k. Se G não tem arestas, $A \cap B$ separa, tem pelo menos k elementos, e cada um é um caminho trivial. Seja $e = xy$ uma aresta e suponha que G não tenha k caminhos disjuntos. Então o grafo G/e, em que e foi contraída num vértice v_e, também não os tem (caminhos em G/e se levantam a caminhos em G), e por indução tem um separador Y com menos de k vértices. Se $v_e \notin Y$, Y separaria A de B em G; logo $v_e \in Y$, e $X = (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ separa A de B em G com $|X| \leq k$, portanto $|X| = k$.

Considere agora $G - e$. Todo conjunto Z que separa A de X em $G - e$ separa A de B em G: um caminho A–B em G encontra X, e o trecho até o primeiro vértice de X não usa e (as duas extremidades de e estão em X), logo encontra Z. Assim $|Z| \geq k$, e por indução há k caminhos A–X disjuntos em $G - e$. Do mesmo modo há k caminhos X–B disjuntos. Como X separa A de B, os caminhos das duas famílias só se encontram em X, cada vértice de X sendo extremidade de exatamente um caminho de cada família. Emendando-os, obtemos k caminhos A–B disjuntos em G, contradição. ∎

Demonstração do Teorema 4.17. Aplique o lema ao grafo $G - \{s, t\}$ com $A = N(s)$ e $B = N(t)$. Os conjuntos que separam A de B ali são exatamente os separadores s–t de G, e cada caminho A–B se estende, acrescentando s e t nas pontas, a um caminho s–t; caminhos disjuntos tornam-se internamente disjuntos. ∎

Exemplo 4.19 (Três caminhos no grafo de Petersen)**.** Use a descrição por pares de $\{1, \ldots, 5\}$. Os vértices 12 e 13 não são adjacentes. Três caminhos internamente disjuntos entre eles:

$$12 - 45 - 13, \qquad 12 - 34 - 25 - 13, \qquad 12 - 35 - 24 - 13.$$

Cada aresta liga pares disjuntos, como deve ser, e os vértices internos 45, 34, 25, 35, 24 são distintos. Como $d(12) = 3$, não pode haver um quarto caminho, e os três vizinhos de 12 formam um separador mínimo, em acordo com Menger. Como qualquer par de vértices não adjacentes

é levado neste por uma permutação de $\{1, \ldots, 5\}$, conclui-se que não há separador com dois vértices e $\kappa = 3$.

Há versões para arestas (o número máximo de caminhos s–t disjuntos em arestas é o tamanho mínimo de um corte de arestas separando s de t) e para conjuntos. Delas segue a caracterização global:

Corolário 4.20 (Whitney, 1932)**.** *G é k-conexo se e somente se quaisquer dois vértices são ligados por k caminhos internamente disjuntos. G é k-aresta-conexo se e somente se quaisquer dois vértices são ligados por k caminhos disjuntos em arestas.*

4.7 Fluxo máximo e corte mínimo

Numa rede de distribuição, cada cano (aresta orientada) e tem capacidade $c(e) \geq 0$. Um *fluxo* de s para t atribui a cada arco um valor $0 \leq f(e) \leq c(e)$ de modo que, em cada vértice diferente de s, t, o que entra é igual ao que sai. O *valor* do fluxo é o saldo que sai de s. Um *corte* $(S, \overline{S})$ com $s \in S$, $t \notin S$ tem capacidade igual à soma das capacidades dos arcos de S para $\overline{S}$.

Teorema 4.21 (Ford–Fulkerson, 1956)**.** *O valor máximo de um fluxo de s para t é igual à capacidade mínima de um corte que separa s de t.*

O algoritmo de Ford–Fulkerson aumenta o fluxo ao longo de caminhos aumentantes na rede residual, numa generalização direta da ideia de Berge. Com capacidades inteiras, existe fluxo máximo inteiro, e daí saem como casos particulares Menger (capacidades 1) e König–Hall (rede bipartida com fonte e sumidouro).

Exercícios

Exercício 4.1. Retire de um tabuleiro 8×8 duas casas de cores diferentes, quaisquer. Mostre que o restante pode ser coberto por dominós 1×2.

Exercício 4.2. Mostre que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

Exercício 4.3. Um baralho comum de 52 cartas é distribuído em 13 montes de 4 cartas. Mostre que é possível escolher uma carta de cada monte de modo que as 13 cartas escolhidas tenham os 13 valores (A, 2, …, K).

Exercício 4.4. Exiba um grafo cúbico (com pontes) sem emparelhamento perfeito.

Exercício 4.5. Seja G bipartido com classes A, B e $\delta(A) \geq \Delta(B)$, isto é, todo vértice de A tem grau pelo menos o de qualquer vértice de B, e $\delta(A) \geq 1$. Mostre que existe emparelhamento cobrindo A.

Exercício 4.6. Prove que, num grafo 2-conexo, quaisquer duas arestas pertencem a um ciclo comum.

Exercício 4.7. Mostre que, em todo grafo sem vértices isolados, o tamanho mínimo $\rho(G)$ de um conjunto de arestas que cobre todos os vértices satisfaz $\nu(G) + \rho(G) = n$ (Gallai).

Exercício 4.8. Mostre que todo grafo bipartido com m arestas e grau máximo $\Delta \geq 1$ tem um emparelhamento com pelo menos m/Δ arestas.

Exercício 4.9. A *escada* $P_2 \,\square\, P_n$ tem $2n$ vértices. Mostre que seu número de emparelhamentos perfeitos (isto é, de coberturas de uma faixa $2 \times n$ por dominós) é o número de Fibonacci F_{n+1}, com $F_1 = F_2 = 1$.

CAPÍTULO 5

Coloração

A coordenação de um colégio precisa marcar as provas finais: disciplinas que têm algum aluno em comum não podem ocorrer no mesmo horário. Faça um grafo com uma disciplina por vértice, ligando duas quando compartilham alunos. Um horário viável é uma atribuição de "cores" (horários) aos vértices em que vizinhos recebem cores diferentes, e o menor número de horários é o número cromático. A mesma estrutura aparece na alocação de frequências a antenas de celular, na alocação de registradores num compilador e, historicamente, na coloração de mapas, que levará ao teorema das quatro cores no Capítulo 8.

5.1 Número cromático

Definição 5.1. Uma *k-coloração* de G é uma função $c : V \to \{1, \dots, k\}$ com $c(u) \neq c(v)$ sempre que $uv \in E$. As *classes de cor* $c^{-1}(i)$ são conjuntos independentes. O *número cromático* $\chi(G)$ é o menor k para o qual existe k-coloração.

Exemplos: $\chi(K_n) = n$; $\chi(C_n) = 2$ se n é par e 3 se n é ímpar; $\chi(G) \leq 2$ se e só se G é bipartido (Teorema 1.17); $\chi(\text{Petersen}) = 3$.

Exemplo 5.2 (Rodas)**.** Na roda W_n, o centro é adjacente a todos os outros e precisa de uma cor exclusiva; o aro C_{n-1} precisa de 2 ou 3 cores. Logo $\chi(W_n) = 3$ se n é ímpar (aro par) e $\chi(W_n) = 4$ se n é par (aro ímpar). A roda W_6 é o menor exemplo de grafo com $\chi = 4$ sem conter K_4.

Exemplo 5.3 (Uma escala de provas)**.** Seis disciplinas, Matemática, Física, Química, Biologia, História e Geografia, têm conflitos assim: Matemática conflita com todas as outras, e as outras cinco conflitam em ciclo, Física–Química–Biologia–História–Geografia–Física. O grafo de conflitos é a roda W_6, e pelo exemplo anterior são necessários e suficientes 4 horários: Matemática sozinha num horário, e o ciclo ímpar das outras cinco em três horários, por exemplo {Física, Biologia}, {Química, História}, {Geografia}.

Duas cotas inferiores imediatas: se $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique e $\alpha(G)$ o do maior conjunto independente, então

$$\chi(G) \geq \omega(G) \qquad \text{e} \qquad \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)},$$

a segunda porque as χ classes de cor, cada uma com no máximo α vértices, cobrem os n vértices.

Exemplo 5.4 (O grafo de Petersen tem número cromático 3)**.** O pentágono externo é ciclo ímpar, então $\chi \geq 3$. A Figura 5.1 exibe uma 3-coloração, com as cores preto, azul e branco. Uma cota inferior pelo conjunto independente não ajudaria aqui: $\alpha(\text{Petersen}) = 4$ e $10/4$ não chega a 3.

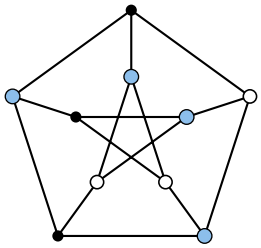


Figura 5.1: Uma 3-coloração do grafo de Petersen.

5.2 O algoritmo guloso

Ordene os vértices $v_1, \ldots, v_n$ e dê a cada v_i a menor cor não usada por seus vizinhos já coloridos. Como v_i tem no máximo $d(v_i)$ vizinhos, alguma cor em $\{1, \ldots, d(v_i)+1\}$ está livre.

Proposição 5.5. *$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. Mais precisamente, se todo subgrafo de G tem um vértice de grau no máximo k (dizemos que G é k-*degenerado*), então $\chi(G) \leq k+1$.*

Demonstração. A primeira afirmação é a análise acima. Para a segunda, escolha v_n de grau no máximo k em G, depois v_{n-1} de grau no máximo k em $G - v_n$, e assim por diante. Na ordem $v_1, \ldots, v_n$, cada vértice tem no máximo k vizinhos anteriores, e o guloso usa no máximo $k+1$ cores. ■

Corolário 5.6. *Todo grafo planar é 6-colorível.*

Demonstração. Pelo Teorema 7.5, um grafo planar com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $3n-6$ arestas, logo um vértice de grau no máximo 5. Subgrafos de planares são planares; portanto todo planar é 5-degenerado. ■

A ordem importa muito: em $K_{n,n}$ menos um emparelhamento perfeito, a ordem $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ força o guloso a usar n cores, embora o grafo seja bipartido.

5.3 O teorema de Brooks

A cota $\Delta+1$ é atingida por grafos completos e ciclos ímpares. Brooks mostrou que são os únicos casos.

Teorema 5.7 (Brooks, 1941)**.** *Se G é conexo e não é completo nem ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Exemplo 5.8 (Brooks em grafos clássicos)**.** O dodecaedro, o grafo de Petersen e o grafo de Heawood são cúbicos, conexos, não completos e não são ciclos; por Brooks, $\chi \leq 3$. Os dois primeiros têm pentágonos, logo $\chi = 3$; o de Heawood é bipartido e $\chi = 2$. O icosaedro é 5-regular, então Brooks dá $\chi \leq 5$; a vizinhança de cada vértice é um pentágono, e o vértice com seu pentágono formam uma roda W_6, de modo que $\chi \geq 4$. Como o icosaedro tem $\alpha = 3$ e 12 vértices, uma 4-coloração precisa de quatro classes de exatamente três vértices, e ela existe (pelo teorema das quatro cores, ou exibindo-a à mão).

Ideia da prova (Lovász, 1975). Seja $\Delta = k \geq 3$ (o caso $k \leq 2$ é o de caminhos e ciclos). Se G não é k-regular, ordene os vértices de modo que cada um, exceto o último, tenha um vizinho posterior: por exemplo, por distância decrescente a um vértice r de grau menor que k, terminando em r. Então o guloso usa no máximo k cores, pois cada vértice tem no máximo $k-1$ vizinhos anteriores,

e r tem grau menor que k. Se G é k-regular, procura-se um vértice r com dois vizinhos x, y não adjacentes tais que $G - x - y$ é conexo; colorindo x e y com a cor 1 primeiro e depois o restante por distância decrescente a r, o vértice r termina com dois vizinhos de mesma cor e encontra uma cor livre. A existência de tais x, y, r usa a conectividade (casos $\kappa = 1$, $\kappa = 2$ e $\kappa \geq 3$) e o fato de G não ser completo.

5.4 Grafos sem triângulos com número cromático alto

Seria natural esperar que χ alto exigisse cliques grandes. Isso é falso.

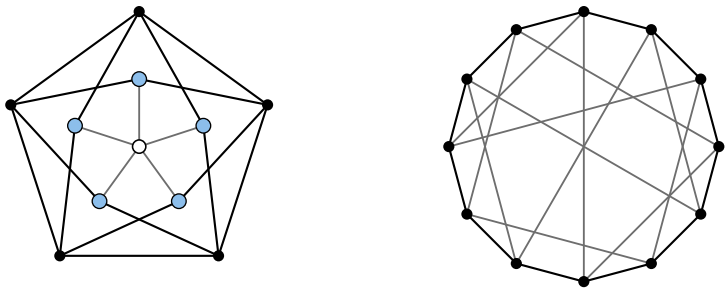
Teorema 5.9 (Mycielski, 1955)**.** *Para todo $k \geq 2$ existe um grafo sem triângulos com número cromático k.*

Demonstração. Dado G com vértices $v_1, \ldots, v_n$, o grafo de Mycielski $M(G)$ tem vértices $v_1, \ldots, v_n$, cópias $u_1, \ldots, u_n$ e um vértice w. Mantemos as arestas de G, ligamos u_i a cada vizinho de v_i em G e ligamos w a todos os u_i.

Sem triângulos. Os u_i formam um conjunto independente, e w só tem vizinhos entre eles; logo um triângulo não contém w e contém no máximo um u_i. Um triângulo $u_i v_j v_\ell$ exigiria v_j, v_ℓ vizinhos de v_i e adjacentes entre si, isto é, o triângulo $v_i v_j v_\ell$ em G.

Número cromático. Se $\chi(G) = k$, uma k-coloração de G copiada em u_i (mesma cor de v_i) e uma cor nova em w mostra $\chi(M(G)) \leq k + 1$. Suponha uma k-coloração c de $M(G)$, e digamos $c(w) = k$; então nenhum u_i tem a cor k. Recolora cada v_i com $c(v_i) = k$ usando a cor $c(u_i)$. A nova coloração dos v_i é própria em G: se $v_i v_j \in E$ e ambos tinham cor k, isso já era impossível; se só v_i tinha cor k, então u_i é vizinho de v_j e $c(u_i) \neq c(v_j)$. Obtemos uma $(k-1)$-coloração de G, contradição. Logo $\chi(M(G)) = k + 1$.

Começando com K_2 obtemos C_5 ($\chi = 3$), depois o grafo de Grötzsch com 11 vértices ($\chi = 4$), e assim por diante. ∎



Grötzsch (11 vértices) Chvátal (12 vértices)

Figura 5.2: O grafo de Grötzsch, obtido de C_5 pela construção de Mycielski (os vértices u_i em azul e w no centro), e o grafo de Chvátal, desenhado ao longo de um ciclo hamiltoniano com as demais arestas em cinza.

Exemplo 5.10 (Grötzsch e Chvátal)**.** O grafo de Grötzsch (Figura 5.2) tem 11 vértices e 20 arestas: 5 do pentágono, 10 dos vértices u_i ao pentágono e 5 do centro. Pela prova de Mycielski, não tem triângulos e $\chi = 4$; Chvátal (1974) mostrou que é o menor grafo com essas duas propriedades. O grafo de Chvátal tem 12 vértices, é 4-regular, não tem triângulos e também tem $\chi = 4$; é o menor grafo 4-regular com essas propriedades. Para ele, $\Delta = 4 = \chi$, ou seja, a cota de Brooks é atingida sem cliques grandes. A prova de que $\chi \neq 3$ é uma verificação de casos que não reproduziremos; repare que a cota n/α não basta, pois $\alpha = 4$ e $12/4 = 3$.

Erdős (1959) foi mais longe, por um argumento probabilístico: para quaisquer g e k existem grafos com cintura pelo menos g e número cromático pelo menos k. O número cromático é, portanto, uma propriedade global, que não se detecta olhando vizinhanças pequenas.

5.5 Grafos de intervalos e alocação de salas

Um centro de convenções recebe pedidos de reserva, cada um um intervalo de tempo $[a_i, b_i]$, e quer atendê-los com o menor número de salas. Dois pedidos conflitam quando seus intervalos se intersectam; o grafo de conflitos é um *grafo de intervalos*, e o número de salas necessárias é o seu número cromático.

Teorema 5.11. *Em todo grafo de intervalos,* $\chi(G) = \omega(G)$.

Demonstração. Ordene os intervalos pelo extremo esquerdo, $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, e aplique o guloso nessa ordem. Quando o intervalo I_j recebe a cor k, as cores $1, \dots, k-1$ estão em intervalos anteriores que intersectam I_j. Todos esses começam antes de a_j e terminam depois de a_j, logo contêm o ponto a_j; com I_j, formam k intervalos com um ponto comum, que são dois a dois adjacentes. Assim $k \le \omega$, e o guloso usa no máximo ω cores. ∎

Em termos práticos: o número mínimo de salas é o maior número de reservas que se sobrepõem num mesmo instante, e o guloso por horário de início o alcança. Grafos em que $\chi(H) = \omega(H)$ para todo subgrafo induzido H chamam-se *perfeitos*; o teorema forte dos grafos perfeitos (Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas, 2006) os caracteriza como os grafos sem ciclo ímpar induzido de comprimento pelo menos 5 e sem complemento de um tal ciclo.

5.6 Coloração por listas

Suponha que cada vértice v só possa receber cores de uma lista $L(v)$, por exemplo porque cada disciplina só pode ter prova em certos horários. G é *k-escolhível* se admite coloração própria a partir de quaisquer listas com $|L(v)| \ge k$, e o *número de escolha* $\mathrm{ch}(G)$ é o menor tal k. Tomando todas as listas iguais, $\chi(G) \le \mathrm{ch}(G)$, e o guloso mostra $\mathrm{ch}(G) \le \Delta + 1$.

A desigualdade pode ser estrita, mesmo em grafos bipartidos. Em $K_{2,4}$, com classes $\{x, y\}$ e $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, dê a x a lista $\{1, 2\}$, a y a lista $\{3, 4\}$ e aos z_i as quatro listas $\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$. Quaisquer que sejam as cores escolhidas para x e y, há um z_i cuja lista é exatamente $\{c(x), c(y)\}$, e ele fica sem cor. Logo $\mathrm{ch}(K_{2,4}) = 3 > 2 = \chi$.

Para grafos planares, o guloso dá $\mathrm{ch} \le 6$; Thomassen (1994) provou, com uma indução engenhosa de meia página, que todo grafo planar é 5-escolhível, e Voigt (1993) exibiu grafos planares que não são 4-escolhíveis. Assim, para listas, o análogo do teorema das quatro cores é falso.

5.7 Coloração de arestas

Uma *coloração de arestas* atribui cores às arestas de modo que arestas com extremidade comum tenham cores distintas; cada classe de cor é um emparelhamento. O *índice cromático* $\chi'(G)$ é o menor número de cores. Obviamente $\chi'(G) \ge \Delta(G)$.

Teorema 5.12 (König, 1916)**.** *Se G é bipartido, então* $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração. Por indução em m. Retire uma aresta uv e colora $G - uv$ com Δ cores. Em

$G - uv$, u e v têm grau menor que Δ, então há uma cor α ausente em u e uma cor β ausente em v. Se α também está ausente em v, use-a em uv. Senão, considere o caminho maximal P que começa em v e alterna as cores $\alpha, \beta, \alpha, \ldots$ Esse caminho não chega a u: os vértices de P a distância ímpar de v estão no lado de u (é bipartido) e são alcançados por arestas de cor α, mas α está ausente em u. Troque α e β ao longo de P; agora α está ausente em u e em v, e pintamos uv com α. ■

No exemplo das provas finais com turmas e professores, König garante que, se cada professor aplica no máximo Δ provas e cada turma faz no máximo Δ, bastam Δ horários para o grafo bipartido professores–turmas.

Exemplo 5.13 (Índices cromáticos de grafos clássicos)**.** $K_{3,3}$ e o grafo de Heawood são bipartidos e cúbicos, logo $\chi' = 3$. O dodecaedro é cúbico e hamiltoniano (Capítulo 3); pelo Exercício 5.5, $\chi' = 3$. O grafo de Petersen tem $\chi' = 4$: numa 3-coloração das arestas de um grafo cúbico, cada cor é um emparelhamento perfeito, e as duas primeiras cores juntas formam um 2-fator cujos ciclos alternam as duas cores e são, portanto, pares. Mas os 2-fatores do grafo de Petersen são dois pentágonos (Capítulo 4), que são ímpares.

Teorema 5.14 (Vizing, 1964)**.** *Para todo grafo simples,* $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.

Os grafos com $\chi' = \Delta$ são de *classe 1*, e os demais de *classe 2*. K_n é de classe 1 para n par e de classe 2 para n ímpar (Exercício 5.4); o grafo de Petersen é de classe 2. Decidir a classe é NP-completo (Holyer, 1981), mesmo para grafos cúbicos.

5.8 O polinômio cromático

Seja $P(G, k)$ o número de k-colorações de G (com as cores rotuladas). Por exemplo, $P(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$ e, para uma árvore T com n vértices, $P(T, k) = k(k-1)^{n-1}$ (escolha a cor de uma raiz e depois, descendo, cada vértice só evita a cor do pai).

Teorema 5.15 (Deleção–contração)**.** *Para toda aresta e de G, $P(G, k) = P(G - e, k) - P(G/e, k)$, em que G/e é obtido contraindo e (e apagando arestas múltiplas).*

Demonstração. As colorações próprias de $G - e$ dividem-se entre as que dão cores diferentes às extremidades de e, que são exatamente as colorações próprias de G, e as que dão a mesma cor, que correspondem às colorações próprias de G/e. ■

Por indução no número de arestas, $P(G, k)$ é um polinômio em k de grau n, mônico, com coeficientes de sinais alternados e com coeficiente de k^{n-1} igual a $-m$. Para o ciclo, a recorrência dá $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

Exemplo 5.16 (Polinômio cromático da roda)**.** Para colorir W_n, escolha a cor do centro (k modos); o aro C_{n-1} deve ser colorido com as $k-1$ cores restantes. Logo

$$P(W_n, k) = k\,P(C_{n-1}, k-1) = k\big[(k-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-2)\big].$$

Para W_6, $P(W_6, 4) = 4\,(2^5 - 2) = 120$ e $P(W_6, 3) = 3(1-1) = 0$, confirmando $\chi(W_6) = 4$; para W_5, $P(W_5, 3) = 3(1+1) = 6$.

As quatro cores e o polinômio

Birkhoff introduziu $P(G, k)$ em 1912 esperando provar, por métodos analíticos, que $P(G, 4) > 0$ para todo grafo planar. O caminho não funcionou, mas o polinômio tornou-se um objeto

central; a prova do teorema das quatro cores (Appel–Haken, 1976; Robertson, Sanders, Seymour e Thomas, 1997) é discutida no Capítulo 8.

Exercícios

Exercício 5.1. Prove que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

Exercício 5.2. Prove que $\chi(G) \leq 1 + \max_{H} \delta(H)$, o máximo tomado sobre os subgrafos H de G, e conclua que um grafo com m arestas tem $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Exercício 5.3. Mostre que, se G é k-crítico (isto é, $\chi(G) = k$ e $\chi(H) < k$ para todo subgrafo próprio H), então $\delta(G) \geq k - 1$.

Exercício 5.4. Mostre que $\chi'(K_n) = n - 1$ para n par e $\chi'(K_n) = n$ para n ímpar. Interprete o caso par como a tabela de um campeonato de pontos corridos com n times, uma rodada por cor.

Exercício 5.5. Mostre que todo grafo cúbico hamiltoniano é de classe 1, e deduza que o grafo de Petersen não é hamiltoniano a partir do fato de ser de classe 2.

Exercício 5.6. Seja G um grafo com n vértices e c componentes. Mostre que $(-1)^{n-c} P(G, k) > 0$ para todo $k \in (0, 1)$. Conclua que nenhum polinômio cromático tem raiz no intervalo $(0, 1)$.

Exercício 5.7. Um colégio tem 7 disciplinas e os conflitos (pares com aluno em comum) formam o ciclo C_7 mais uma aresta ligando dois vértices a distância 2 no ciclo. Quantas maneiras há de marcar as provas usando no máximo 3 horários rotulados?

Exercício 5.8. Mostre que, se G não contém caminho com $k+1$ vértices, então $\chi(G) \leq k$. (Use a árvore de uma busca em profundidade.)

Exercício 5.9. Calcule o polinômio cromático de $K_{2,3}$.

CAPÍTULO 6

Teoria extremal e números de Ramsey

A teoria extremal de grafos trata de perguntas do tipo: quantas arestas um grafo com n vértices pode ter sem conter uma certa configuração proibida? A pergunta parece modesta, mas as respostas atravessam toda a combinatória moderna e reaparecem, de forma decisiva, no estudo do número de cruzamentos. O Teorema de Kővári–Sós–Turán, por exemplo, é a peça que permite melhorar o Lema do Cruzamento para grafos sem quadriláteros (Capítulo 11).

Fixe um grafo H. O *número de Turán* (ou número extremal) de H é

$$\operatorname{ex}(n, H) = \max\{\, |E(G)| : |V(G)| = n \text{ e } G \text{ não contém } H \text{ como subgrafo} \,\}.$$

Um grafo que atinge o máximo é chamado *extremal* para H.

6.1 O Teorema de Mantel

O primeiro resultado da área é de 1907 e responde à pergunta para o triângulo.

Imagine uma escola com n alunos em que se deseja montar duplas de estudo de modo que nunca três alunos formem duplas dois a dois (para evitar panelinhas). Quantas duplas cabem? O Teorema de Mantel diz que a resposta é $\lfloor n^2/4 \rfloor$, e a configuração ótima é dividir a turma em duas metades e formar todas as duplas entre metades.

Teorema 6.1 (Mantel, 1907)**.** *Todo grafo com n vértices sem triângulos tem no máximo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas. O valor é atingido por $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.*

Demonstração. Seja G sem triângulos, com m arestas. Se uv é aresta, os conjuntos $N(u)$ e $N(v)$ são disjuntos, pois um vizinho comum fecharia um triângulo. Logo $d(u) + d(v) \le n$ para toda aresta uv. Somando sobre as arestas, cada vértice w aparece $d(w)$ vezes, e portanto

$$\sum_{w \in V} d(w)^2 = \sum_{uv \in E} \big(d(u) + d(v)\big) \le mn.$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz, $\sum_w d(w)^2 \ge \frac{1}{n}\big(\sum_w d(w)\big)^2 = \frac{4m^2}{n}$. Assim $4m^2/n \le mn$, isto é, $m \le n^2/4$. Como m é inteiro, $m \le \lfloor n^2/4 \rfloor$. O grafo bipartido completo balanceado não tem ciclos ímpares, logo não tem triângulos, e possui $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas. ∎

Exemplo 6.2. Para $n = 7$, o Teorema de Mantel permite no máximo $\lfloor 49/4 \rfloor = 12$ arestas sem triângulos, e $K_{3,4}$ realiza esse número. O ciclo C_7, que também não tem triângulos, tem só 7 arestas: ser "sem triângulos" por ter ciclos longos é muito mais restritivo do que ser bipartido. Já o grafo de Petersen (Figura 7.3), com 10 vértices e 15 arestas, está bem abaixo da cota 25.

6.2 O Teorema de Turán

Turán (1941) generalizou Mantel para cliques de qualquer tamanho. Para $r \ge 1$, o *grafo de Turán* $T(n, r)$ é o grafo r-partido completo com n vértices em que as partes têm tamanhos tão

iguais quanto possível (cada parte tem $\lfloor n/r \rfloor$ ou $\lceil n/r \rceil$ vértices). Denotamos por $t(n,r)$ o seu número de arestas. Como dois vértices de uma mesma parte não são adjacentes, qualquer clique usa no máximo um vértice por parte; logo $T(n,r)$ não contém K_{r+1}.

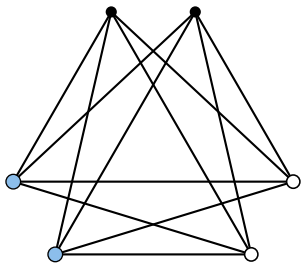


Figura 6.1: O grafo de Turán $T(6,3) = K_{2,2,2}$, com $t(6,3) = 12$ arestas. Cada parte tem uma cor de vértice (preto, azul claro, branco).

Teorema 6.3 (Turán, 1941)**.** *Para $n \geq 1$ e $r \geq 1$, todo grafo com n vértices sem K_{r+1} tem no máximo $t(n,r)$ arestas. Em particular,*

$$\operatorname{ex}(n, K_{r+1}) = t(n,r) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Demonstração. A identidade-chave. Se $n > r$, retirar um vértice de cada parte de $T(n,r)$ produz $T(n-r,r)$. As arestas retiradas são as $\binom{r}{2}$ entre os vértices retirados, mais as que ligam cada um dos $n-r$ vértices restantes aos $r-1$ vértices retirados fora da sua parte. Assim

$$t(n,r) = t(n-r,r) + \binom{r}{2} + (n-r)(r-1). \tag{$*$}$$

A indução. Provamos a afirmação por indução em r e, para r fixo, em n. Para $r = 1$, um grafo sem K_2 não tem arestas e $t(n,1) = 0$. Para $n \leq r$ o grafo completo K_n não contém K_{r+1} e $T(n,r) = K_n$, de modo que não há o que provar. Seja agora $n > r \geq 2$ e G sem K_{r+1}.

Se G não contém K_r, pela hipótese de indução em r temos $|E(G)| \leq t(n,r-1) \leq t(n,r)$ (a última desigualdade vale porque $T(n,r-1)$ é subgrafo de um grafo r-partido completo com n vértices, e o r-partido balanceado é o que tem mais arestas; veja o Exercício 6.6). Suponha então que G contém um K_r com conjunto de vértices A. O grafo $G - A$ tem $n-r$ vértices e não contém K_{r+1}, logo tem no máximo $t(n-r,r)$ arestas. Dentro de A há $\binom{r}{2}$ arestas. Um vértice fora de A é adjacente a no máximo $r-1$ vértices de A, senão formaria K_{r+1} com A. Somando e usando $(*)$,

$$|E(G)| \leq t(n-r,r) + \binom{r}{2} + (n-r)(r-1) = t(n,r).$$

Por fim, cada parte de $T(n,r)$ com n_i vértices perde $\binom{n_i}{2}$ pares, e pela convexidade $\sum \binom{n_i}{2} \geq r\binom{n/r}{2}$, o que dá $t(n,r) \leq \binom{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{r} - 1\right) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$. ∎

Exemplo 6.4. Vamos calcular $\operatorname{ex}(10, K_4)$. O grafo $T(10,3)$ tem partes de tamanhos $4,3,3$, e suas arestas são as que ligam partes diferentes: $4\cdot 3 + 4\cdot 3 + 3\cdot 3 = 33$. Pelo Teorema de Turán, $\operatorname{ex}(10,K_4) = 33$; um grafo com 10 vértices e 34 arestas contém obrigatoriamente quatro vértices dois a dois adjacentes. A cota $\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{10^2}{2} = \frac{100}{3}$ confirma o valor, pois $33 \leq \frac{100}{3} < 34$.

Exemplo 6.5. Uma comissão organiza um torneio de xadrez com 12 jogadores e quer o maior número possível de partidas sem que haja cinco jogadores que se enfrentaram todos entre si. Com $r = 4$, o grafo $T(12,4)$ tem quatro partes de 3 jogadores e $\binom{12}{2} - 4\binom{3}{2} = 66 - 12 = 54$ arestas. São possíveis 54 partidas, e não mais que isso.

Com um pouco mais de cuidado prova-se também a unicidade: $T(n,r)$ é o único grafo extremal. Observe que a fração $1-\frac{1}{r}$ das arestas possíveis é o que um grafo pode ter, assintoticamente, antes de ser obrigado a conter K_{r+1}.

6.3 O Teorema de Erdős–Stone

Para um grafo H arbitrário, a resposta assintótica depende apenas do número cromático de H.

Teorema 6.6 (Erdős–Stone, 1946; Erdős–Simonovits, 1966)**.** *Para todo grafo H com $\chi(H) = r+1 \geq 2$,*

$$\operatorname{ex}(n,H) = \Big(1-\frac{1}{r}\Big)\frac{n^2}{2} + o(n^2).$$

A ideia é que um grafo com $\big(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\big)\frac{n^2}{2}$ arestas contém não apenas K_{r+1}, mas um grafo $(r+1)$-partido completo com partes de tamanho t arbitrariamente grande, e todo H com $\chi(H)=r+1$ cabe dentro de um desses. A prova completa usa o Lema da Regularidade ou uma contagem iterada e está fora do nosso escopo.

Exemplo 6.7. O grafo de Petersen e o octaedro $K_{2,2,2}$ têm número cromático 3, logo $\operatorname{ex}(n,H) = \frac{n^2}{4}+o(n^2)$ para ambos: assintoticamente, proibi-los custa o mesmo que proibir o triângulo. Para $H=K_6$ ou para o icosaedro (número cromático 4), $\operatorname{ex}(n,H)=\frac{n^2}{3}+o(n^2)$ no caso do icosaedro e $\frac{2n^2}{5}+o(n^2)$ no de K_6. Já para o cubo Q_3, que é bipartido, o teorema só diz $o(n^2)$; Erdős e Simonovits provaram $\operatorname{ex}(n,Q_3)=O(n^{8/5})$, e a ordem de grandeza exata continua em aberto.

O teorema é preciso quando $\chi(H)\geq 3$. Quando H é *bipartido* ($r=1$), ele só diz que $\operatorname{ex}(n,H)=o(n^2)$, e a ordem de grandeza correta passa a ser um problema difícil. É exatamente o caso que interessa aos cruzamentos.

6.4 Grafos sem quadriláteros: o Teorema de Kővári–Sós–Turán

Teorema 6.8 (Kővári–Sós–Turán, 1954)**.** *Sejam $2\leq s\leq t$. Todo grafo com n vértices sem $K_{s,t}$ tem no máximo*

$$\frac{1}{2}(t-1)^{1/s}\,n^{2-1/s} + \frac{(s-1)n}{2}$$

arestas. Em particular, para o ciclo $C_4=K_{2,2}$,

$$\operatorname{ex}(n,C_4) \leq \frac{n}{4}\Big(1+\sqrt{4n-3}\Big).$$

Demonstração. Faremos com detalhe o caso C_4, que contém a ideia toda. Seja G sem C_4, com m arestas, e conte as *cerejas*: caminhos $u\,w\,v$ de comprimento 2, identificados pelo vértice central w e pelo par não ordenado $\{u,v\}$ de vizinhos.

A contagem dupla. Pelo centro, há $\sum_w \binom{d(w)}{2}$ cerejas. Pelas pontas, cada par $\{u,v\}$ é ponta de no máximo uma cereja, pois dois centros distintos w,w' formariam o quadrilátero $u\,w\,v\,w'$. Logo

$$\sum_{w\in V}\binom{d(w)}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

A função $x\mapsto\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$ é convexa; pela desigualdade de Jensen, com o grau médio $\bar d = 2m/n$, obtemos $n\binom{\bar d}{2}\leq\binom{n}{2}$, isto é, $\bar d(\bar d-1)\leq n-1$. Resolvendo a desigualdade do segundo grau, $\bar d \leq \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$, e daí $m=\frac{n\bar d}{2}\leq\frac{n}{4}\big(1+\sqrt{4n-3}\big)$.

O caso geral é idêntico: conta-se pares (w, S) com $S \subseteq N(w)$, $|S| = s$. Cada s-conjunto S tem no máximo $t-1$ vizinhos comuns (senão surge $K_{s,t}$), logo $\sum_w \binom{d(w)}{s} \le (t-1)\binom{n}{s}$, e a convexidade de $\binom{x}{s}$ conclui. ∎

6.4.1 A cota é justa para C_4

Para ver que $n^{3/2}$ é a ordem de grandeza correta, usamos geometria finita. Seja q uma potência de primo e $\mathbb{F}_q$ o corpo com q elementos. O plano projetivo $PG(2,q)$ tem como pontos as retas de $\mathbb{F}_q^3$ pela origem, isto é, os vetores não nulos x módulo múltiplos escalares; há q^2+q+1 pontos.

Definição 6.9. O *grafo de polaridade de Erdős–Rényi* ER_q tem como vértices os q^2+q+1 pontos de $PG(2,q)$, e dois pontos distintos x, y são adjacentes quando $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

Dois pontos distintos y, z têm no máximo um vizinho comum: os vizinhos comuns x satisfazem $x \cdot y = x \cdot z = 0$, um sistema linear de posto 2 cuja solução é uma única reta pela origem, isto é, um único ponto. Portanto ER_q não contém C_4. Cada ponto y tem $q+1$ soluções de $x \cdot y = 0$ (os pontos de uma reta projetiva); se $y \cdot y = 0$ o próprio y está entre elas e não conta. Há exatamente $q+1$ desses pontos *absolutos*, e o número de arestas é

$$\frac{(q^2+q+1)(q+1) - (q+1)}{2} = \frac{q(q+1)^2}{2}.$$

Com $n = q^2+q+1$, isso é $\bigl(\tfrac{1}{2} + o(1)\bigr)n^{3/2}$. Combinando com o Teorema 6.8 e com a densidade dos primos (para n geral escolhe-se o maior primo q com $q^2+q+1 \le n$),

$$\operatorname{ex}(n, C_4) = \Bigl(\frac{1}{2} + o(1)\Bigr) n^{3/2}.$$

Exemplo 6.10. Para $q = 2$, os sete pontos de $PG(2,2)$ são os vetores não nulos de $\mathbb{F}_2^3$. Os pontos absolutos ($x \cdot x = 0$, isto é, peso par) são 011, 101 e 110. Calculando os produtos escalares módulo 2, as arestas de ER_2 são

$$001\text{–}010,\ 001\text{–}100,\ 010\text{–}100,\ 001\text{–}110,\ 010\text{–}101,\ 100\text{–}011,\ 011\text{–}111,\ 101\text{–}111,\ 110\text{–}111,$$

nove ao todo, de acordo com $\frac{q(q+1)^2}{2} = 9$ (Figura 6.2). Os três pontos absolutos têm grau $q = 2$ e os demais grau $q+1 = 3$. O grafo tem um triângulo, mas nenhum C_4, e de fato $\operatorname{ex}(7, C_4) = 9$.

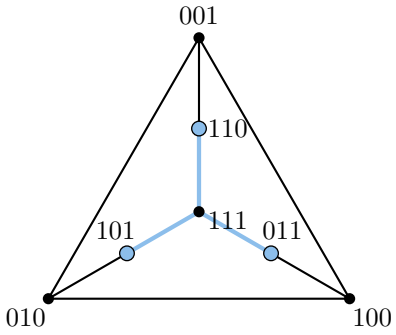
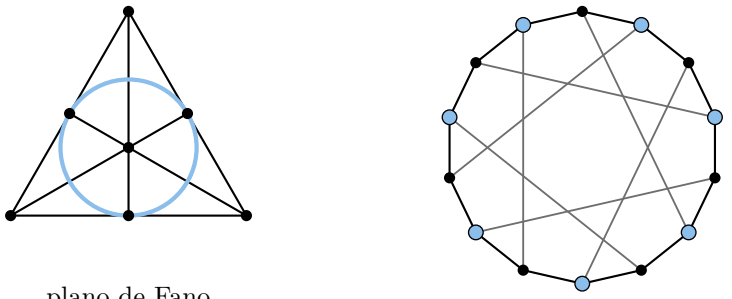


Figura 6.2: O grafo de polaridade ER_2: 7 vértices, 9 arestas e nenhum C_4. Os pontos absolutos estão em azul claro.

Exemplo 6.11. Para $q = 4$, o grafo ER_4 tem $n = 21$ vértices e $\frac{4 \cdot 25}{2} = 50$ arestas. A cota do Teorema 6.8 dá $\frac{21}{4}\bigl(1 + \sqrt{81}\bigr) = \frac{105}{2}$, ou seja, no máximo 52 arestas. A construção algébrica fica a apenas duas arestas da cota de contagem.

6.4.2 O plano de Fano e o grafo de Heawood

A versão bipartida do problema é igualmente bonita. O *plano de Fano* é o plano projetivo $PG(2,2)$: sete pontos e sete retas, cada reta com três pontos, cada ponto em três retas, e duas retas quaisquer se encontram em exatamente um ponto. O seu *grafo de incidência* tem um vértice para cada ponto, um para cada reta, e liga um ponto às retas que o contêm. Esse é o *grafo de Heawood*: bipartido, 3-regular, com 14 vértices e 21 arestas.



plano de Fano

grafo de Heawood

Figura 6.3: O plano de Fano (a "reta" circular está em azul claro) e o seu grafo de incidência, o grafo de Heawood: um 14-ciclo com as cordas $i \sim i+5$ para i par. Pontos em preto, retas em azul claro.

Exemplo 6.12. O grafo de Heawood não tem C_4: um C_4 seria formado por dois pontos e duas retas, ambas contendo os dois pontos, e duas retas distintas têm só um ponto comum. Sua cintura é 6. Compare com o Exercício 6.3: um grafo bipartido sem C_4 com partes de tamanho $n = 7$ tem no máximo $\frac{7}{2}\big(1+\sqrt{25}\big) = 21$ arestas. O grafo de Heawood atinge exatamente essa cota; todas as desigualdades da contagem dupla viram igualdades, porque todo par de pontos tem exatamente uma reta comum e todos os graus são iguais. O mesmo vale para o grafo de incidência de qualquer $PG(2,q)$, com partes de q^2+q+1 vértices e $(q+1)(q^2+q+1)$ arestas.

Ponte com o número de cruzamentos

No Capítulo 11 veremos que todo grafo com n vértices e $m \geq 4n$ arestas tem pelo menos $c\,m^3/n^2$ cruzamentos em qualquer desenho. A prova sorteia um subgrafo aleatório e usa apenas que grafos planares têm no máximo $3n-6$ arestas. Se o grafo não tem C_4, Pach, Spencer e Tóth (2000) trocaram a cota planar por uma combinação dela com o Teorema 6.8 e obtiveram a cota mais forte $\mathrm{cr}(G) \geq c'\,m^4/n^3$. A teoria extremal fornece, assim, a "cota de densidade" que alimenta o argumento probabilístico.

6.5 Números de Ramsey

A teoria de Ramsey é o lado "inevitável" da teoria extremal: em vez de proibir uma configuração e perguntar quantas arestas cabem, colorimos todas as arestas e perguntamos que configuração monocromática é forçada.

Definição 6.13. Para inteiros $s, t \geq 2$, o *número de Ramsey* $R(s,t)$ é o menor N tal que, em toda coloração das arestas de K_N com vermelho e azul, há um K_s vermelho ou um K_t azul.

Equivalentemente, $R(s,t)$ é o menor N tal que todo grafo com N vértices contém um K_s ou um conjunto independente de tamanho t (as arestas vermelhas formam o grafo; as azuis, o complemento). Claramente $R(2,t) = t$.

Teorema 6.14. $R(3,3) = 6$.

Demonstração. Em uma coloração de K_6, fixe um vértice v. Das cinco arestas em v, pelo menos três têm a mesma cor, digamos vermelho, ligando v a a, b, c. Se alguma das arestas ab, bc, ca for vermelha, ela fecha um triângulo vermelho com v. Caso contrário, abc é um triângulo azul. Logo $R(3,3) \leq 6$. Para a cota inferior, pinte de vermelho as arestas de um pentágono C_5 e de azul as cinco diagonais, que formam outro pentágono (Figura 6.4). Não há triângulo de nenhuma cor, pois C_5 não tem triângulos. ∎

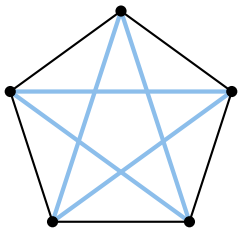


Figura 6.4: Coloração de K_5 sem triângulo monocromático: pentágono em preto e pentagrama em azul claro. Ela mostra que $R(3,3) > 5$.

Exemplo 6.15. O Exercício 6.4 mostra que K_6 tem sempre pelo menos dois triângulos monocromáticos, e o número dois não pode ser melhorado. Pinte de vermelho as 9 arestas de um $K_{3,3}$ e de azul as 6 restantes, que formam dois triângulos disjuntos (um em cada parte). O vermelho é bipartido e não tem triângulos; o azul tem exatamente dois. Confira com a contagem de ângulos bicolores: cada vértice tem 3 arestas vermelhas e 2 azuis, logo $3 \cdot 2 = 6$ ângulos bicolores, 36 no total, e 18 triângulos não monocromáticos, sobrando $20 - 18 = 2$.

Na linguagem popular: em qualquer festa com seis pessoas, existem três que se conhecem mutuamente ou três que são mutuamente desconhecidas; com cinco pessoas isso pode falhar.

Teorema 6.16 (Erdős–Szekeres, 1935). *Para $s, t \geq 3$, $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Consequentemente,*

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}, \qquad \textit{e em particular} \qquad R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 4^k.$$

Demonstração. Seja $N = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e considere uma coloração de K_N. Um vértice v tem $N-1$ arestas, e então tem pelo menos $R(s-1,t)$ vizinhos vermelhos ou pelo menos $R(s,t-1)$ vizinhos azuis (se ambos falhassem, v teria no máximo $N-2$ arestas). No primeiro caso, entre os vizinhos vermelhos há um K_{s-1} vermelho, que com v forma K_s, ou um K_t azul. O segundo caso é simétrico. A cota binomial segue por indução em $s+t$, usando a relação de Pascal $\binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$ e os casos iniciais $R(2,t) = t = \binom{t}{1}$. ∎

A cota inferior exponencial foi o marco de nascimento do método probabilístico.

Teorema 6.17 (Erdős, 1947). *Para $k \geq 3$, $R(k,k) > 2^{k/2}$.*

Demonstração. Seja $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ e pinte cada aresta de K_n de vermelho ou azul, independentemente, com probabilidade $\frac{1}{2}$. Para um conjunto fixo S de k vértices, a probabilidade de S ser monocromático é $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$. Pela cota da união, a probabilidade de existir algum K_k monocromático é no máximo

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!}\, 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \frac{2^{k^2/2}}{k!}\, 2^{1-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1$$

para $k \geq 3$. Logo existe uma coloração sem K_k monocromático, e $R(k,k) > n$; como $R(k,k)$ é inteiro e $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, segue $R(k,k) > 2^{k/2}$. ∎

Exemplo 6.18. Para $k = 10$, a cota de Erdős dá $R(10,10) > 2^5 = 32$, e a de Erdős–Szekeres dá $R(10,10) \leq \binom{18}{9} = 48\,620$. Mesmo para um valor modesto como $k = 10$, a distância entre as duas cotas é enorme, e o valor exato está muito longe do alcance atual.

Exemplo 6.19. O Exercício 6.5 mostra que três cores em K_{17} forçam um triângulo monocromático. Greenwood e Gleason (1955) mostraram que 16 vértices não bastam, e portanto $R(3,3,3) = 17$. A construção usa o corpo $\mathbb{F}_{16}$: o grupo multiplicativo $\mathbb{F}_{16}^{*}$ é cíclico de ordem 15, e os cubos formam um subgrupo Q de índice 3, com classes laterais Q, αQ, $\alpha^2 Q$. Pinte a aresta xy de K_{16} com a cor i quando $x + y \in \alpha^i Q$. Cada classe de cor é um grafo 5-regular sem triângulos com 16 vértices, o *grafo de Clebsch*.

Note o tipo de argumento: provamos que um objeto existe sem exibi-lo, mostrando que um objeto sorteado tem a propriedade com probabilidade positiva. O mesmo espírito aparece na prova do Lema do Cruzamento, em que se sorteia um subgrafo induzido. Os valores exatos conhecidos são poucos: $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(4,4) = 18$ e $R(4,5) = 25$; o valor de $R(5,5)$ é desconhecido (sabe-se que está entre 43 e 46, esta última cota obtida por Angeltveit e McKay em 2024). Em 2023, Campos, Griffiths, Morris e Sahasrabudhe provaram $R(k,k) \leq (4-\varepsilon)^k$ para algum $\varepsilon > 0$, a primeira melhora exponencial da cota de Erdős–Szekeres em quase noventa anos.

Exercícios

Exercício 6.1. Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Mostre que G tem pelo menos $\dfrac{m(4m - n^2)}{3n}$ triângulos. Conclua o Teorema de Mantel como caso particular.

Exercício 6.2. Prove que $R(3,4) = 9$. Para a cota inferior, considere o grafo com vértices $\mathbb{Z}_8$ em que i e j são adjacentes quando $i - j \in \{\pm 1, 4\}$.

Exercício 6.3. Seja G bipartido com partes A e B, $|A| = |B| = n$, sem C_4. Prove que G tem no máximo $\dfrac{n}{2}\bigl(1 + \sqrt{4n - 3}\bigr)$ arestas.

Exercício 6.4. Prove que toda coloração das arestas de K_6 com duas cores tem pelo menos *dois* triângulos monocromáticos.

Exercício 6.5. Prove que, em toda coloração das arestas de K_{17} com três cores, há um triângulo monocromático.

Exercício 6.6. Prove que, entre todos os grafos r-partidos completos com n vértices, o que tem mais arestas é aquele com as partes mais equilibradas possível, $T(n,r)$.

Exercício 6.7. Uma operadora instala n antenas em uma região plana, de modo que a distância entre quaisquer duas é no máximo 1 km. Duas antenas interferem quando estão a mais de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ km uma da outra. Prove que há no máximo $\lfloor n^2/3 \rfloor$ pares que interferem.

Parte II

Planaridade

CAPÍTULO 7

Grafos planares e a fórmula de Euler

Quem projeta uma placa de circuito impresso de uma única camada precisa ligar componentes por trilhas de cobre que não podem se cruzar, pois um cruzamento é um curto-circuito. Quem desenha o mapa esquemático de uma rede de metrô quer que as linhas se cruzem o mínimo possível, para que o passageiro leia o mapa sem esforço. As duas situações levam à mesma pergunta matemática: quando um grafo pode ser desenhado no plano sem cruzamentos? Este capítulo responde à parte quantitativa da pergunta; o Capítulo 8 dará a caracterização completa. E todo o resto desta apostila, a partir do Capítulo 10, mede o quanto um grafo *deixa* de ser planar.

7.1 Desenhos e imersões

Definição 7.1. Um *desenho* de um grafo G no plano associa a cada vértice um ponto distinto e a cada aresta uv um arco simples (imagem de uma curva contínua injetiva) ligando os pontos de u e v, sem passar por outros vértices. Um *cruzamento* é um ponto comum ao interior de dois arcos. Um desenho sem cruzamentos é uma *imersão* (ou desenho plano) de G; um grafo que admite imersão é *planar*, e um grafo junto com uma imersão fixada é um *grafo plano*.

Desenhar na esfera ou no plano dá no mesmo: a projeção estereográfica, a partir de um ponto da esfera fora do desenho, leva desenhos esféricos em desenhos planos preservando cruzamentos, e vice-versa. Usaremos a esfera sempre que for conveniente tratar todas as faces de forma simétrica.



um desenho de K_4 uma imersão de K_4

Figura 7.1: O mesmo grafo K_4 desenhado com um cruzamento (marcado em azul claro) e sem cruzamentos. Ser planar é propriedade do grafo, não do desenho.

A ferramenta topológica básica é um resultado de enunciado evidente e prova delicada.

Teorema 7.2 (Curva de Jordan)**.** *Toda curva fechada simples C no plano separa o plano em exatamente duas regiões conexas, uma limitada (o interior) e outra ilimitada (o exterior), e C é a fronteira comum das duas. Qualquer arco que ligue um ponto do interior a um ponto do exterior intersecta C.*

Para curvas poligonais, que bastam para quase tudo o que faremos, a prova é elementar: classifica-se um ponto como interior ou exterior pela paridade do número de vezes que uma semirreta genérica a partir dele cruza C.

7.2 Faces e a fórmula de Euler

Removendo de um plano um grafo plano, o que sobra se decompõe em regiões conexas chamadas *faces*. Exatamente uma delas é ilimitada, a *face externa*. A fronteira de uma face é percorrida por um passeio fechado; o *grau* (ou comprimento) $\ell(F)$ de uma face F é o comprimento desse passeio, contando duas vezes uma aresta que tem a mesma face dos dois lados (como uma aresta de corte). Como cada aresta é contada exatamente duas vezes no total,

$$\sum_{F} \ell(F) = 2m. \tag{7.1}$$

É o análogo, para faces, do Lema do aperto de mãos (Teorema 1.3).

Teorema 7.3 (Fórmula de Euler)**.** *Se G é um grafo plano conexo com n vértices, m arestas e f faces, então*

$$n - m + f = 2.$$

Demonstração. Indução no número de arestas, para n fixo. Como G é conexo, $m \geq n - 1$. Se $m = n - 1$, G é uma árvore; uma árvore não contém ciclos, logo pela curva de Jordan nada se separa e há uma única face. Assim $n - (n-1) + 1 = 2$.

Se $m \geq n$, G contém um ciclo C; seja e uma aresta de C. A curva fechada C separa o plano em interior e exterior, e os dois lados de e estão em faces distintas: uma contida no interior de C e outra no exterior. Removendo e, essas duas faces se fundem numa só, e as demais permanecem. O grafo $G - e$ continua conexo (pois e está em um ciclo), tem $m - 1$ arestas e $f - 1$ faces; pela hipótese de indução $n - (m-1) + (f-1) = 2$, que é a fórmula para G. ∎

Uma consequência imediata: o número de faces não depende da imersão escolhida, apenas de n e m. Se G tem c componentes conexas, aplicar a fórmula a cada uma e lembrar que a face externa é comum a todas dá $n - m + f = 1 + c$.

Euler e os poliedros

Para um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale $V - A + F = 2$. Basta olhar o poliedro de perto através de uma das faces: a projeção a partir de um ponto logo acima dessa face produz um grafo plano em que a face escolhida vira a face externa. Euler enunciou a relação em 1752; a primeira prova satisfatória costuma ser atribuída a Legendre (1794).

7.3 Grafos planares são esparsos

A fórmula de Euler vira uma cota para o número de arestas quando combinada com (7.1).

Definição 7.4. A *cintura* de um grafo é o comprimento do seu menor ciclo (infinita se o grafo for acíclico).

Teorema 7.5. *Seja G um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas.*

(a) $m \leq 3n - 6$.

(b) Se G não tem triângulos, $m \leq 2n - 4$.

(c) Mais geralmente, se G tem cintura $g \geq 3$ finita, $m \leq \dfrac{g}{g-2}(n-2)$.

Demonstração. Basta provar (c), já que (a) e (b) são os casos $g = 3$ e $g = 4$ (um grafo sem triângulos com algum ciclo tem cintura pelo menos 4, e a função $g \mapsto \frac{g}{g-2}$ é decrescente; se não houver ciclos, $m \leq n - 1$, que é menor que as duas cotas). Podemos supor G conexo, pois acrescentar arestas entre componentes não cria ciclos novos curtos nem destrói a planaridade e só aumenta m.

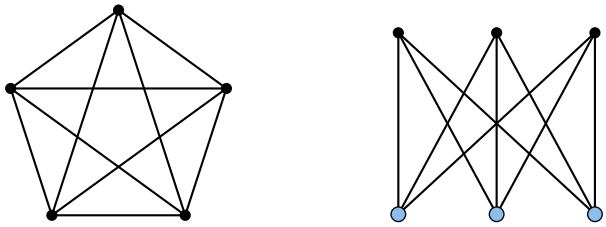
Fixe uma imersão. Como G contém um ciclo e tem cintura g, a fronteira de cada face contém um ciclo, e por isso $\ell(F) \geq g$ para toda face (uma face cuja fronteira não contivesse ciclo seria a única face de uma árvore). Por (7.1), $2m = \sum \ell(F) \geq gf$, ou seja, $f \leq 2m/g$. Pela fórmula de Euler,

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{g} = n - m\,\frac{g-2}{g},$$

de onde $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$. ∎

Corolário 7.6. *Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.*

Demonstração. K_5 tem $n = 5$ e $m = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6$. O grafo $K_{3,3}$ é bipartido, logo não tem triângulos, e tem $m = 9 > 8 = 2 \cdot 6 - 4$. ∎



K_5 $\qquad$ $K_{3,3}$

Figura 7.2: Os dois grafos de Kuratowski. No Capítulo 8 veremos que eles são, em sentido preciso, os únicos obstáculos à planaridade.

O grafo $K_{3,3}$ é o célebre *problema das três casas e três serviços*: três casas devem ser ligadas cada uma à água, ao gás e à luz por canos que não se cruzam (e todos no mesmo plano). O corolário diz que é impossível, e o argumento é o mais curto que se conhece. O mesmo raciocínio, com a cintura, resolve o grafo de Petersen.

Exemplo 7.7. O grafo de Petersen P tem $n = 10$, $m = 15$ e cintura 5. Se fosse planar, teríamos $15 \leq \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$, o que é falso. Logo P não é planar.

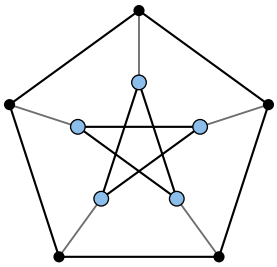


Figura 7.3: O grafo de Petersen: ciclo externo, pentagrama interno e cinco raios (em cinza). Ele não tem ciclos de comprimento menor que 5.

Exemplo 7.8. O grafo de Heawood (Figura 6.3) tem $n = 14$, $m = 21$ e cintura 6. Se fosse planar, teríamos $21 \leq \frac{6}{4} \cdot 12 = 18$. Logo não é planar. Note como a cintura faz o trabalho: sem ela, a cota $3n - 6 = 36$ não diria nada.

Exemplo 7.9. Retirando um vértice v do grafo de Petersen sobram 9 vértices e $15-3=12$ arestas, e a cintura continua pelo menos 5. Se $P-v$ fosse planar, teríamos $12 \le \frac{5}{3}\cdot 7 = \frac{35}{3}$, o que é falso. Logo nem $P-v$ é planar. Retirando dois vértices adjacentes, sobram 8 vértices e $15-5=10$ arestas, e a cota $\frac{5}{3}\cdot 6 = 10$ já não decide nada; de fato, P menos dois vértices adjacentes é planar.

Exemplo 7.10. A cota pode falhar em detectar a não planaridade. O *grafo de Wagner* V_8 tem vértices $\mathbb{Z}_8$, com i adjacente a $i\pm 1$ e a $i+4$ (um octógono com as quatro diagonais longas). Ele tem 8 vértices, 12 arestas, nenhum triângulo, e $12 \le 2\cdot 8 - 4$. A fórmula de Euler não impede a planaridade, mas V_8 não é planar: no próximo capítulo exibiremos uma subdivisão de $K_{3,3}$ dentro dele (Figura 8.4).

Outra consequência é a existência de vértices de grau pequeno, que usaremos em várias induções.

Corolário 7.11. *Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo* 5. *Mais precisamente, se $n \ge 3$, então*

$$\sum_{v\in V} \big(6 - d(v)\big) = 6n - 2m \ge 12.$$

Demonstração. A identidade vem do aperto de mãos, e a desigualdade de $m \le 3n-6$. Se todos os graus fossem pelo menos 6, a soma seria não positiva. Para $n \le 2$ a afirmação é trivial. ∎

Exemplo 7.12. No icosaedro todos os 12 vértices têm grau 5, e $\sum(6-d(v)) = 12\cdot 1 = 12$: a igualdade do Corolário 7.11 vale. Em qualquer triangulação da esfera com graus 5 e 6 apenas, como as estruturas geodésicas de cúpulas e os capsídeos de vírus, os vértices de grau 6 contribuem com zero, e há exatamente 12 vértices de grau 5. É a versão dual do Exercício 7.4.

7.4 Triangulações maximais

Um grafo planar simples é *maximal planar* se a adição de qualquer aresta nova o torna não planar.

Proposição 7.13. *Seja G planar simples com $n \ge 3$ vértices. As afirmações são equivalentes: (i) G é maximal planar; (ii) em qualquer imersão de G todas as faces são triângulos; (iii) $m = 3n-6$.*

Demonstração. (ii)⇒(iii): se todas as faces têm grau 3, $2m = 3f$ e a fórmula de Euler dá $n - m + \frac{2m}{3} = 2$, isto é, $m = 3n-6$. (iii)⇒(i): uma aresta a mais violaria $m \le 3n-6$. (i)⇒(ii): um grafo maximal planar com $n \ge 3$ vértices é 2-conexo (se houvesse um vértice de corte v, dois vizinhos de v em blocos diferentes, consecutivos ao redor de v, estariam na fronteira de uma mesma face e poderiam ser ligados), e num grafo plano 2-conexo a fronteira de cada face é um ciclo. Suponha que uma face F tenha fronteira $x_1x_2\cdots x_k$ com $k \ge 4$. Se x_1x_3 não é aresta, ela pode ser traçada dentro de F, contradizendo a maximalidade. Se x_1x_3 é aresta, ela está desenhada fora de F. Ligue x_3 a x_1 por um arco α pelo interior de F; a aresta x_1x_3 e α formam uma curva fechada D, e α divide F em duas partes, uma tocando x_2 e a outra tocando x_4, de modo que x_2 e x_4 ficam em lados opostos de D. Uma aresta x_2x_4 teria de cruzar D, o que é impossível: ela não cruza a aresta x_1x_3 e, por estar fora de F, não cruza α. Logo x_2x_4 não é aresta e pode ser traçada dentro de F, de novo uma contradição. ∎

Toda imersão de um grafo planar pode ser completada a uma triangulação acrescentando arestas, e essa observação permite, em muitas demonstrações, supor sem perda de generalidade que o grafo é uma triangulação.

7.5 Os sólidos platônicos

Um poliedro convexo é *regular* se todas as faces são polígonos regulares congruentes com p lados e todo vértice está em exatamente q faces, com $p, q \geq 3$. O grafo do poliedro é plano, com $2m = pf$ e $2m = qn$. Substituindo na fórmula de Euler,

$$\frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Como o lado direito é maior que $\frac{1}{2}$, precisamos de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, isto é, $(p-2)(q-2) < 4$. As únicas soluções com $p, q \geq 3$ são

$$(p, q) \in \{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\},$$

que correspondem ao tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro, com $m = 6, 12, 12, 30, 30$, respectivamente. A geometria foi totalmente descartada: o argumento mostra que nem mesmo combinatoriamente há outros poliedros regulares.

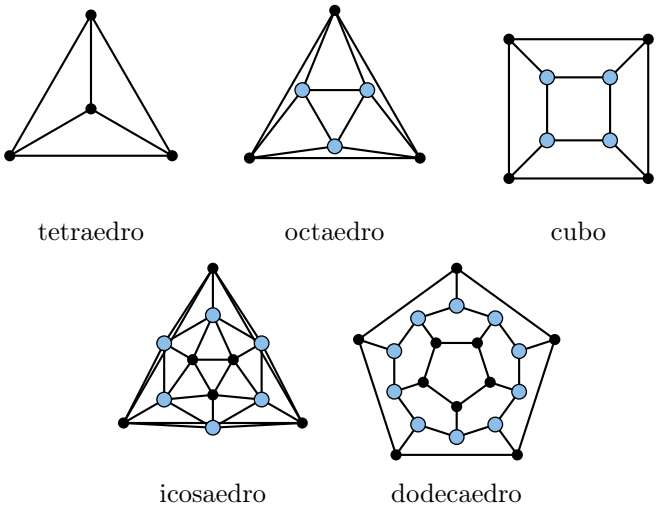
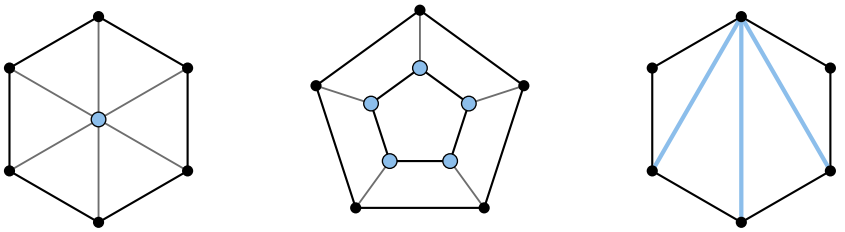


Figura 7.4: Os grafos dos cinco sólidos platônicos, desenhados sem cruzamentos (diagramas de Schlegel).

Exemplo 7.14. Conferimos a fórmula de Euler nos cinco grafos da Figura 7.4. Tetraedro: $4 - 6 + 4 = 2$. Octaedro: $6 - 12 + 8 = 2$. Cubo: $8 - 12 + 6 = 2$. Icosaedro: $12 - 30 + 20 = 2$. Dodecaedro: $20 - 30 + 12 = 2$. O tetraedro, o octaedro e o icosaedro têm todas as faces triangulares e, de fato, $m = 3n - 6$ em cada um: $6 = 3 \cdot 4 - 6$, $12 = 3 \cdot 6 - 6$, $30 = 3 \cdot 12 - 6$. São triangulações maximais. O cubo é bipartido e atinge $m = 2n - 4$: $12 = 2 \cdot 8 - 4$. O dodecaedro tem cintura 5 e atinge a cota com $g = 5$: $\frac{5}{3}(20 - 2) = 30$.

Exemplo 7.15. A *roda* W_k é um ciclo C_k mais um vértice central ligado a todos os vértices do ciclo; o *prisma* $C_k \times K_2$ são dois ciclos C_k com os vértices correspondentes ligados (Figura 7.5). A roda tem $n = k + 1$, $m = 2k$ e, pela fórmula de Euler, $f = 2 - (k + 1) + 2k = k + 1$ faces: k triângulos e a face externa, de comprimento k. O prisma tem $n = 2k$, $m = 3k$ e $f = k + 2$: k quadriláteros e dois k-ágonos. O cubo é o prisma $C_4 \times K_2$, e o tetraedro é a roda W_3.

Exemplo 7.16. O grafo bipartido completo $K_{2,k}$ é planar para todo k: ponha os dois vértices da parte menor nos polos e os k vértices no equador, como gomos de uma laranja. Já $K_{3,3}$ não é. A fronteira entre planar e não planar, para bipartidos completos, é exatamente esta: $K_{m,k}$ é planar se e só se $\min(m, k) \leq 2$.



roda W_6 prisma $C_5 \times K_2$ hexágono triangulado

Figura 7.5: Uma roda, um prisma e um grafo exteriormente planar maximal (as diagonais estão em azul claro).

7.6 Dualidade

Definição 7.17. Seja G um grafo plano. O *dual* G^* tem um vértice F^* dentro de cada face F de G e, para cada aresta e de G, uma aresta e^* que cruza e uma única vez e liga os vértices das duas faces que e separa (um laço, se as duas faces coincidem).

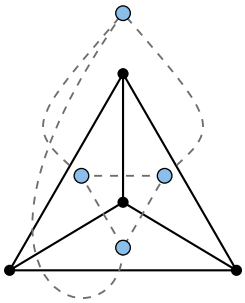


Figura 7.6: Um grafo plano (preto) e seu dual (vértices azul claro, arestas cinza tracejadas). O tetraedro é autodual.

O dual de um grafo plano conexo é conexo e plano, e $(G^*)^* = G$. A dualidade troca vértices com faces, de modo que $n^* = f$, $m^* = m$, $f^* = n$, e o grau de F^* é o comprimento de F. Ela troca também ciclos por cortes: um conjunto de arestas C é um ciclo em G se e só se C^* é um corte minimal (ligação) em G^*. Dessa forma o cubo e o octaedro são duais, assim como o dodecaedro e o icosaedro.

Exemplo 7.18. O dual do cubo tem um vértice para cada uma das 6 faces; cada face quadrada é vizinha de 4 outras, e faces vizinhas em torno de um vértice do cubo formam triângulos. Obtemos um grafo 4-regular com 6 vértices, 12 arestas e 8 faces triangulares: o octaedro. Do mesmo modo, o dual do dodecaedro (12 faces pentagonais, 3 em cada vértice) é o icosaedro. A roda W_k é autodual: a face externa de comprimento k corresponde ao centro, e os k triângulos, ao ciclo.

A dualidade traduz problemas de coloração de mapas: colorir os países de um mapa de modo que vizinhos tenham cores diferentes é colorir os vértices do dual. Esse é o caminho para o Teorema das Quatro Cores, tratado no próximo capítulo.

7.7 Grafos exteriormente planares

Um grafo é *exteriormente planar* se admite uma imersão com todos os vértices na fronteira da face externa. Exemplos são os ciclos, as árvores e os polígonos convexos triangulados (as triangulações de um polígono por diagonais). Esses grafos aparecem naturalmente quando se dispõem os vértices numa circunferência e se exige que as cordas não se cruzem, como no desenho de diagramas de estrutura secundária de RNA ou de redes em anel. Eles têm no máximo $2n-3$ arestas (Exercício 7.6) e são caracterizados pela ausência de menores K_4 e $K_{2,3}$, um análogo do Teorema de Wagner (Teorema 8.3). O hexágono triangulado da Figura 7.5 tem $6+3 = 9 = 2\cdot 6-3$ arestas e atinge a cota.

Exemplo 7.19. Contemos as triangulações de um polígono convexo com $k+2$ lados, que são exatamente os grafos exteriormente planares maximais com o ciclo externo fixado. Para o quadrado há 2 (uma diagonal ou a outra), para o pentágono 5 e para o hexágono 14. Em geral, o número é o número de Catalan $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$: escolhendo o triângulo que contém um lado fixo, o polígono se divide em dois menores, o que dá a recorrência $C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-1-i}$. Para o hexágono ($k=4$), $C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14$.

Voltaremos a eles nos desenhos de livro (Capítulo 14): um desenho de uma página de um grafo é exatamente uma imersão exteriormente planar.

Exercícios

Exercício 7.1. Seja G planar com grau mínimo pelo menos 3. Prove que G tem pelo menos quatro vértices de grau no máximo 5.

Exercício 7.2. Prove que, se G é um grafo simples com pelo menos 11 vértices, então G e seu complemento $\overline{G}$ não podem ser ambos planares.

Exercício 7.3. Prove que um grafo plano com n vértices, m arestas, f faces e c componentes conexas satisfaz $n - m + f = 1 + c$.

Exercício 7.4. Uma bola de futebol clássica é costurada com gomos pentagonais e hexagonais, e em cada vértice se encontram exatamente três gomos. Prove que, qualquer que seja o número de hexágonos, há exatamente 12 pentágonos.

Exercício 7.5. Prove que todo grafo planar com cintura pelo menos 6 tem um vértice de grau no máximo 2.

Exercício 7.6. Prove que todo grafo exteriormente planar simples com $n \geq 2$ vértices tem no máximo $2n-3$ arestas. Conclua que K_4 e $K_{2,3}$ não são exteriormente planares.

CAPÍTULO 8

Kuratowski, Wagner, Fáry e a coloração de mapas

No capítulo anterior provamos que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Neste capítulo veremos que essas duas obstruções explicam toda a não planaridade: um grafo é planar exatamente quando não contém nenhuma delas "disfarçada". Em seguida provaremos que todo grafo planar pode ser desenhado com segmentos de reta (o que justifica, por exemplo, que os mapas esquemáticos de metrô possam usar apenas trechos retos) e trataremos das colorações de mapas.

8.1 Subdivisões e menores

Definição 8.1. *Subdividir* uma aresta uv é substituí-la por um caminho $u\,w\,v$ com um vértice novo w. Uma *subdivisão* de H é qualquer grafo obtido de H por uma sequência de subdivisões. *Contrair* uma aresta uv é identificar u e v num único vértice adjacente a todos os vizinhos de u e de v (descartando laços e arestas múltiplas). Um grafo H é *menor* de G se H pode ser obtido de um subgrafo de G por contrações.

Subdividir não altera a planaridade: os vértices novos são pontos sobre os arcos. Apagar e contrair também preservam a planaridade, pois numa imersão podemos encolher o arco de uv até um ponto. Portanto, se G contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, ou tem um deles como menor, G não é planar.

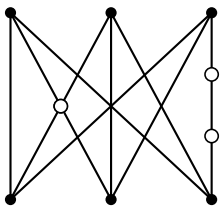


Figura 8.1: Uma subdivisão de $K_{3,3}$: os vértices brancos têm grau 2 e apenas marcam pontos sobre as arestas originais.

8.2 O Teorema de Kuratowski

Teorema 8.2 (Kuratowski, 1930)**.** *Um grafo é planar se e somente se não contém subgrafo que seja subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Chamemos de *subgrafo de Kuratowski* uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ contida em G. A necessidade já foi vista. Damos a seguir um esboço detalhado da suficiência, na linha da prova de Thomassen (1981), que é hoje a mais usada em cursos.

Redução ao caso 3-conexo. Seja G um grafo não planar sem subgrafo de Kuratowski, com o menor número possível de arestas. Então G é 2-conexo, pois se cada bloco tivesse imersão poderíamos colá-las pelos vértices de corte. Se G tivesse um corte $\{x, y\}$ de dois vértices, escreva $G = G_1 \cup G_2$ com $G_1 \cap G_2 = \{x, y\}$ e considere $G_i + xy$. Cada $G_i + xy$ tem menos arestas que G e não contém subgrafo de Kuratowski (se contivesse um usando a aresta xy, bastaria trocá-la por um caminho de x a y em G_{3-i}). Pela minimalidade, ambos são planares; imergindo cada um com a aresta xy na face externa e colando ao longo de xy, obtemos uma imersão de G. Logo G é 3-conexo.

A aresta contrátil. Um lema de Thomassen garante que todo grafo 3-conexo com pelo menos 5 vértices tem uma aresta $e = xy$ tal que G/e ainda é 3-conexo. Outro lema, verificado por casos, garante que se G/e contém um subgrafo de Kuratowski, então G também contém. Por indução no número de vértices (o caso K_4 é planar), G/e é planar.

Abrindo o vértice contraído. Fixe uma imersão de G/e e seja z o vértice obtido da contração. Como G/e é 3-conexo, $G/e - z$ é 2-conexo e a face de $G/e - z$ que continha z é limitada por um ciclo C. Todos os vizinhos de x e de y (exceto eles mesmos) estão em C. Sejam $x_1, \ldots, x_k$ os vizinhos de x em C, na ordem cíclica; eles dividem C em segmentos $[x_i, x_{i+1}]$.

- Se todos os vizinhos de y em C estão num mesmo segmento $[x_i, x_{i+1}]$, colocamos x no lugar de z, ligamos x aos x_j e colocamos y dentro do setor entre $x_i x$ e $x x_{i+1}$, ligado aos seus vizinhos sem cruzamentos. Obtemos uma imersão de G, contradição.
- Se y tem três vizinhos em comum com x em C, então x, y e esses três vértices, ligados pelos arcos de C e pela aresta xy, formam uma subdivisão de K_5.
- No caso restante, há vizinhos u, v de y em C e vizinhos x_i, x_j de x em C que se alternam na ordem x_i, u, x_j, v. Então $\{x, u, v\}$ e $\{y, x_i, x_j\}$, ligados pelas arestas e pelos arcos de C, formam uma subdivisão de $K_{3,3}$.

Os dois últimos casos contradizem a hipótese sobre G, o que encerra a prova.

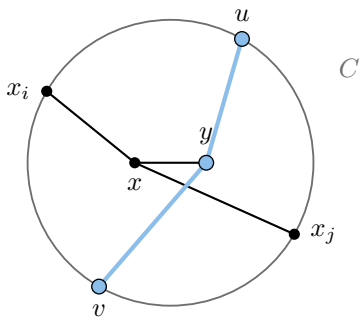


Figura 8.2: O caso alternado na prova de Kuratowski: os vizinhos de x (preto) e de y (azul claro) se alternam no ciclo C, e surge uma subdivisão de $K_{3,3}$.

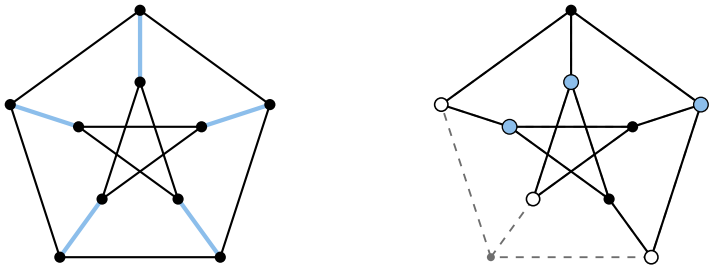
8.3 O Teorema de Wagner

Teorema 8.3 (Wagner, 1937)**.** *Um grafo é planar se e somente se não tem K_5 nem $K_{3,3}$ como menor.*

Demonstração. Se G tem um desses menores, não é planar, pois menores de grafos planares são planares. Reciprocamente, se G não é planar, pelo Teorema 8.2 contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, e contraindo as arestas dos caminhos subdivididos obtemos o menor correspondente. ■

A versão por menores tem uma vantagem conceitual: a família dos grafos planares é *fechada por menores*, e Robertson e Seymour provaram (numa série de vinte artigos publicados entre 1983 e 2004) que toda família fechada por menores é caracterizada por uma lista *finita* de menores proibidos. Para o plano a lista é $\{K_5, K_{3,3}\}$; para o plano projetivo ela tem 35 grafos; para o toro já foram encontrados mais de 17 mil menores proibidos, e não se sabe se a lista está completa.

Atenção: as duas formulações não são equivalentes grafo a grafo. O grafo de Petersen tem K_5 como menor (Exercício 8.1), mas não contém subdivisão de K_5, porque é 3-regular e uma subdivisão de K_5 exige vértices de grau 4. Pelo Teorema de Kuratowski, ele contém então uma subdivisão de $K_{3,3}$, exibida na Figura 8.3.



contraindo os raios: menor K_5 subdivisão de $K_{3,3}$

Figura 8.3: O grafo de Petersen. À esquerda, contraindo os cinco raios (azul claro) obtém-se K_5. À direita, uma subdivisão de $K_{3,3}$: as partes são os vértices pretos e os azul claro, os brancos subdividem arestas, e as arestas tracejadas não são usadas.

Exemplo 8.4. No grafo de Wagner V_8 (vértices $\mathbb{Z}_8$, $i \sim i \pm 1$ e $i \sim i+4$), tome as partes $\{0, 2, 5\}$ e $\{1, 4, 6\}$. As arestas $0\,1$, $0\,4$, $2\,1$, $2\,6$, $5\,1$, $5\,4$ e $5\,6$ existem diretamente, e os pares restantes são ligados pelos caminhos $0\,7\,6$ e $2\,3\,4$, que usam os vértices 7 e 3 como subdivisões. Obtemos uma subdivisão de $K_{3,3}$ (Figura 8.4), e V_8 não é planar, embora satisfaça todas as cotas de Euler. Ele tem papel central no teorema estrutural de Wagner: os grafos sem menor K_5 são obtidos colando grafos planares e cópias de V_8 por cliques de tamanho no máximo 3.

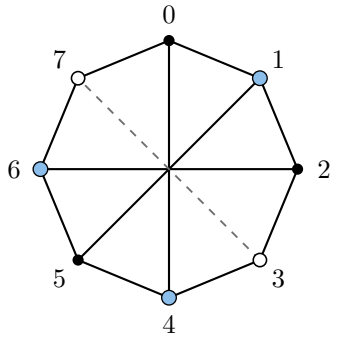


Figura 8.4: O grafo de Wagner V_8 com uma subdivisão de $K_{3,3}$: partes em preto e em azul claro, vértices de subdivisão em branco; só a diagonal tracejada $3\,7$ fica de fora.

Exemplo 8.5. Os grafos de Kuratowski são *minimamente* não planares: apagando qualquer aresta de K_5 ou de $K_{3,3}$, o resultado é planar. Para $K_5 - e$, com $e = uv$, desenhe o triângulo

dos outros três vértices a, b, c, ponha u dentro e v fora, ambos ligados a a, b, c. Para $K_{3,3} - e$, desenhe o ciclo hexagonal $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$; as três arestas restantes "longas" são a_1b_2, a_2b_3, a_3b_1, e sem uma delas as outras duas cabem uma dentro e outra fora do hexágono. Pela mesma razão, $\mathrm{cr}(K_5) = \mathrm{cr}(K_{3,3}) = 1$: basta pôr a aresta apagada de volta com um único cruzamento.

8.4 Desenhos com segmentos de reta

Teorema 8.6 (Wagner, 1936; Fáry, 1948; Stein, 1951)**.** *Todo grafo planar simples admite uma imersão no plano em que cada aresta é um segmento de reta.*

Precisamos de um fato de geometria elementar. O *núcleo* de um polígono simples P é o conjunto dos pontos de P a partir dos quais todo o polígono é visível; P é *estrelado* se o núcleo não é vazio.

Lema 8.7. *Todo polígono simples com no máximo* 5 *vértices é estrelado.*

A verificação é feita por casos: um polígono com k vértices tem soma de ângulos internos $(k-2)\pi$, e então um pentágono tem no máximo dois vértices reflexos; analisando as posições possíveis desses vértices, encontra-se sempre um triângulo da triangulação do polígono cujo interior está no núcleo. O resultado é falso para hexágonos, como mostra um hexágono em forma de "Z".

Demonstração do Teorema 8.6. Podemos supor que G é uma triangulação, pois acrescentar arestas não atrapalha (depois as apagamos). Provamos, por indução em n, a afirmação mais forte: *toda triangulação plana com $n \geq 3$ vértices tem imersão retilínea em que a face externa é um triângulo prescrito abc.* Para $n = 3$ não há o que fazer.

Seja $n \geq 4$. Pelo Corolário 7.11, $\sum(6 - d(v)) = 12$. Os três vértices externos têm grau pelo menos 3 e contribuem com no máximo 9, logo existe um vértice interno v com $d(v) \leq 5$. Seja $C = x_1x_2 \cdots x_k$ o ciclo dos vizinhos de v, $3 \leq k \leq 5$. Ao remover v, fica uma face limitada por C, que precisamos retriangular por diagonais sem criar arestas múltiplas, isto é, sem usar uma diagonal x_ix_j que já seja aresta (desenhada fora de C).

As arestas entre vértices não consecutivos de C desenhadas fora de C não se cruzam, e então formam, junto com C, um grafo exteriormente planar. Se $k \leq 5$, existe um vértice x_i de C que não é extremidade de nenhuma dessas cordas externas (com no máximo duas cordas não cruzadas num pentágono, ou uma num quadrado, sobra sempre um vértice livre). Retriangulamos a face ligando x_i aos vértices não adjacentes de C. O grafo G' obtido é uma triangulação simples com $n - 1$ vértices e a mesma face externa.

Pela hipótese de indução, G' tem imersão retilínea com face externa abc. Nela, apague as diagonais acrescentadas: sobra um polígono simples com os vértices de C, de no máximo 5 lados. Pelo Lema 8.7, ele tem um ponto p no núcleo; colocando v em p e ligando-o por segmentos a $x_1, \ldots, x_k$, obtemos a imersão retilínea desejada de G. ■

Exemplo 8.8. No pentágono da figura, com vértices $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (3{,}4; 0)$, $x_3 = (3{,}4; 2{,}3)$, $x_4 = (1{,}7; 1{,}05)$ e $x_5 = (0; 2{,}3)$, o ponto $v = (1{,}7; 0{,}45)$ está no núcleo. Os segmentos de v a x_1, x_2 e x_4 claramente ficam no polígono; o único risco é o segmento vx_3 sair pela aresta x_4x_3. Escrevendo $x = 1{,}7 + t$ com $0 \leq t \leq 1{,}7$, o segmento vx_3 tem altura $0{,}45 + \frac{1{,}85}{1{,}7}t$ e a aresta x_4x_3 tem altura $1{,}05 + \frac{1{,}25}{1{,}7}t$. A diferença é $0{,}6 - \frac{0{,}6}{1{,}7}t \geq 0$, com igualdade só em $t = 1{,}7$, isto é, em x_3. Logo vx_3 fica abaixo da aresta, e o caso vx_5 é simétrico.

Existem versões quantitativas do resultado: de Fraysseix, Pach e Pollack (1990) e Schnyder

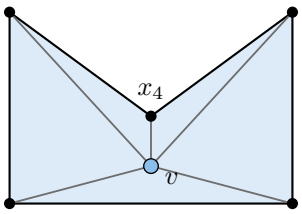


Figura 8.5: O passo final da prova de Fáry: o polígono dos vizinhos pode ter um vértice reflexo (x_4), mas um ponto do núcleo enxerga os cinco vértices, e v é colocado ali com arestas retas (cinza).

(1990) mostraram que todo grafo planar com n vértices tem imersão retilínea com os vértices numa grade de tamanho $O(n) \times O(n)$, calculável em tempo linear. Um resultado mais forte, também com segmentos, é o de Tutte.

Teorema 8.9 (Tutte, 1963)**.** *Seja G um grafo planar 3-conexo e F o ciclo de uma face de alguma imersão. Fixe os vértices de F nos vértices de um polígono convexo, na ordem cíclica. Então existe uma única posição dos demais vértices em que cada um é o baricentro dos seus vizinhos, e essa posição, com arestas retas, é uma imersão em que todas as faces são convexas.*

O teorema de Tutte é, na prática, um algoritmo: as posições resolvem um sistema linear (o "modelo de molas" em que cada aresta é um elástico ideal), e por isso ele é a base de muitos programas de desenho automático de grafos.

Exemplo 8.10. Apliquemos o método de Tutte ao cubo, fixando a face externa no quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$. Cada vértice interno é vizinho de um vértice externo e de dois internos. Pela simetria do problema (a solução é única, logo herda as simetrias do quadrado), o vértice interno ligado a $(1,1)$ fica em (t,t) e seus vizinhos internos em $(-t,t)$ e $(t,-t)$. A condição de baricentro na primeira coordenada é

$$t = \frac{1 + (-t) + t}{3} = \frac{1}{3}.$$

O quadrado interno tem vértices $\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$, e todas as faces (o quadrado interno e quatro trapézios) são convexas.

Exemplo 8.11. Para o octaedro, fixe a face externa no triângulo equilátero de vértices A, B, C com baricentro na origem. Cada vértice interno é vizinho de dois externos e dos outros dois internos. Se os internos são P_A, P_B, P_C, com P_A não adjacente a A, a condição de Tutte é $4P_A = B + C + P_B + P_C$. Somando as três equações, $4S = 2(A+B+C) + 2S$, onde $S = P_A + P_B + P_C$; como $A + B + C = 0$, vem $S = 0$. Então $5P_A = B + C + (P_A + P_B + P_C) = B + C = -A$, isto é, $P_A = -\frac{1}{5}A$. O triângulo interno é o externo girado de $180°$ e reduzido a um quinto.

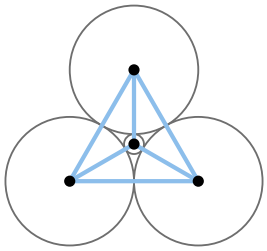
8.5 Representações por moedas

Teorema 8.12 (Koebe, 1936; Andreev, 1970; Thurston, 1978)**.** *Todo grafo planar simples é o* grafo de contato *de uma família de discos no plano com interiores disjuntos: os vértices correspondem aos discos, e dois vértices são adjacentes quando os discos se tangenciam.*

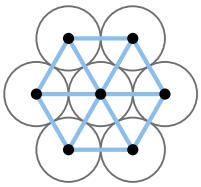
Ligando os centros dos discos tangentes por segmentos, obtém-se mais uma prova do Teorema de Fáry. Quando se exige que todos os discos tenham o mesmo raio, obtêm-se os *grafos de moedas*, uma classe bem menor: em um grafo de moedas todo vértice tem grau no máximo 6 (Exercício 8.6), e, pondo o raio igual a $\frac{1}{2}$, as arestas ligam pontos à distância exatamente 1.

Grafos de moedas são, portanto, grafos de distância unitária planares, e há uma linha de pesquisa inteira dedicada a eles.

Exemplo 8.13. Uma representação de K_4 por discos: três moedas de raio 1 duas a duas tangentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero de lado 2, e um disco central tangente às três (Figura 8.6). O centro do triângulo dista $\frac{2}{\sqrt{3}}$ de cada vértice, e então o disco central tem raio $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. O disco central é menor: K_4 é grafo de contato de discos, mas não de moedas iguais, pois três moedas iguais duas a duas tangentes não deixam espaço para uma quarta tangente às três.



K_4 por discos



7 moedas: a roda W_6

Figura 8.6: À esquerda, K_4 como grafo de contato de discos. À direita, sete moedas iguais em arranjo hexagonal; o grafo de moedas é a roda W_6, com 12 arestas e um vértice de grau 6.

8.6 Coloração de mapas

Pela dualidade (Seção 7.6), colorir países de um mapa plano é colorir os vértices de um grafo planar. Começamos com uma cota fácil e uma prova clássica.

Proposição 8.14. *Todo grafo planar é* 6*-colorível.*

Demonstração. Indução em n: um vértice v de grau no máximo 5 existe (Corolário 7.11); colore-se $G - v$ e sobra uma cor livre para v. ∎

Teorema 8.15 (Heawood, 1890)**.** *Todo grafo planar é* 5*-colorível.*

Demonstração. Indução em n. Seja G plano e v de grau no máximo 5. Pela hipótese de indução, $G - v$ tem uma 5-coloração. Se os vizinhos de v usam no máximo 4 cores, v recebe a quinta. Resta o caso $d(v) = 5$ com vizinhos $v_1, \dots, v_5$, em ordem cíclica ao redor de v, de cores $1, 2, 3, 4, 5$.

As cadeias de Kempe. Considere o subgrafo H_{13} induzido pelos vértices de cores 1 e 3. Se v_1 e v_3 estão em componentes diferentes de H_{13}, troque as cores 1 e 3 na componente de v_1; a coloração continua própria, v_1 passa a ter cor 3, e a cor 1 fica livre para v. Caso contrário, há um caminho P de v_1 a v_3 com cores alternadas 1 e 3. O ciclo $v\, v_1\, P\, v_3\, v$ é uma curva fechada que separa v_2 de v_4 (eles estão em lados opostos, pela ordem cíclica dos vizinhos). Então, no subgrafo H_{24} dos vértices de cores 2 e 4, v_2 e v_4 estão em componentes diferentes, pois um caminho entre eles teria de cruzar o ciclo, e o ciclo só tem vértices de cores 1, 3 e o vértice v. Trocando as cores 2 e 4 na componente de v_2, a cor 2 fica livre para v. ∎

Exemplo 8.16. Quatro cores podem ser necessárias. Imagine um país L cercado por cinco vizinhos $P_1, \dots, P_5$ dispostos em anel, cada um vizinho do seguinte e P_5 vizinho de P_1. O grafo dual é a roda W_5. O anel é um ciclo ímpar e precisa de 3 cores; o país central é vizinho de todos

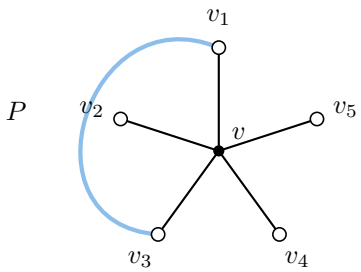


Figura 8.7: A cadeia de Kempe P (azul claro), com cores 1 e 3 alternadas, separa v_2 de v_4 e impede que eles estejam ligados por uma cadeia de cores 2 e 4.

e precisa de uma quarta. Já com um anel de seis vizinhos (W_6) três cores bastam: o anel par usa duas, e o centro, a terceira. Luxemburgo, cercado por apenas três vizinhos (Bélgica, França e Alemanha, duas a duas vizinhas), é um exemplo real em que o dual contém K_4.

Teorema 8.17 (Quatro Cores; Appel–Haken, 1976)**.** *Todo grafo planar é 4-colorível.*

Uma história de 150 anos

Francis Guthrie formulou a conjectura em 1852 ao colorir o mapa dos condados da Inglaterra. Em 1879, Kempe publicou uma "prova" com as cadeias que levam seu nome; em 1890 Heawood encontrou o erro (a dupla troca de cores no caso de grau 5 pode falhar) e aproveitou a ideia para provar o teorema das cinco cores. Appel e Haken, em 1976, reduziram o problema a cerca de 1 900 configurações *redutíveis* e as verificaram por computador, uma das primeiras grandes provas assistidas por máquina. Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1997) simplificaram a prova para 633 configurações, com um conjunto de regras de descarga mais limpo, e Gonthier formalizou essa demonstração no assistente de provas Coq em 2005, eliminando dúvidas sobre o programa.

8.7 Teste de planaridade

Como decidir, para um grafo dado com milhares de vértices, se ele é planar? Testar subgrafos de Kuratowski diretamente é inviável. Hopcroft e Tarjan (1974) deram o primeiro algoritmo de tempo *linear*, $O(n)$: ele constrói uma imersão quando o grafo é planar e, em versões posteriores, exibe um subgrafo de Kuratowski quando não é. Algoritmos mais simples de mesma complexidade foram dados por Booth e Lueker (1976, com árvores PQ) e por Boyer e Myrvold (2004). O contraste é marcante: decidir se $\mathrm{cr}(G) = 0$ é fácil, mas decidir se $\mathrm{cr}(G) \le k$ para k dado na entrada é NP-completo (Capítulo 15).

Exercícios

Exercício 8.1. Prove que o grafo de Petersen (Figura 7.3) tem K_5 como menor. Explique por que ele não contém subdivisão de K_5 e conclua que contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

Exercício 8.2. Prove, sem usar o Teorema das Quatro Cores, que todo grafo planar sem triângulos é 4-colorível.

Exercício 8.3. Um artista traça várias curvas fechadas no plano (cada uma pode cruzar a si

mesma e as outras um número finito de vezes, sempre em cruzamentos transversais de duas curvas). Prove que as regiões obtidas podem ser pintadas de branco e azul de modo que regiões vizinhas por um trecho de curva tenham cores diferentes.

Exercício 8.4. Prove que as arestas de todo grafo planar podem ser orientadas de modo que cada vértice tenha no máximo 5 arestas saindo dele.

Exercício 8.5. O hipercubo Q_d tem como vértices as sequências binárias de comprimento d, e duas sequências são adjacentes quando diferem em uma posição. Prove que Q_3 é planar e que Q_4 não é.

Exercício 8.6. Considere moedas idênticas de raio 1 sobre uma mesa, sem sobreposição, e ligue os centros de duas moedas tangentes por um segmento. Prove que esses segmentos nunca se cruzam e que cada moeda toca no máximo 6 outras.

CAPÍTULO 9

Superfícies e gênero

Volte à placa de circuito impresso do Capítulo 7. Quando o circuito não é planar, o engenheiro tem duas saídas. Pode aceitar cruzamentos e resolvê-los com "pontes" (jumpers), e minimizar o número delas é minimizar o número de cruzamentos, o tema da Parte III. Ou pode usar uma placa com furos metalizados que permitem a uma trilha passar para o outro lado, o que, topologicamente, equivale a desenhar o grafo numa superfície com alças. Este capítulo trata da segunda saída e mostra como ela se relaciona com a primeira.

9.1 Superfícies

Uma *superfície* é um espaço topológico compacto, conexo, em que cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto. A esfera S_0 é o exemplo básico. Acrescentando g *alças* à esfera (retirando dois discos e colando um tubo) obtemos a superfície orientável S_g de gênero g; o toro é S_1. Acrescentando k *faixas cruzadas* (retirando um disco e colando uma faixa de Möbius pela borda) obtemos a superfície não orientável N_k; o plano projetivo é N_1 e a garrafa de Klein é N_2.

Teorema 9.1 (Classificação das superfícies)**.** *Toda superfície é homeomorfa a exatamente uma das superfícies S_g $(g \geq 0)$ ou N_k $(k \geq 1)$.*

Uma forma cômoda de representar o toro e a garrafa de Klein é por um quadrado com os lados identificados (Figura 9.1). Uma formiga que sai pelo lado direito do quadrado do toro volta pelo lado esquerdo na mesma altura; quem sai por cima volta por baixo. Na garrafa de Klein, um dos pares é colado com inversão, e a formiga que atravessa esse par volta espelhada.

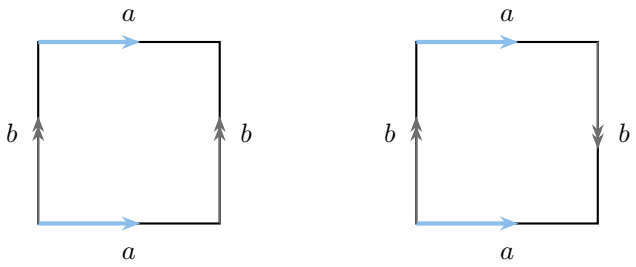


Figura 9.1: Quadrados com lados identificados segundo as setas. Lados com a mesma letra são colados de modo que as setas coincidam.

9.2 A característica de Euler

Uma imersão de um grafo numa superfície é definida como no plano. As *faces* são as componentes conexas do complemento. A imersão é *celular* (ou de 2-células) se toda face é homeomorfa a

um disco aberto. Por exemplo, um ciclo desenhado em volta do "furo" do toro não é celular: o complemento é um anel.

Teorema 9.2 (Fórmula de Euler generalizada)**.** *Para cada superfície S existe um inteiro $\chi(S)$, a* característica de Euler*, tal que toda imersão celular de um grafo conexo em S satisfaz $n-m+f = \chi(S)$. Tem-se*

$$\chi(S_g) = 2 - 2g, \qquad \chi(N_k) = 2 - k.$$

Para imersões quaisquer de grafos conexos vale $n - m + f \geq \chi(S)$, com igualdade se e somente se a imersão é celular.

A ideia da prova é que duas imersões celulares sempre admitem um refinamento comum, e operações elementares (subdividir uma aresta, traçar uma aresta dentro de uma face, acrescentar um vértice pendente) não alteram $n - m + f$. Para calcular χ, basta uma imersão: o quadrado do toro com os lados colados dá 1 vértice, 2 arestas e 1 face, e $1-2+1 = 0 = \chi(S_1)$. Acrescentar uma alça a uma imersão celular, ligando duas faces por um tubo e passando por ele duas arestas novas, reduz $n - m + f$ em 2.

Repetindo o argumento do Teorema 7.5 (faces de comprimento pelo menos 3, logo $2m \geq 3f$), obtemos:

Proposição 9.3. *Se um grafo simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas tem imersão numa superfície S, então $m \leq 3\big(n - \chi(S)\big)$. Se, além disso, o grafo não tem triângulos, $m \leq 2\big(n - \chi(S)\big)$.*

Demonstração. Podemos supor o grafo conexo. Então $n - m + f \geq \chi(S)$ e $f \leq \frac{2m}{3}$ dão $\chi(S) \leq n - \frac{m}{3}$. No caso sem triângulos, $f \leq \frac{m}{2}$. (Faces de comprimento 1 ou 2 não ocorrem em grafos simples com pelo menos 3 vértices, a não ser em imersões não celulares degeneradas, que podem ser descartadas acrescentando arestas.) ∎

9.3 O gênero de um grafo

Definição 9.4. O *gênero* $\gamma(G)$ é o menor g tal que G tem imersão em S_g. O *gênero não orientável* $\tilde{\gamma}(G)$ é o menor k tal que G tem imersão em N_k (com $\tilde{\gamma}(G) = 0$ para G planar).

Um grafo é planar se e só se $\gamma(G) = 0$. Pela Proposição 9.3, para K_n com $n \geq 3$,

$$\binom{n}{2} \leq 3\big(n - 2 + 2\gamma(K_n)\big) \quad \Longrightarrow \quad \gamma(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

A determinação exata do gênero dos grafos completos foi um dos grandes projetos da combinatória do século XX.

Teorema 9.5 (Ringel–Youngs, 1968)**.** *Para todo $n \geq 3$,*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

A cota inferior é a que acabamos de deduzir. A superior exige construir, para cada classe de n módulo 12, imersões quase triangulares de K_n, e Ringel e Youngs o fizeram com *correntes* (current graphs), uma técnica que codifica a imersão num grafo pequeno rotulado por um grupo cíclico. A prova completa ocupa um livro (Ringel, *Map Color Theorem*, 1974). No caso não orientável, Ringel (1954) provou que $\tilde{\gamma}(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/6 \rceil$ para $n \geq 3$, com a única exceção $\tilde{\gamma}(K_7) = 3$: K_7 não cabe na garrafa de Klein.

Para os bipartidos completos, a mesma contagem com faces de comprimento pelo menos 4 dá a cota inferior do teorema seguinte (Exercício 9.3).

Teorema 9.6 (Ringel, 1965). *Para $m, n \geq 2$, $\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \dfrac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil$.*

Exemplo 9.7. Pelo teorema de Ringel, $\gamma(K_{3,3}) = \lceil \frac{1}{4} \rceil = 1$, $\gamma(K_{4,4}) = \lceil \frac{4}{4} \rceil = 1$, $\gamma(K_{5,5}) = \lceil \frac{9}{4} \rceil = 3$ e $\gamma(K_{6,6}) = \lceil \frac{16}{4} \rceil = 4$. Para $K_{4,4}$ no toro, a imersão é uma quadrangulação: $f = \frac{2 \cdot 16}{4} = 8$ e $8 - 16 + 8 = 0$. Para $K_{5,5}$, a contagem dá $g \geq \frac{9}{4}$, e como o gênero é inteiro, $g \geq 3$; nesse caso nenhuma imersão ótima tem só faces quadradas.

Exemplo 9.8. O quadrado da garrafa de Klein (Figura 9.1), depois das colagens, tem 1 vértice (os quatro cantos se identificam), 2 arestas (a e b) e 1 face: $1 - 2 + 1 = 0 = \chi(N_2)$, o mesmo valor do toro. A característica de Euler não distingue as duas superfícies; o que as distingue é a orientabilidade.

9.4 K_7 no toro

O caso $n = 7$ do Teorema de Ringel–Youngs diz que $\gamma(K_7) = 1$, e esse caso pode ser verificado à mão. Considere o reticulado triangular infinito, com vértices nos pontos $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ e arestas nas direções $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, -1)$. Rotule o vértice (x, y) com

$$\varphi(x, y) = x + 3y \pmod 7.$$

Os seis vizinhos de (x, y) diferem dele por $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$ e $\pm(1, -1)$, e recebem os rótulos $\varphi \pm 1$, $\varphi \pm 3$ e $\varphi \pm 2$: exatamente os outros seis elementos de $\mathbb{Z}_7$. O rótulo é invariante pelas translações $(7, 0)$ e $(-3, 1)$, que geram o núcleo de φ. Identificando os pontos com o mesmo rótulo, isto é, tomando o quociente do plano por essas translações, obtemos um toro com 7 vértices, cada um adjacente aos outros seis: uma imersão de K_7 no toro, com 14 faces triangulares.

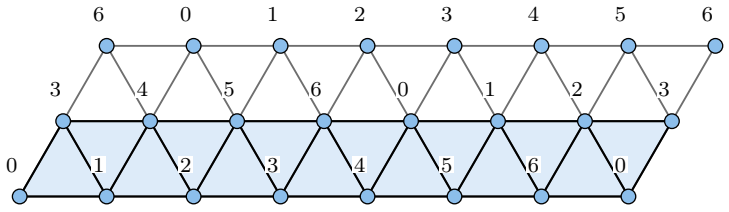


Figura 9.2: O reticulado triangular rotulado por $x + 3y$ mod 7. A faixa sombreada é um domínio fundamental: colando o lado esquerdo no direito e a borda de cima na de baixo deslocada de três unidades, obtém-se o toro com a imersão de K_7 (faixa com 14 triângulos).

Exemplo 9.9. O dual da imersão de K_7 no toro tem um vértice para cada uma das 14 faces triangulares e uma aresta para cada uma das 21 arestas; cada vértice dual tem grau 3 e cada face dual (correspondente a um vértice de K_7) é um hexágono. Esse dual é o grafo de Heawood (Figura 6.3): os 14 triângulos se dividem em duas classes de 7, os "para cima" e os "para baixo" do reticulado, e cada aresta separa um triângulo de cada classe, o que torna o dual bipartido. O grafo de Heawood não é planar (Capítulo 7), mas tem gênero 1, e sua imersão no toro é celular com $14 - 21 + 7 = 0$.

Exemplo 9.10. Pela cota de Ringel–Youngs, $\gamma(K_8) = \lceil \frac{5 \cdot 4}{12} \rceil = 2$, $\gamma(K_{12}) = \lceil \frac{9 \cdot 8}{12} \rceil = 6$ e $\gamma(K_{15}) = \lceil \frac{12 \cdot 11}{12} \rceil = 11$. Nos casos em que $(n-3)(n-4)$ é múltiplo de 12, como $n = 7$ e $n = 12$, a imersão ótima é uma triangulação: para K_{12} em S_6, $f = \frac{2 \cdot 66}{3} = 44$ e $12 - 66 + 44 = -10 = 2 - 2 \cdot 6$.

A imersão dual é um mapa no toro com sete países hexagonais, cada um vizinho dos outros seis (Exercício 9.5). Por isso sete cores podem ser necessárias para colorir mapas no toro, ao contrário do plano.

9.5 Outras imersões clássicas

Exemplo 9.11. O grafo K_6 tem imersão no plano projetivo. Como $\chi(N_1) = 1$ e $15 = 3(6-1)$, a imersão é uma triangulação com $f = 1-6+15 = 10$ faces: é o *hemi-icosaedro*, obtido do icosaedro identificando pontos antípodas (12 vértices viram 6, 30 arestas viram 15 e 20 faces viram 10). Seu dual, o *hemi-dodecaedro*, tem 10 vértices de grau 3, 15 arestas e 6 faces pentagonais, e é exatamente o grafo de Petersen. Assim o grafo de Petersen, que não é planar, tem imersão no plano projetivo, e de fato $10 - 15 + 6 = 1 = \chi(N_1)$.

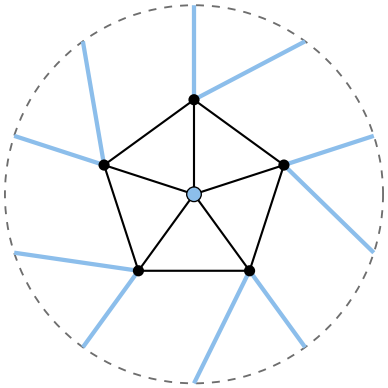


Figura 9.3: K_6 no plano projetivo, representado como um disco cujos pontos antípodas da borda (circunferência tracejada) são identificados. Cada diagonal do pentágono sai por um ponto da borda e reentra pelo ponto antípoda (trechos em azul claro): a diagonal que sai do vértice i inclinada reentra radialmente no vértice $i + 2$.

Exemplo 9.12. A grade toroidal $C_4 \times C_4$, que é o hipercubo Q_4, tem imersão no toro como reticulado quadrado 4×4 no quadrado com lados identificados (Figura 9.4): 16 vértices, 32 arestas e 16 faces quadradas, com $16 - 32 + 16 = 0$. Como Q_4 não é planar (Exercício 8.5), $\gamma(Q_4) = 1$. De modo geral, $\gamma(Q_d) = 1 + (d-4)2^{d-3}$ para $d \geq 2$ (Ringel, 1955; Beineke–Harary, 1965).

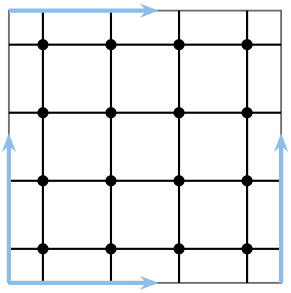


Figura 9.4: $C_4 \times C_4 = Q_4$ no toro: as arestas que saem por um lado do quadrado reentram pelo lado oposto.

Exemplo 9.13. O grafo K_5 tem gênero 1: ele não é planar e $\gamma(K_5) \leq \mathrm{cr}(K_5) = 1$ pela Proposição 9.16 (adiante). O mesmo vale para $K_{3,3}$, K_6 e K_7, todos com gênero 1. Para K_6,

porém, $\mathrm{cr}(K_6) = 3$: o gênero não "vê" a diferença entre um e três cruzamentos, porque várias arestas podem passar pela mesma alça.

9.6 Coloração em superfícies

Heawood (1890), no mesmo artigo em que corrigiu Kempe, estudou a coloração de mapas em outras superfícies. Para uma superfície S com característica $\chi = \chi(S) \leq 1$, defina o *número de Heawood*

$$H(S) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor .$$

Por exemplo, $H = 6$ para o plano projetivo ($\chi = 1$), $H = 7$ para o toro e a garrafa de Klein ($\chi = 0$) e $H = 8$ para o bitoro ($\chi = -2$).

Teorema 9.14 (Heawood, 1890; Ringel–Youngs, 1968; Franklin, 1934)**.** *Para toda superfície $S \neq S_0$, todo grafo com imersão em S é $H(S)$-colorível. Além disso, a cota é atingida, isto é, existe um grafo com imersão em S e número cromático $H(S)$, exceto para a garrafa de Klein, em que o máximo é 6.*

Exemplo 9.15. Para o bitoro S_2, $\chi = -2$ e $H = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{97}}{2} \right\rfloor = 8$, pois $9 < \sqrt{97} < 10$. Todo mapa no bitoro pode ser colorido com 8 cores, e 8 são necessárias porque K_8 tem imersão em S_2 ($\gamma(K_8) = 2$). Para S_3, $\chi = -4$, $\sqrt{145}$ está entre 12 e 13 e $H = 9$; de fato $\gamma(K_9) = \left\lceil \frac{30}{12} \right\rceil = 3$.

A primeira parte (Exercício 9.2) é uma contagem de graus, como na prova da 6-coloração planar. A segunda consiste em mostrar que $K_{H(S)}$ tem imersão em S, e é aí que entra Ringel–Youngs. A exceção da garrafa de Klein foi descoberta por Franklin: K_7 não cabe nela, e todo grafo imerso na garrafa de Klein é 6-colorível. Curiosamente, a fórmula de Heawood com $\chi = 2$ dá 4, o valor correto para o plano, mas o argumento de contagem só fornece 6 nesse caso; foi preciso esperar o Teorema das Quatro Cores. O plano é, paradoxalmente, a superfície mais difícil.

9.7 Gênero e número de cruzamentos

O número de cruzamentos $\mathrm{cr}(G)$, que estudaremos a partir do Capítulo 10, é o menor número de cruzamentos de um desenho de G no plano. Os dois parâmetros se comparam facilmente numa direção.

Proposição 9.16. *Para todo grafo G, $\gamma(G) \leq \mathrm{cr}(G)$.*

Demonstração. Tome um desenho de G na esfera com $k = \mathrm{cr}(G)$ cruzamentos, em que cada cruzamento envolve exatamente duas arestas (o que se pode supor por pequenas perturbações). Em volta de cada cruzamento, retire dois discos pequenos da esfera, um sobre cada aresta próxima ao cruzamento, e cole um tubo entre eles; faça uma das duas arestas passar por cima, pelo tubo, como num viaduto. Cada cruzamento é eliminado ao custo de uma alça, e obtemos uma imersão de G em S_k. ∎

A desigualdade pode ser muito folgada. A grade toroidal $C_m \times C_n$ tem gênero 1 para $m, n \geq 3$ (Exercício 9.6), mas uma conjectura de Harary, Kainen e Schwenk (1973), discutida no Capítulo 16, afirma que $\mathrm{cr}(C_m \times C_n) = (m-2)n$ para $3 \leq m \leq n$, um valor ilimitado. Quanto a K_n, o gênero cresce como $n^2/12$ e o número de cruzamentos como $n^4/64$: alças são um recurso muito mais poderoso do que pontes, porque uma única alça pode ser atravessada por muitas arestas.

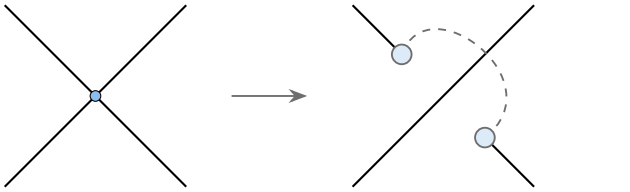


Figura 9.5: Eliminando um cruzamento com uma alça. Os discos em azul claro são as bocas do tubo, e o trecho tracejado corre por dentro dele.

O número de cruzamentos também pode ser definido em superfícies: $\mathrm{cr}_S(G)$ é o mínimo de cruzamentos de um desenho de G em S, e $\mathrm{cr}_S(G) = 0$ exatamente quando G tem imersão em S. Combinando a Proposição 9.3 com o argumento do Teorema 10.6 (apagar uma aresta por cruzamento), obtém-se $\mathrm{cr}_S(G) \geq m - 3\big(n - \chi(S)\big)$.

Exercícios

Exercício 9.1. Prove que K_8 não tem imersão no toro e que K_7 não tem imersão no plano projetivo. Conclua que K_7 é o maior grafo completo imersível no toro.

Exercício 9.2. Seja S uma superfície com $\chi(S) \leq 0$ e $H = H(S)$. Prove que todo grafo com imersão em S é H-colorível.

Exercício 9.3. Prove que $\gamma(K_{m,n}) \geq \dfrac{(m-2)(n-2)}{4}$ para $m, n \geq 2$.

Exercício 9.4. Prove que toda imersão de K_7 no toro é celular e tem todas as faces triangulares, com exatamente 14 faces.

Exercício 9.5. Um mapa no toro tem 7 países, cada um homeomorfo a um disco, dois a dois vizinhos por um trecho de fronteira, e em cada ponto de encontro de fronteiras se encontram exatamente três países. Prove que cada país é um hexágono (sua fronteira tem exatamente 6 trechos).

Exercício 9.6. Prove que, para $m, n \geq 4$, a grade toroidal $C_m \times C_n$ tem gênero exatamente 1.

Parte III

O número de cruzamentos

CAPÍTULO 10

Desenhos e número de cruzamentos

Até aqui, a pergunta central sobre a representação de um grafo no plano tinha resposta binária: o grafo é planar ou não é. Para quem desenha circuitos, mapas ou diagramas, essa resposta é pobre. Um projetista de placas de circuito impresso sabe que K_5 não é planar, mas precisa saber quantas *pontes* (cruzamentos de trilhas, resolvidos com jumpers ou com uma segunda camada) ele será obrigado a usar. O número de cruzamentos mede exatamente isso: o quanto um grafo está longe de ser planar.

10.1 A olaria de Turán

A origem do tema tem data e lugar. Em 1944, durante a Segunda Guerra Mundial, o matemático húngaro Paul Turán trabalhava num campo de trabalho forçado numa olaria perto de Budapeste. Havia vários fornos onde se queimavam os tijolos e vários depósitos onde eles eram guardados; cada forno estava ligado a cada depósito por trilhos, sobre os quais corriam vagonetes. Nos pontos em que dois trilhos se cruzavam, os vagonetes costumavam descarrilar, e os tijolos caíam. Turán se perguntou como dispor fornos, depósitos e trilhos de modo a minimizar o número de cruzamentos.

Em linguagem de grafos: com m fornos e n depósitos, a malha de trilhos é o grafo bipartido completo $K_{m,n}$, e a pergunta é o valor mínimo do número de cruzamentos num desenho de $K_{m,n}$ no plano. Mais de oitenta anos depois, essa pergunta continua sem resposta geral; voltaremos a ela no Capítulo 12.

Onde os cruzamentos custam caro

- **Circuitos integrados (VLSI).** Leighton mostrou, no início dos anos 1980, que a área mínima de um leiaute de circuito em grade é limitada inferiormente por uma função do número de cruzamentos do grafo do circuito. Menos cruzamentos significam chips menores.
- **Mapas de metrô e diagramas.** Experimentos de legibilidade mostram que o número de cruzamentos é o fator estético que mais afeta a compreensão de um diagrama de rede.
- **Placas de circuito impresso.** Cada cruzamento numa placa de uma face exige um jumper ou uma via para a outra face.

10.2 Desenhos de grafos

Definição 10.1. Um *desenho* D de um grafo G no plano associa a cada vértice um ponto do plano (pontos distintos para vértices distintos) e a cada aresta uv um arco simples (curva contínua e injetiva) ligando os pontos de u e v, de modo que:

(i) nenhum arco passa por um ponto que represente vértice, exceto suas extremidades;

(ii) dois arcos têm apenas um número finito de pontos interiores em comum;

(iii) em cada ponto interior comum a dois arcos, eles se cruzam de fato (passam de um lado para o outro), sem tangência;

(iv) nenhum ponto pertence ao interior de três ou mais arcos.

Cada ponto interior comum a dois arcos é um *cruzamento*. O número de cruzamentos de D é denotado por $\mathrm{cr}(D)$, e o *número de cruzamentos* de G é

$$\mathrm{cr}(G) = \min\{\mathrm{cr}(D) : D \text{ é desenho de } G\}.$$

As condições (ii)–(iv) não restringem o problema: qualquer configuração de curvas pode ser perturbada localmente até satisfazê-las, sem aumentar o número de pares de arcos que se encontram. Elas apenas tornam a contagem inequívoca. Observe que um grafo é planar se, e somente se, $\mathrm{cr}(G) = 0$.

Duas propriedades imediatas serão usadas o tempo todo.

Proposição 10.2. *Se H é subgrafo de G, então $\mathrm{cr}(H) \leq \mathrm{cr}(G)$. Se G' é obtido de G subdividindo arestas, então $\mathrm{cr}(G') = \mathrm{cr}(G)$.*

Demonstração. Apagar de um desenho ótimo de G os vértices e arestas fora de H produz um desenho de H com no máximo $\mathrm{cr}(G)$ cruzamentos. Para a subdivisão: um desenho de G vira desenho de G' marcando os novos vértices sobre os arcos, longe dos cruzamentos; logo $\mathrm{cr}(G') \leq \mathrm{cr}(G)$. Reciprocamente, num desenho de G' apagamos os vértices de subdivisão; cada caminho subdividido vira uma curva que pode passar por si mesma. Um laço de uma curva sobre si mesma pode ser cortado fora, o que só diminui cruzamentos. Obtemos um desenho de G com no máximo $\mathrm{cr}(G')$ cruzamentos. ∎

A segunda parte diz que cr é uma propriedade *topológica*: ela não distingue um grafo de suas subdivisões. Em particular, se G contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, então $\mathrm{cr}(G) \geq 1$.

10.3 Desenhos bons

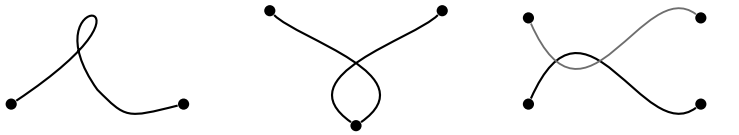
Num desenho arbitrário podem ocorrer situações claramente desperdiçadas: uma aresta que cruza a si mesma, duas arestas com extremidade comum que se cruzam, duas arestas que se cruzam duas vezes. Os desenhos em que nada disso acontece recebem nome próprio.

Definição 10.3. Um desenho é *bom* (ou *simples*) se

(a) nenhuma aresta cruza a si mesma;

(b) arestas com uma extremidade comum não se cruzam;

(c) duas arestas quaisquer se cruzam no máximo uma vez.



(a) laço (b) adjacentes (c) dois cruzamentos

Figura 10.1: As três situações proibidas num desenho bom.

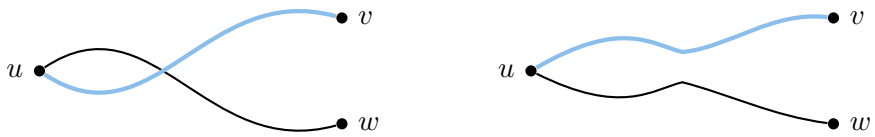
Lema 10.4. *Todo desenho de G com $\mathrm{cr}(D) = \mathrm{cr}(G)$ é bom. Em particular, $\mathrm{cr}(G)$ é o mínimo de $\mathrm{cr}(D)$ sobre os desenhos bons de G.*

Demonstração. Mostraremos que, se D viola uma das condições, existe outro desenho D' de G com $\mathrm{cr}(D') < \mathrm{cr}(D)$. Logo um desenho ótimo não pode violar nenhuma delas.

O laço. Se a aresta e passa duas vezes pelo ponto p, a parte de e entre as duas passagens forma uma curva fechada. Removendo-a, e continua ligando suas extremidades, perdemos o cruzamento em p e não ganhamos nenhum.

Arestas adjacentes. Sejam $e = uv$ e $f = uw$ que se cruzam em p. Troque os trechos iniciais: a nova e' percorre o trecho de f de u até p e depois o trecho de e de p até v; a nova f' faz o simétrico. Afastando ligeiramente as duas curvas perto de p, o cruzamento em p desaparece. Cada cruzamento de um desses trechos com uma terceira aresta continua existindo, apenas mudou de dono; os cruzamentos entre os dois trechos trocados viram autocruzamentos, que eliminamos pelo passo anterior. O total diminui ao menos uma unidade.

Dois cruzamentos. Sejam e e f que se cruzam em p e em q. Troque os trechos de e e de f entre p e q e afaste as curvas perto de p e de q. Os cruzamentos com outras arestas são preservados em número e os dois cruzamentos p, q somem; eventuais autocruzamentos criados são eliminados como antes. O total cai ao menos duas unidades. ∎



antes: um cruzamento entre uv e uw depois: nenhum

Figura 10.2: A troca de trechos que elimina o cruzamento entre arestas adjacentes.

A partir de agora, sempre que falarmos de um desenho ótimo, podemos supor que ele é bom. Isso tem uma consequência quantitativa útil: num desenho bom, só arestas *independentes* (sem extremidade comum) se cruzam, e cada par se cruza no máximo uma vez. Portanto

$$\mathrm{cr}(G) \;\le\; \binom{m}{2} - \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2}, \tag{10.1}$$

e cada cruzamento de um desenho bom envolve exatamente quatro vértices distintos. Esse último fato é a base de todos os argumentos de contagem dos próximos capítulos.

10.4 Uma cota inferior linear

O primeiro instrumento para provar que um grafo exige muitos cruzamentos é a fórmula de Euler. Pelo Teorema 7.5, um grafo planar simples com $n \ge 3$ vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas. Precisaremos também da versão com cintura.

Lema 10.5. *Seja H um grafo planar simples com $n \ge 3$ vértices, m arestas e cintura (comprimento do menor ciclo) pelo menos $g \ge 3$. Se H contém algum ciclo, então*

$$m \le \frac{g}{g-2}\,(n-2).$$

Demonstração. Podemos supor H conexo, acrescentando arestas entre componentes sem criar ciclos (o que não altera a cintura e só aumenta m). Fixe um desenho plano de H com f faces. Como H tem ciclo, toda face é limitada por um passeio fechado que contém um ciclo, logo de comprimento pelo menos g; somando sobre as faces, cada aresta é contada duas vezes, e $2m \geq gf$. Pela fórmula de Euler (Teorema 7.3), $f = m - n + 2$, de onde $2m \geq g(m - n + 2)$, isto é, $(g-2)m \leq g(n-2)$. ∎

Para $g = 3$ obtemos $m \leq 3n - 6$; para $g = 4$ (grafos sem triângulos, em particular bipartidos), $m \leq 2n - 4$; para $g = 5$, $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$.

Teorema 10.6. *Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então*

$$\operatorname{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

Mais geralmente, se G contém ciclos e tem cintura pelo menos g, então $\operatorname{cr}(G) \geq m - \frac{g}{g-2}(n-2)$.

Demonstração. Seja D um desenho ótimo, com $k = \operatorname{cr}(G)$ cruzamentos. Para cada cruzamento, apague uma das duas arestas que passam por ele. Apagamos no máximo k arestas e o que resta é um desenho sem cruzamentos de um subgrafo gerador H com pelo menos $m-k$ arestas. Como H é planar, $m - k \leq 3n - 6$.

Na versão com cintura, H herda cintura $\geq g$. Se H tem ciclo, o Lema 10.5 dá $m-k \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$. Se H não tem ciclo, então $m - k \leq n - 1$, e basta observar que $n - 1 \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$: essa desigualdade equivale a $2n \geq g + 2$, que vale porque G contém um ciclo de comprimento pelo menos g e, portanto, $n \geq g$. ∎

A demonstração tem um defeito instrutivo: ela trata cada cruzamento como se custasse apenas uma aresta. Num grafo denso, porém, as arestas cruzam muitas outras, e apagar uma delas elimina vários cruzamentos de uma vez. Corrigir esse desperdício é exatamente o que fará o lema do cruzamento, no próximo capítulo.

10.5 Os primeiros valores exatos

Para determinar $\operatorname{cr}(G)$ exatamente é preciso combinar duas coisas: um desenho com k cruzamentos (cota superior) e uma prova de que menos de k é impossível (cota inferior).

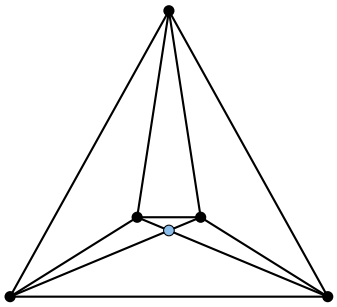
Teorema 10.7. $\operatorname{cr}(K_5) = 1$ *e* $\operatorname{cr}(K_{3,3}) = 1$.

Demonstração. Para K_5, com $n = 5$ e $m = 10$, o Teorema 10.6 dá $\operatorname{cr}(K_5) \geq 10 - 15 + 6 = 1$. Para $K_{3,3}$, que é bipartido (cintura 4), $\operatorname{cr}(K_{3,3}) \geq 9 - 2(6-2) = 1$. A Figura 10.3 mostra desenhos com um único cruzamento. ∎

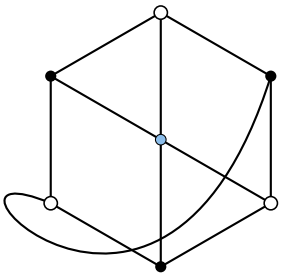
Teorema 10.8. $\operatorname{cr}(K_6) = 3$.

Demonstração. O Teorema 10.6 dá $\operatorname{cr}(K_6) \geq 15-18+6 = 3$, e a Figura 10.4 exibe um desenho (com segmentos de reta) com exatamente três cruzamentos. ∎

A cota linear deixa de ser exata logo em seguida. Para K_7 ela dá $\operatorname{cr}(K_7) \geq 21 - 21 + 6 = 6$, mas o valor verdadeiro é 9. Você verá no Capítulo 12 como um argumento de contagem, aliado a um teorema de paridade, recupera esse valor.



K_5 com 1 cruzamento



$K_{3,3}$ com 1 cruzamento

Figura 10.3: Desenhos ótimos de K_5 e de $K_{3,3}$. No desenho de $K_{3,3}$, as classes da bipartição estão em preto e em branco; o cruzamento está marcado.

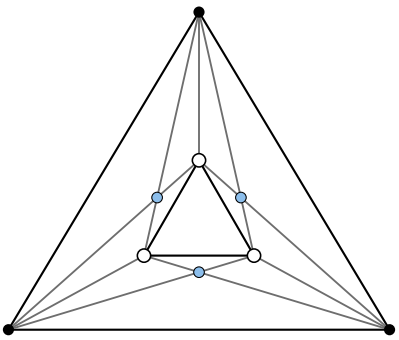


Figura 10.4: K_6 com três cruzamentos: dois triângulos encaixados com a mesma orientação. As arestas entre os triângulos estão em cinza.

10.5.1 O grafo de Petersen

O grafo de Petersen P tem 10 vértices, 15 arestas, é 3-regular e tem cintura 5. A cota de $3n-6$ é inútil aqui ($15-30+6<0$), mas a cintura salva a situação.

Teorema 10.9. $\mathrm{cr}(P)=2$.

Demonstração. Pela versão com cintura do Teorema 10.6, com $g=5$,

$$\mathrm{cr}(P)\geq 15-\frac{5}{3}(10-2)=15-\frac{40}{3}=\frac{5}{3},$$

e como $\mathrm{cr}(P)$ é inteiro, $\mathrm{cr}(P)\geq 2$. A Figura 10.5 mostra um desenho com dois cruzamentos. ∎

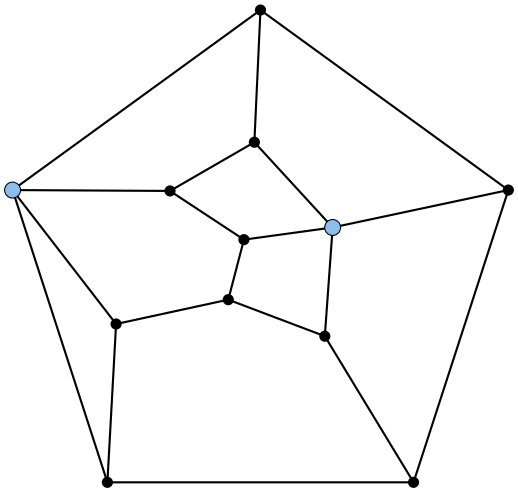


Figura 10.5: Um desenho do grafo de Petersen com exatamente dois cruzamentos (marcados em azul). Os vértices são os dez pontos pretos.

Você pode conferir na figura que todo vértice tem grau 3 e que não há ciclo de comprimento menor que 5.

10.5.2 O grafo $K_{3,n}$

O desenho de Zarankiewicz, que estudaremos em detalhe no Capítulo 12, coloca uma classe da bipartição sobre o eixo x e a outra sobre o eixo y, dividindo cada classe o mais igualmente possível entre os dois semieixos. Para $K_{3,4}$ ele produz 2 cruzamentos (Figura 10.6).

Teorema 10.10. $\mathrm{cr}(K_{3,4})=2$.

Demonstração. O grafo é bipartido com $n=7$ e $m=12$, logo $\mathrm{cr}(K_{3,4})\geq 12-2(7-2)=2$. O desenho da Figura 10.6 atinge esse valor. ∎

10.6 Os grafos principais, um a um

Nesta seção reunimos, em forma de exemplos, os valores exatos mais citados. Em cada caso há duas metades: um desenho (cota superior) e um argumento de que menos não é possível (cota inferior). Todos os desenhos retilíneos desta seção tiveram o número de cruzamentos conferido por computador, contando interseções de segmentos.

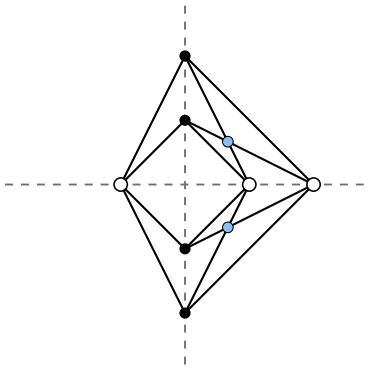


Figura 10.6: O desenho de Zarankiewicz de $K_{3,4}$: três vértices (brancos) no eixo horizontal, quatro (pretos) no vertical, e dois cruzamentos.

Exemplo 10.11 (rodas e prismas)**.** A roda W_n (um ciclo C_n e um vértice central ligado a todos os vértices do ciclo) e o prisma $C_n \,\square\, K_2$ (dois n-ágonos concêntricos com vértices correspondentes ligados) têm desenhos planos óbvios: o centro da roda dentro do ciclo; um polígono dentro do outro, no caso do prisma. Logo $\mathrm{cr}(W_n) = \mathrm{cr}(C_n \,\square\, K_2) = 0$. A cota inferior é trivial, e o exemplo serve de contraste com o próximo.

Exemplo 10.12 (K_7)**.** A cota linear dá apenas $\mathrm{cr}(K_7) \geq 6$. A contagem do Capítulo 12 melhora para 7, e o valor exato $\mathrm{cr}(K_7) = 9$ foi estabelecido por Guy: além da contagem, usa-se que todo desenho bom de K_7 tem número ímpar de cruzamentos (paridade de Kleitman, Teorema 12.9) e uma análise que exclui o valor 7. A Figura 10.7 mostra dois desenhos com 9 cruzamentos: um com segmentos e um de duas páginas, com os vértices numa reta e cada aresta como semicírculo acima ou abaixo dela.

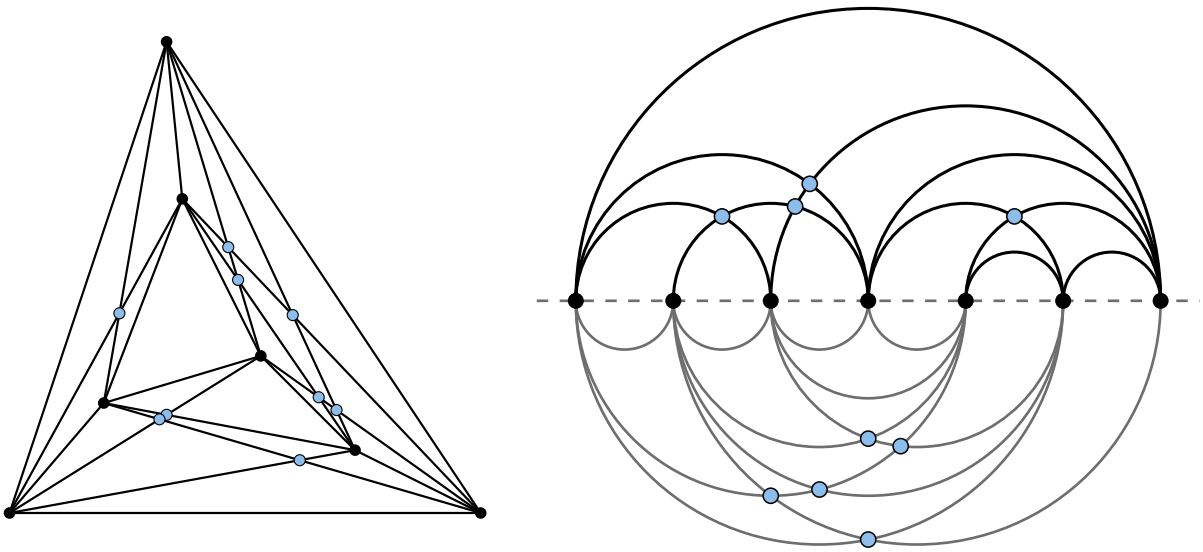


Figura 10.7: Dois desenhos de K_7 com 9 cruzamentos: retilíneo (à esquerda) e de duas páginas (à direita; arestas da página de cima em preto, da página de baixo em cinza).

Exemplo 10.13 (K_8)**.** Pela contagem, $\mathrm{cr}(K_8) \geq \frac{8}{4}\,\mathrm{cr}(K_7) = 18$. A Figura 10.8 exibe um desenho de duas páginas com exatamente 18 cruzamentos; logo $\mathrm{cr}(K_8) = 18$. Curiosamente, com segmentos de reta o mínimo sobe para 19, como veremos no Capítulo 13; a figura mostra também um desenho retilíneo com 19 cruzamentos.

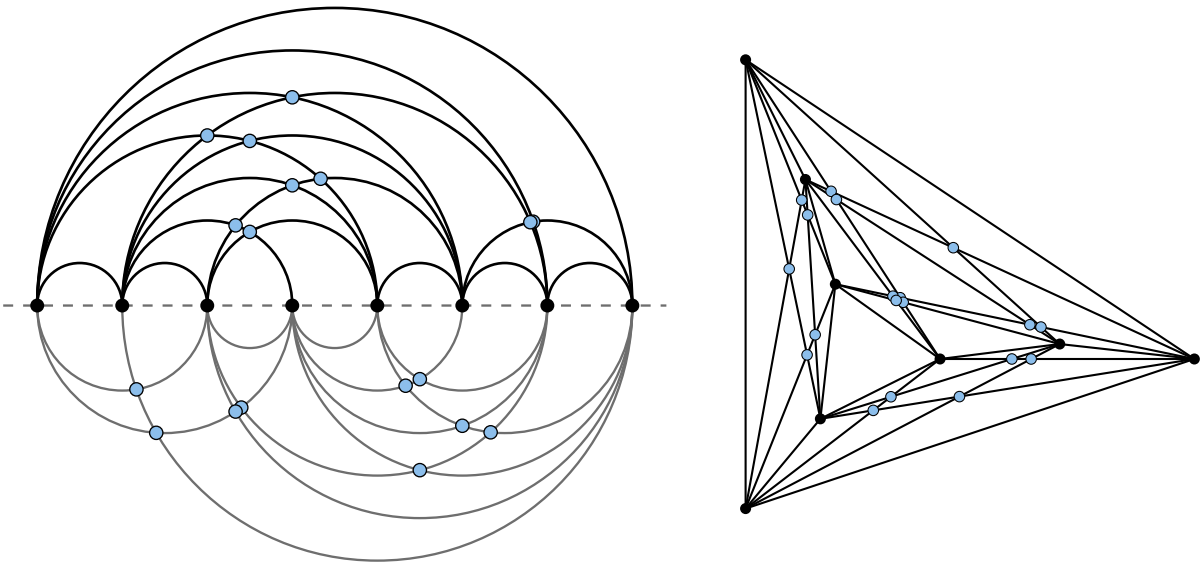


Figura 10.8: K_8: um desenho de duas páginas com 18 cruzamentos (ótimo) e um desenho retilíneo com 19 cruzamentos (ótimo entre os retilíneos).

Exemplo 10.14 ($K_{4,4}$)**.** O grafo é bipartido com $n = 8$ e $m = 16$; pela versão com cintura 4 do Teorema 10.6, $\mathrm{cr}(K_{4,4}) \geq 16 - 2 \cdot 6 = 4$. O desenho de Zarankiewicz (Figura 12.1, no Capítulo 12) tem um cruzamento por quadrante, 4 ao todo. Portanto $\mathrm{cr}(K_{4,4}) = 4$.

Exemplo 10.15 (grafo de Heawood)**.** O grafo de Heawood tem 14 vértices, 21 arestas e cintura 6. Pela versão com cintura,

$$\mathrm{cr} \;\geq\; 21 - \frac{6}{4}(14 - 2) = 21 - 18 = 3,$$

e a Figura 10.9 mostra um desenho retilíneo com 3 cruzamentos. Logo seu número de cruzamentos é 3.

Exemplo 10.16 (grafo de Möbius–Kantor)**.** O grafo de Möbius–Kantor é o grafo de Petersen generalizado $GP(8, 3)$: 16 vértices, 24 arestas, cúbico, bipartido e de cintura 6. A cota com cintura dá $\mathrm{cr} \geq 24 - \frac{6}{4} \cdot 14 = 3$. Aqui a cota não é justa: o valor exato é 4, atingido pelo desenho da Figura 10.9; a prova de que 3 cruzamentos não bastam exige uma análise de casos que omitimos.

Exemplo 10.17 (o toro discreto $C_3 \,\square\, C_3$)**.** O produto cartesiano $C_3 \,\square\, C_3$ tem 9 vértices e 18 arestas, e é 4-regular. Aqui a cota linear é inútil ($18 - 27 + 6 < 0$), e a cota inferior exige uma análise da posição relativa dos triângulos do grafo nos desenhos com poucos cruzamentos, que omitimos. Ringeisen e Beineke (1978) provaram que $\mathrm{cr}(C_3 \,\square\, C_n) = n$ para $n \geq 3$; em particular $\mathrm{cr}(C_3 \,\square\, C_3) = 3$, valor atingido pelo desenho da Figura 10.10.

Exemplo 10.18 (o hipercubo Q_4)**.** O hipercubo Q_4 tem 16 vértices e 32 arestas, é bipartido e isomorfo a $C_4 \,\square\, C_4$. A cota com cintura 4 dá apenas $\mathrm{cr}(Q_4) \geq 32 - 2 \cdot 14 = 4$. O valor exato é 8: Dean e Richter (1995) provaram $\mathrm{cr}(C_4 \,\square\, C_4) = 8$, confirmando o caso $m = n = 4$ da conjectura de Harary, Kainen e Schwenk, segundo a qual $\mathrm{cr}(C_m \,\square\, C_n) = (m - 2)n$ para $3 \leq m \leq n$. A Figura 10.10 mostra um desenho retilíneo de Q_4 com 8 cruzamentos.

Exemplo 10.19 (escadas de Möbius e Petersen generalizados)**.** A escada de Möbius M_{2k} é o ciclo C_{2k} acrescido das k diagonais longas $v_i v_{i+k}$; para $k = 4$ ela é o grafo de Wagner. Para $k \geq 3$, M_{2k} contém uma subdivisão de $K_{3,3}$ e tem um desenho com um único cruzamento (desenhe-a como uma escada com os dois trilhos fechados por arestas que se cruzam uma vez, como na resolução

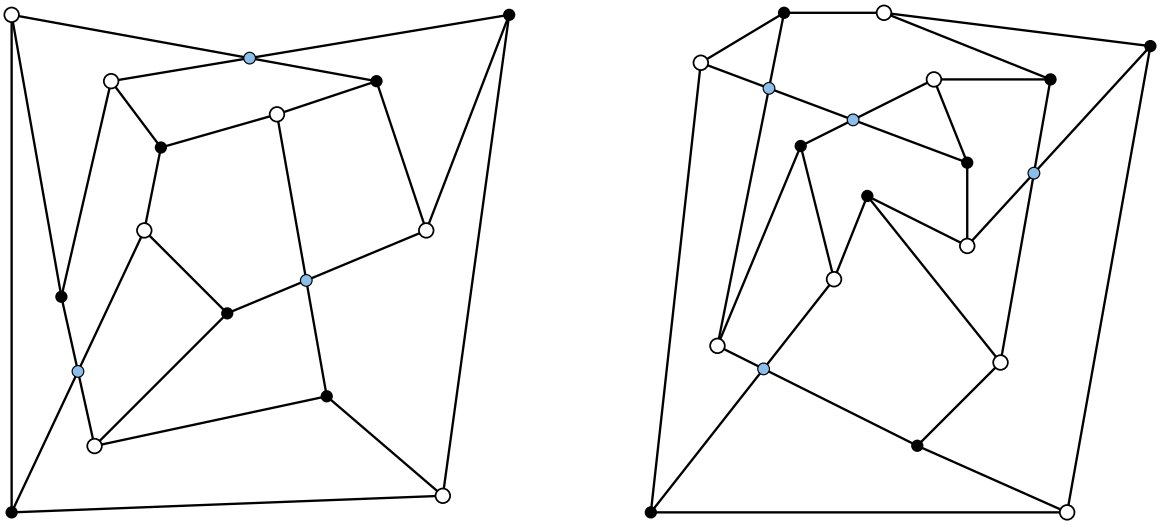


Figura 10.9: À esquerda, o grafo de Heawood com 3 cruzamentos; à direita, o grafo de Möbius–Kantor com 4. As classes da bipartição estão em preto e em branco.

do Exercício 10.3); logo $\mathrm{cr}(M_{2k}) = 1$. Em contraste, para os grafos de Petersen generalizados $GP(3k, k)$, Fiorini e Gauci (2003) mostraram que o número de cruzamentos é k para $k \geq 4$: o valor cresce linearmente com o tamanho do grafo, embora todos eles sejam cúbicos.

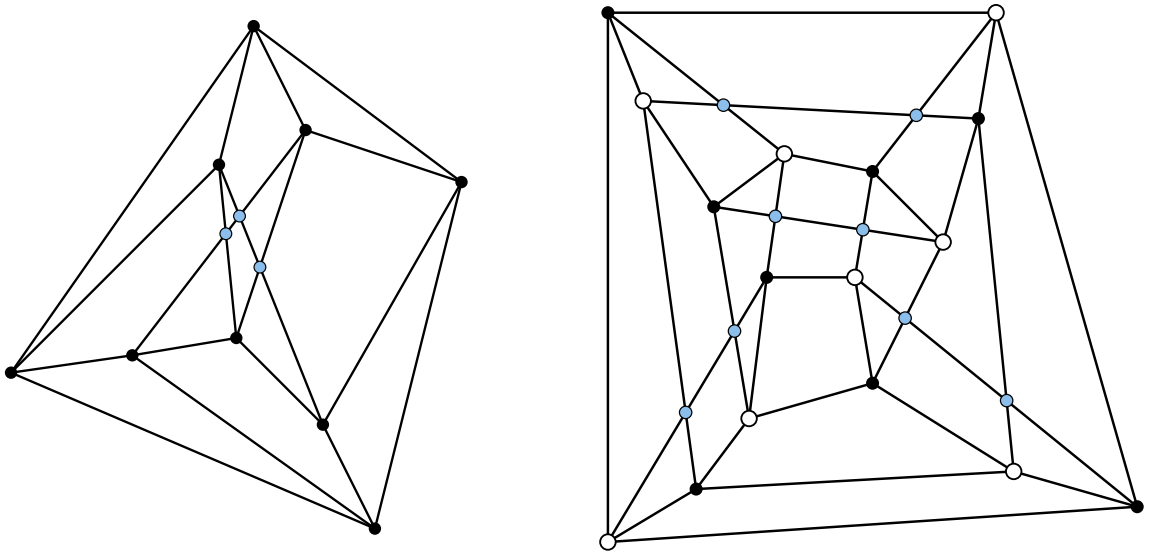


Figura 10.10: $C_3 \,\square\, C_3$ com 3 cruzamentos e o hipercubo Q_4 com 8 (classes da bipartição em preto e branco).

10.7 Componentes e blocos

Se G é a união disjunta de G_1 e G_2, então $\mathrm{cr}(G) = \mathrm{cr}(G_1) + \mathrm{cr}(G_2)$: desenhos ótimos das partes, colocados longe um do outro, dão a cota superior; e num desenho qualquer de G, os cruzamentos entre arestas de G_1 e G_2 só aumentam o total, enquanto os cruzamentos internos de cada parte são pelo menos $\mathrm{cr}(G_i)$.

Um resultado mais fino, cuja demonstração é técnica e omitimos, diz que a aditividade continua valendo quando as partes compartilham um único vértice.

Teorema 10.20 (aditividade sobre blocos)**.** *O número de cruzamentos de um grafo é a soma dos números de cruzamentos de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais e pontes).*

Para somas de dois grafos ao longo de dois vértices (as chamadas 2-somas) a aditividade já pode falhar, e as condições sob as quais ela vale foram estudadas por Leaños e Salazar (2008). Na prática, o Teorema 10.20 permite supor que o grafo estudado é 2-conexo.

10.8 Um exemplo prático: o projeto de uma placa

Considere uma pequena placa de controle em que um microcontrolador, um regulador, dois sensores e um conector precisam estar todos ligados entre si (cinco componentes, dez trilhas). Em uma face só, o grafo das ligações é K_5, e o teorema acima garante que pelo menos um jumper será necessário; a Figura 10.3 mostra que um basta. Se o projeto crescer para seis componentes mutuamente ligados, serão necessários pelo menos três jumpers, e três bastam, dispondo os componentes como na Figura 10.4. Observe que o desenho ótimo usa segmentos retos, o que é conveniente para o roteamento; no Capítulo 13 veremos que essa conveniência deixa de estar disponível em geral.

Exercícios

Exercício 10.1. Seja e uma aresta qualquer do grafo de Petersen P. Mostre que $P - e$ não é planar e que $\mathrm{cr}(P - e) = 1$.

Exercício 10.2. O grafo de Petersen generalizado $GP(n, k)$ tem $2n$ vértices,

$$u_0, \dots, u_{n-1},\ w_0, \dots, w_{n-1},$$

e as arestas u_iu_{i+1}, u_iw_i e w_iw_{i+k}, com índices módulo n. Mostre que $GP(8, 3)$ (o grafo de Möbius–Kantor) é bipartido e não tem ciclos de comprimento 4, e conclua que seu número de cruzamentos é pelo menos 3.

Exercício 10.3. O grafo de Wagner V_8 é obtido do ciclo $v_0v_1 \cdots v_7v_0$ acrescentando as quatro "diagonais longas" v_iv_{i+4}. Mostre que $\mathrm{cr}(V_8) = 1$.

Exercício 10.4. Mostre que todo desenho bom de K_n tem no máximo $3\binom{n}{4}$ cruzamentos e que todo desenho retilíneo de K_n tem no máximo $\binom{n}{4}$, valor atingido quando os vértices estão em posição convexa.

Exercício 10.5. Seja $P - v$ o grafo obtido do grafo de Petersen removendo um vértice. Mostre, usando apenas contagem de arestas, que $P - v$ não é planar.

Exercício 10.6. Mostre que $\chi(G) \le 4 + \mathrm{cr}(G)$ para todo grafo G, onde χ é o número cromático. (Use o teorema das quatro cores.)

Exercício 10.7. Mostre que a cota do Teorema 10.6 é atingida infinitas vezes: para cada inteiro $k \ge 0$, existe um grafo simples G com $\mathrm{cr}(G) = m - 3n + 6 = k$.

Exercício 10.8. Mostre que a cota linear (versão bipartida) dá apenas $\mathrm{cr}(K_{3,5}) \ge 3$, e use a contagem do Lema 12.5 a partir de $\mathrm{cr}(K_{3,4}) = 2$ para concluir que $\mathrm{cr}(K_{3,5}) = 4$.

CAPÍTULO 11

O lema do cruzamento e suas aplicações

O Teorema 10.6 diz que um grafo com m arestas e n vértices tem pelo menos $m - 3n + 6$ cruzamentos. Para um grafo com n vértices e $n^2/10$ arestas, isso dá uma cota da ordem de n^2, enquanto a verdade é da ordem de n^4. Neste capítulo você verá como um argumento probabilístico de poucas linhas transforma a cota linear numa cota cúbica, e como essa cota cúbica resolve problemas de geometria que, à primeira vista, nada têm a ver com desenhos de grafos.

11.1 O enunciado e a demonstração

Teorema 11.1 (lema do cruzamento)**.** *Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas. Se $m \geq 4n$, então*

$$\operatorname{cr}(G) \;\geq\; \frac{m^3}{64\,n^2}.$$

O resultado foi provado de forma independente por Ajtai, Chvátal, Newborn e Szemerédi (1982) e por Leighton (1983), com constantes diferentes. A demonstração que segue, que se tornou a mais conhecida, é atribuída a Chazelle, Sharir e Welzl, e aparece no livro *Proofs from THE BOOK* de Aigner e Ziegler.

Demonstração. A cota fraca. Para todo grafo simples H com n_H vértices e m_H arestas vale

$$\operatorname{cr}(H) \;\geq\; m_H - 3n_H. \tag{11.1}$$

De fato, se $n_H \geq 3$ isso decorre do Teorema 10.6; se $n_H \leq 2$, então $m_H \leq 1 < 3n_H$ e o lado direito é negativo.

O sorteio. Fixe um desenho bom D de G com $\operatorname{cr}(D) = \operatorname{cr}(G)$ (Lema 10.4) e um número $p \in (0, 1]$. Sorteie um subconjunto aleatório $S \subseteq V(G)$, incluindo cada vértice independentemente com probabilidade p. Seja $H = G[S]$ o subgrafo induzido e D_S o desenho de H herdado de D. Considere as variáveis aleatórias

$$n_S = |S|, \qquad m_S = |E(H)|, \qquad c_S = \operatorname{cr}(D_S).$$

Um vértice sobrevive com probabilidade p; uma aresta sobrevive quando suas duas extremidades sobrevivem, com probabilidade p^2; e um cruzamento sobrevive quando as duas arestas que o formam sobrevivem. Como D é bom, essas duas arestas têm quatro extremidades distintas, e o cruzamento sobrevive com probabilidade p^4. Pela linearidade da esperança,

$$\mathbb{E}[n_S] = pn, \qquad \mathbb{E}[m_S] = p^2 m, \qquad \mathbb{E}[c_S] = p^4 \operatorname{cr}(G).$$

A desigualdade em média. Para cada sorteio, $c_S \geq \operatorname{cr}(H) \geq m_S - 3n_S$, por (11.1). Tomando esperanças,

$$p^4 \operatorname{cr}(G) \;\geq\; p^2 m - 3pn, \qquad \text{isto é,} \qquad \operatorname{cr}(G) \;\geq\; \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

A escolha de p. Tome $p = 4n/m$, que está em $(0, 1]$ porque $m \geq 4n$. Então

$$\operatorname{cr}(G) \;\geq\; \frac{m^3}{16n^2} - \frac{3n\,m^3}{64n^3} = \frac{4m^3 - 3m^3}{64n^2} = \frac{m^3}{64n^2}. \qquad \blacksquare$$

Observe o mecanismo. A cota fraca é ruim para grafos densos porque cada cruzamento custa só uma aresta. Ao passar para um subgrafo aleatório esparso, as arestas diminuem como p^2, mas os cruzamentos diminuem como p^4: no subgrafo, a cota fraca já é quase justa, e o fator p^{-4} amplifica a informação de volta.

11.1.1 Exemplos de uso direto

Exemplo 11.2 (hipercubos)**.** O hipercubo Q_d tem $n = 2^d$ vértices e $m = d\,2^{d-1}$ arestas. A hipótese $m \geq 4n$ equivale a $d \geq 8$, e então

$$\operatorname{cr}(Q_d) \;\geq\; \frac{d^3\,2^{3d-3}}{64 \cdot 2^{2d}} = \frac{d^3\,2^d}{512}.$$

A cota linear daria só $\operatorname{cr}(Q_d) \geq d\,2^{d-1} - 2 \cdot 2^d + 4$, que cresce como $d\,2^d$; o lema ganha um fator da ordem de d^2. Sabe-se, por outros métodos, que $\operatorname{cr}(Q_d)$ é da ordem de 4^d, de modo que nem o lema é justo aqui: hipercubos são esparsos demais para ele.

Exemplo 11.3 (grafos densos)**.** Se G tem n vértices e pelo menos εn^2 arestas, com $\varepsilon n \geq 4$, então $\operatorname{cr}(G) \geq \varepsilon^3 n^4/64$. Para K_n isso dá $\operatorname{cr}(K_n) \geq \binom{n}{2}^3/(64n^2)$, que é assintoticamente $n^4/512$. Compare com $H(n) \sim n^4/64$: o lema captura a ordem de grandeza correta, com uma perda de um fator 8 na constante.

Exemplo 11.4 (uma rede de transporte)**.** Uma prefeitura quer ligar 40 estações por 400 trechos de trilho, todos em superfície (sem viadutos nem túneis), aceitando passagens de nível nos cruzamentos. Como $400 \geq 4 \cdot 40$, haverá pelo menos

$$\frac{400^3}{64 \cdot 40^2} = 625$$

passagens de nível, qualquer que seja o traçado. Com a constante $1/29$ de Ackerman (válida pois $400 \geq 6{,}95 \cdot 40$), a cota sobe para mais de 1379.

Exemplo 11.5 (grafos k-planares)**.** Se K_n admite um desenho em que cada aresta é cruzada no máximo k vezes, então, pelo Teorema 11.8 adiante, $\binom{n}{2} \leq \max\{4n, \sqrt{32k}\,n\}$. Para $n \geq 10$ o máximo é $\sqrt{32k}\,n$, e daí $k \geq (n-1)^2/128$: todo desenho de K_n tem alguma aresta cruzada pelo menos da ordem de n^2 vezes.

Exemplo 11.6 (grafos aleatórios)**.** No grafo aleatório $G(n, p)$, cada uma das $\binom{n}{2}$ arestas está presente com probabilidade p, independentemente. O número de arestas é concentrado em torno de $p\binom{n}{2}$; se $p \geq 12/n$, então, com probabilidade tendendo a 1, $m \geq pn^2/3 \geq 4n$, e o lema dá $\operatorname{cr}(G) \geq p^3 n^4/1728$. Por outro lado, desenhando os vértices em posição convexa, cada um dos $\binom{n}{4}$ conjuntos de quatro vértices produz um cruzamento quando as duas diagonais estão presentes, o que tem probabilidade p^2; o número esperado de cruzamentos desse desenho é $p^2\binom{n}{4}$. Assim $\operatorname{cr}(G(n,p))$ fica, com alta probabilidade, entre $c_1 p^3 n^4$ e $c_2 p^2 n^4$. Determinar a ordem exata em função de p é um problema estudado por Spencer e Tóth, entre outros.

11.1.2 A ordem de grandeza é a correta

O expoente do lema não pode ser melhorado. Dados n e m com $4n \leq m \leq \binom{n}{2}$, tome $t = \lceil 2m/n \rceil$ e um grafo G formado por cerca de n/t cópias disjuntas de K_t. Ele tem aproximadamente

$\frac{n}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{nt}{2} \approx m$ arestas, e desenhando cada cópia com os vértices em posição convexa,

$$\operatorname{cr}(G) \;\le\; \frac{n}{t}\binom{t}{4} \;\le\; \frac{n\,t^3}{24} \;\approx\; \frac{n}{24}\cdot\frac{8m^3}{n^3} = \frac{m^3}{3n^2}.$$

Portanto existe uma constante absoluta c tal que o número mínimo de cruzamentos entre os grafos com n vértices e m arestas (com $m \ge 4n$) é da ordem de $c\,m^3/n^2$. Com construções melhores, Pach e Tóth (1997) mostraram que a melhor constante possível no lema é no máximo 0,09.

11.2 A corrida pela constante

A constante 1/64 não é a melhor possível, e melhorá-la virou uma pequena tradição. O caminho é sempre o mesmo: substituir a cota fraca $\operatorname{cr} \ge m - 3n$ por uma cota linear mais forte, do tipo $\operatorname{cr} \ge \alpha m - \beta n$, e repetir o sorteio (o Exercício 11.6 mostra como). As cotas lineares mais fortes, por sua vez, vêm de limites para o número de arestas de grafos k-planares.

Definição 11.7. Um grafo é *k-planar* se admite um desenho em que cada aresta é cruzada no máximo k vezes.

Os 0-planares são os planares, com no máximo $3n - 6$ arestas. Para valores pequenos de k são conhecidas cotas justas a menos de constantes aditivas:

k	número máximo de arestas	referência
0	$3n - 6$	fórmula de Euler
1	$4n - 8$	Bodendiek, Schumacher e Wagner (1983); Pach e Tóth (1997)
2	$5n - 10$	Pach e Tóth (1997)
3	$5{,}5n - 11$	Pach, Radoičić, Tardos e Tóth (2006)
4	$6n - 12$	Ackerman (2019)

Cada linha da tabela, combinada com a anterior, gera uma cota linear melhor para o número de cruzamentos. A cronologia da constante c em $\operatorname{cr}(G) \ge c\,m^3/n^2$ (válida a partir de um múltiplo de n que depende da versão) é:

constante	hipótese	autores
1/100	$m \ge 4n$	Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi (1982)
1/64	$m \ge 4n$	Chazelle, Sharir, Welzl (demonstração acima)
1/33,75	$m \ge 7{,}5n$	Pach e Tóth (1997)
1/31,1	m maior que um múltiplo fixo de n	Pach, Radoičić, Tardos, Tóth (2006)
1/29	$m \ge 6{,}95n$	Ackerman (2019)
1/27,48	$m > 6{,}77n$	Büngener e Kaufmann (2024)

O trabalho de Büngener e Kaufmann (apresentado no simpósio Graph Drawing de 2024 e publicado no *Journal of Graph Algorithms and Applications*) refina a técnica: em vez de usar apenas a densidade máxima dos grafos 2- e 3-planares, eles mostram que esses grafos têm bem menos arestas quando certas configurações locais, presentes em todos os exemplos extremais, são proibidas. A distância entre 1/27,48 e 0,09 mostra que ainda há espaço para trabalho.

Problema em aberto

Determinar a melhor constante c tal que $\mathrm{cr}(G) \geq (c - o(1))\, m^3/n^2$ para grafos com n vértices e m arestas, quando $n \ll m \ll n^2$. Pach, Spencer e Tóth mostraram que essa constante (a *constante do intervalo médio*) existe como limite; sabe-se apenas que ela está entre os valores da tabela e 0,09.

11.2.1 A densidade dos grafos k-planares

O lema do cruzamento também funciona no sentido inverso, limitando a densidade de grafos k-planares para k grande.

Teorema 11.8. *Todo grafo k-planar simples com n vértices tem no máximo* $\max\{4n,\ \sqrt{32k}\,n\}$ *arestas.*

Demonstração. Num desenho em que cada aresta é cruzada no máximo k vezes, o número de cruzamentos é no máximo $km/2$, pois cada cruzamento é contado em duas arestas. Se $m \geq 4n$, o lema dá $m^3/(64n^2) \leq \mathrm{cr}(G) \leq km/2$, de onde $m^2 \leq 32kn^2$. ∎

A melhor constante conhecida para k grande é da ordem de $3{,}81\sqrt{k}$, obtida justamente a partir das versões melhoradas do lema; a ordem $\sqrt{k}\,n$ é a correta.

11.2.2 Grafos sem quadriláteros

Quando o grafo exclui algum subgrafo, os cruzamentos crescem mais depressa. Pelo teorema de Kővári–Sós–Turán (Teorema 6.8), um grafo com n vértices sem ciclo C_4 tem $O(n^{3/2})$ arestas. Pach, Spencer e Tóth (2000) mostraram que, para grafos sem C_4 e com m suficientemente grande em relação a n,

$$\mathrm{cr}(G) \;\geq\; c\,\frac{m^4}{n^3}$$

para uma constante absoluta $c > 0$. A ideia é que, num grafo extremal sem C_4, a densidade de arestas dos subgrafos induzidos é limitada por KST em vez de pela fórmula de Euler; combinando a cota de densidade com um teorema de separadores para desenhos, o expoente do numerador sobe de 3 para 4. O mesmo vale, com outros expoentes, para qualquer família de grafos cujo número extremal de arestas seja $O(n^{1+\alpha})$.

11.3 O teorema de Szemerédi–Trotter

Aqui começam as aplicações à geometria. Dado um conjunto P de pontos e um conjunto L de retas no plano, uma *incidência* é um par $(p, \ell) \in P \times L$ com $p \in \ell$. Denote por $I(P, L)$ o número de incidências.

Uma conta ingênua dá $I \leq |P||L|$. Uma conta melhor usa que duas retas se encontram em no máximo um ponto, e daí sai $I = O(|P|\,|L|^{1/2} + |L|)$. Szemerédi e Trotter (1983) provaram a cota ótima, com uma demonstração longa; em 1997, Székely deu a demonstração de um parágrafo que apresentamos.

Teorema 11.9 (Szemerédi–Trotter)**.** *Para todo conjunto P de n pontos e todo conjunto L de ℓ retas no plano,*

$$I(P, L) \;\leq\; 2\sqrt[3]{4}\,(n\ell)^{2/3} + 4n + \ell.$$

Demonstração. Podemos descartar as retas sem pontos de P. Construa um grafo G cujos vértices são os pontos de P: em cada reta de L que contém $k \geq 1$ pontos, ligue por uma aresta cada par de pontos consecutivos ao longo da reta. Essa reta contribui com $k-1$ arestas, logo

$$m = |E(G)| = \sum_{\text{retas}} (k-1) = I - \ell.$$

O grafo é simples, porque dois pontos determinam uma única reta. Desenhando cada aresta como o segmento correspondente, obtemos um desenho de G no qual dois segmentos só se cruzam se estão em retas diferentes, e duas retas se cortam no máximo uma vez. Assim

$$\operatorname{cr}(G) \;\leq\; \binom{\ell}{2} \;<\; \frac{\ell^2}{2}.$$

Se $m < 4n$, então $I < 4n + \ell$ e terminamos. Caso contrário, o lema do cruzamento dá

$$\frac{m^3}{64n^2} \;\leq\; \operatorname{cr}(G) \;<\; \frac{\ell^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad m^3 < 32\,n^2\ell^2 \quad\Longrightarrow\quad m < \sqrt[3]{32}\,(n\ell)^{2/3} = 2\sqrt[3]{4}\,(n\ell)^{2/3},$$

e $I = m + \ell$ fornece a cota. ∎

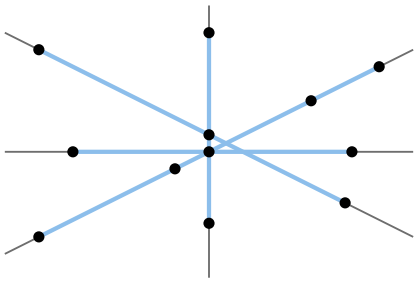


Figura 11.1: O grafo de Székely: em cada reta, pontos consecutivos são ligados (arestas azuis sobre as retas cinza). Cruzamentos só ocorrem onde duas retas se cortam.

Exemplo 11.10 (retas ricas numa grade)**.** Considere os $n = t^2$ pontos da grade $\{1, \dots, t\}^2$. Quantas retas contêm pelo menos k desses pontos? Se L_k é o conjunto delas, então $I(P, L_k) \geq k|L_k|$, e o Teorema 11.9 mostra que $|L_k| = O(n^2/k^3 + n/k)$ (Exercício 11.3). Para $k = t$ isso dá $O(t)$ retas, o que é correto: as retas com t pontos são as t linhas, as t colunas e as 2 diagonais.

A cota é justa a menos de constante: o Exercício 11.4 pede uma configuração em grade com n pontos, n retas e da ordem de $n^{4/3}$ incidências.

11.3.1 O teorema de Beck

Uma consequência de Szemerédi–Trotter é uma dicotomia: ou muitos pontos estão numa mesma reta, ou os pontos determinam muitas retas.

Teorema 11.11 (Beck, 1983)**.** *Existem constantes absolutas $C, c > 0$ tais que, para todo conjunto P de n pontos no plano, vale uma das alternativas: alguma reta contém pelo menos n/C pontos de P, ou P determina pelo menos $c\,n^2$ retas distintas.*

Demonstração. Toda reta que contém pelo menos dois pontos de P *cobre* os pares de pontos nela contidos, e cada um dos $\binom{n}{2}$ pares é coberto por exatamente uma reta. Pelo Exercício 11.3, existe uma constante A tal que o número de retas com pelo menos k pontos é no máximo $A(n^2/k^3 + n/k)$. Agrupe as retas com mais de K pontos em faixas diádicas: na faixa j estão as

retas com k pontos, $2^j \le k < 2^{j+1}$, e cada uma cobre menos de 2^{2j+2} pares. Os pares cobertos pela faixa j são no máximo

$$A\left(\frac{n^2}{2^{3j}} + \frac{n}{2^j}\right) 2^{2j+2} = 4A\left(\frac{n^2}{2^j} + n\,2^j\right).$$

Suponha que nenhuma reta contenha n/C pontos, de modo que só aparecem faixas com $K \le 2^j < n/C$. Somando as progressões geométricas, os pares cobertos por retas com pelo menos K pontos são no máximo $8A\left(\frac{n^2}{K} + \frac{n^2}{C}\right)$. Escolhendo K e C grandes o suficiente (dependendo só de A), isso fica abaixo de $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ para n grande. Então pelo menos metade dos pares é coberta por retas com menos de K pontos, cada uma cobrindo menos de K^2 pares, e o número dessas retas é pelo menos $\frac{1}{2}\binom{n}{2}/K^2$, que é da ordem de n^2. ∎

Exemplo 11.12. Para os $n = t^2$ pontos da grade $\{1, \dots, t\}^2$, nenhuma reta contém mais de $t = \sqrt{n}$ pontos, e de fato a grade determina da ordem de n^2 retas. Para $n-1$ pontos numa reta e mais um ponto fora dela, a primeira alternativa vale, e o número de retas determinadas é apenas n. O teorema diz que não existe configuração "intermediária" que escape das duas alternativas.

11.4 Distâncias unitárias

Em 1946, Erdős perguntou: quantos pares de pontos, entre n pontos do plano, podem estar a distância exatamente 1? Em linguagem de grafos, qual o número máximo $u(n)$ de arestas de um *grafo de distância unitária* com n vértices? Erdős mostrou que $u(n) \ge n^{1+c/\log\log n}$ usando uma grade convenientemente escalada, e conjecturou que esse é o comportamento verdadeiro. A melhor cota superior conhecida até hoje é a de Spencer, Szemerédi e Trotter (1984), e de novo o caminho mais curto até ela passa pelo lema do cruzamento.

Teorema 11.13 (Spencer–Szemerédi–Trotter)**.** *Entre n pontos do plano, no máximo $4n^{4/3} + 5n$ pares estão a distância 1. Em particular, $u(n) = O(n^{4/3})$.*

Demonstração. Seja P o conjunto de pontos e u o número de pares a distância 1. Trace o círculo unitário C_p centrado em cada $p \in P$. O número de incidências entre pontos e círculos é $2u$, pois cada par $\{p, q\}$ a distância 1 dá as incidências $q \in C_p$ e $p \in C_q$.

Descarte os círculos com no máximo dois pontos de P; eles respondem por no máximo $2n$ incidências. Em cada círculo restante, com $k \ge 3$ pontos, ligue pontos consecutivos ao longo do círculo por arcos: são k arcos. Obtemos um multigrafo com pelo menos $2u - 2n$ arestas. Dois pontos distintos estão juntos em no máximo dois círculos unitários (os centros possíveis são as duas interseções dos círculos unitários centrados nos dois pontos), de modo que cada par aparece como aresta no máximo duas vezes. Mantendo um único arco para cada par, ficamos com um grafo simples G com

$$m \;\ge\; \frac{2u - 2n}{2} = u - n$$

arestas. Dois círculos distintos se cortam em no máximo dois pontos, logo o desenho de G pelos arcos tem no máximo $2\binom{n}{2} < n^2$ pares de arcos que se cruzam, e $\mathrm{cr}(G) < n^2$.

Se $m < 4n$, então $u < 5n$. Caso contrário, o lema do cruzamento dá $m^3/(64n^2) < n^2$, isto é, $m < 4n^{4/3}$, e portanto $u \le m + n < 4n^{4/3} + n$. ∎

Exemplo 11.14 (uma configuração com muitas distâncias unitárias)**.** Na grade $\{0, 1, \dots, t\}^2$, com $n = (t+1)^2$ pontos, os pares a distância 1 são os vizinhos horizontais e verticais: $2t(t+1)$ pares, cerca de $2n$. Reescalando a grade de modo que a distância repetida seja $\sqrt{r}$ para um

inteiro r com muitas representações como soma de dois quadrados, Erdős obteve $n^{1+c/\log\log n}$ pares. O Teorema 11.13 diz que nenhuma configuração passa de $4n^{4/3}+5n$.

Ligação com grafos de distância unitária

O teorema diz que um grafo de distância unitária com n vértices tem no máximo da ordem de $n^{4/3}$ arestas. Para quem estuda esses grafos, isso fornece um critério imediato de não realizabilidade: um grafo denso demais não pode ser desenhado no plano com todas as arestas de comprimento 1. A distância entre $n^{1+c/\log\log n}$ e $n^{4/3}$ é um dos problemas abertos mais conhecidos da geometria combinatória, e nenhuma melhoria no expoente $4/3$ foi obtida em mais de quarenta anos.

Problema das distâncias unitárias de Erdős

Mostrar que $u(n) = O(n^{1+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$, ou ao menos reduzir o expoente $4/3$.

11.5 Distâncias distintas

O problema irmão pergunta pelo número mínimo $g(n)$ de distâncias *distintas* determinadas por n pontos. Erdős mostrou que uma grade $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ determina apenas $O(n/\sqrt{\log n})$ distâncias distintas. Usando o lema do cruzamento de modo semelhante ao que fizemos, Székely (1997) provou $g(n)=\Omega(n^{4/5})$. Depois de uma série de melhorias no expoente, Guth e Katz (2015), usando o método polinomial e geometria algébrica em $\mathbb{R}^3$, provaram que

$$g(n) = \Omega\!\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

o que resolve o problema a menos de um fator $\sqrt{\log n}$.

11.6 Somas e produtos

A última aplicação é aritmética. Para um conjunto finito A de números reais, defina

$$A+A=\{a+b : a,b\in A\}, \qquad A\cdot A=\{ab : a,b\in A\}.$$

Se A é uma progressão aritmética, $|A+A|=2|A|-1$ é pequeno, mas $A\cdot A$ é grande; se A é uma progressão geométrica, ocorre o contrário. Erdős e Szemerédi conjecturaram que nenhum conjunto consegue ter as duas operações pequenas: $\max\{|A+A|,|A\cdot A|\}\geq |A|^{2-\varepsilon}$. Elekes (1997) obteve o expoente $5/4$ com o teorema de Szemerédi–Trotter.

Teorema 11.15 (Elekes). *Se A é um conjunto de $N\geq 4$ números reais não nulos, então*

$$|A+A|\cdot|A\cdot A| \;\geq\; \frac{N^{5/2}}{12\sqrt{6}}, \qquad \textit{e portanto} \qquad \max\{|A+A|,|A\cdot A|\} \;\geq\; \frac{N^{5/4}}{\sqrt{12\sqrt{6}}}.$$

Demonstração. Considere o conjunto de pontos $P=(A+A)\times(A\cdot A)$, com $|P|=|A+A|\cdot|A\cdot A|$, e o conjunto de retas

$$L=\{\ell_{a,b}:\ y=a(x-b)\ \text{ com } a,b\in A\}.$$

As retas são distintas, porque a é a inclinação e $-ab$ o coeficiente linear, e $a\neq 0$; logo $|L|=N^2$. Para cada $c\in A$, o ponto $(b+c,\,ac)$ pertence a P e está em $\ell_{a,b}$. Cada reta contém, assim, pelo menos N pontos de P, e $I(P,L)\geq N^3$.

Pelo Teorema 11.9, $N^3 \le 2\sqrt[3]{4}(|P|N^2)^{2/3} + 4|P| + N^2$. Uma das três parcelas é pelo menos $N^3/3$. Como $N \ge 4$, a última não é ($N^2 < N^3/3$). Se $4|P| \ge N^3/3$, então $|P| \ge N^3/12 \ge N^{5/2}/12$. Se $2\sqrt[3]{4}(|P|N^2)^{2/3} \ge N^3/3$, então

$$|P|N^2 \;\ge\; \left(\frac{N^3}{6\sqrt[3]{4}}\right)^{3/2} = \frac{N^{9/2}}{6^{3/2}\cdot 2} = \frac{N^{9/2}}{12\sqrt{6}},$$

e $|P| \ge N^{5/2}/(12\sqrt{6})$. Em qualquer caso vale a primeira desigualdade; a segunda segue porque o máximo de dois números é pelo menos a raiz quadrada do produto. ∎

Exemplo 11.16. Para $A = \{1, 2, \dots, N\}$, temos $|A + A| = 2N - 1$, enquanto $|A \cdot A|$ é bem maior que $N^{5/4}$ (Erdős mostrou que é $N^{2-o(1)}$). Para $A = \{2, 4, \dots, 2^N\}$, ocorre o oposto: $|A \cdot A| = 2N - 1$, mas as somas $2^i + 2^j$ com $i \le j$ são todas distintas, e $|A + A| = \binom{N+1}{2}$. Em ambos os casos o produto $|A + A| \cdot |A \cdot A|$ é muito maior que $N^{5/2}$, como garante o teorema.

Solymosi (2009) elevou o expoente para $4/3$ a menos de fatores logarítmicos, com um argumento elementar sobre inclinações, e trabalhos posteriores, como o de Rudnev e Stevens (2020), passaram ligeiramente de $4/3$. A conjectura de Erdős–Szemerédi continua aberta.

11.7 Bissecção, leiautes e circuitos

A motivação original de Leighton era o projeto de circuitos. A *largura de bissecção* $b(G)$ é o menor número de arestas que é preciso cortar para dividir os vértices em duas partes de tamanhos quase iguais (nenhuma com mais de $2n/3$ vértices). Num desenho com poucos cruzamentos, o teorema dos separadores planares de Lipton e Tarjan, aplicado ao grafo planarizado (em que cada cruzamento vira um vértice), produz uma bissecção pequena. Desse raciocínio sai o seguinte resultado de Pach, Shahrokhi e Szegedy (1996), na linha de Leighton:

Teorema 11.17. *Existe uma constante absoluta C tal que, para todo grafo G,*

$$b(G)^2 \;\le\; C\left(\operatorname{cr}(G) + \sum_{v \in V(G)} d(v)^2\right).$$

Lido ao contrário, o teorema diz que grafos difíceis de cortar ao meio, como as redes de interconexão de computadores paralelos (hipercubos, redes borboleta, expansores), exigem muitos cruzamentos e, consequentemente, muita área de silício. Leighton usou exatamente essa cadeia de desigualdades para provar cotas inferiores de área para leiautes VLSI.

Exercícios

Exercício 11.1. Mostre que a hipótese $m \ge 4n$ (ou alguma hipótese desse tipo) é indispensável no lema do cruzamento: exiba, para infinitos n, grafos com $m = 3n - 6$ e $\operatorname{cr}(G) = 0$, e explique por que a desigualdade $\operatorname{cr}(G) \ge m^3/(64n^2)$ falha para eles.

Exercício 11.2. Use o lema do cruzamento para obter uma cota inferior para $\operatorname{cr}(K_n)$ da forma $c\,n^4$ e compare com $\binom{n}{4}/5$, que é a cota obtida contando cópias de K_5 (Exercício 12.1).

Exercício 11.3. Seja P um conjunto de n pontos e $k \ge 2$. Uma reta é *k-rica* se contém pelo menos k pontos de P. Mostre que o número de retas k-ricas é $O\!\left(\dfrac{n^2}{k^3} + \dfrac{n}{k}\right)$.

Exercício 11.4. Para um inteiro $t \geq 1$, considere os pontos $P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x \leq t,\ 1 \leq y \leq 2t^2\}$ e as retas $y = ax + b$ com $a \in \{1, \ldots, t\}$ e $b \in \{1, \ldots, t^2\}$. Mostre que cada reta contém exatamente t pontos de P e conclua que o expoente $2/3$ no Teorema 11.9 não pode ser diminuído.

Exercício 11.5. Admita que todo grafo 1-planar simples com $n \geq 3$ vértices tem no máximo $4n - 8$ arestas. Prove que todo grafo simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas satisfaz

$$\operatorname{cr}(G) \ \geq \ 2m - 7n + 14.$$

Exercício 11.6. Repita a demonstração probabilística do lema do cruzamento usando a cota do exercício anterior no lugar de $\operatorname{cr} \geq m - 3n$ e mostre que, para $m \geq \frac{21}{4}n$,

$$\operatorname{cr}(G) \ \geq \ \frac{32}{1323} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

Exercício 11.7. Seja P um conjunto de $n \geq 3$ pontos do plano e δ a menor distância entre dois pontos de P. Mostre que no máximo $3n - 6$ pares de pontos estão a distância exatamente δ. (O grafo desses pares é um *grafo de moedas*.)

Exercício 11.8. Prove que todo grafo simples com n vértices e $\operatorname{cr}(G) \leq n$ tem no máximo $4n$ arestas.

CAPÍTULO 12

Grafos completos e bipartidos completos

Dois problemas concentram boa parte da história do número de cruzamentos: o da olaria de Turán, que pede $\mathrm{cr}(K_{m,n})$, e o de Hill, que pede $\mathrm{cr}(K_n)$. Ambos têm conjecturas precisas, propostas há mais de sessenta anos, e ambos resistem até hoje. Este capítulo mostra o que se sabe: as construções que dão as cotas superiores, as técnicas de contagem que transportam valores pequenos para valores grandes, e a sequência de resultados que, nos últimos vinte anos, aproximaram as cotas inferiores das conjecturas.

12.1 O desenho de Zarankiewicz

Coloque os m vértices de uma classe sobre o eixo x e os n vértices da outra sobre o eixo y, todos fora da origem, distribuindo cada classe o mais igualmente possível entre os dois semieixos: $\lceil m/2 \rceil$ à direita e $\lfloor m/2 \rfloor$ à esquerda, $\lceil n/2 \rceil$ acima e $\lfloor n/2 \rfloor$ abaixo. Ligue cada vértice do eixo x a cada vértice do eixo y por um segmento.

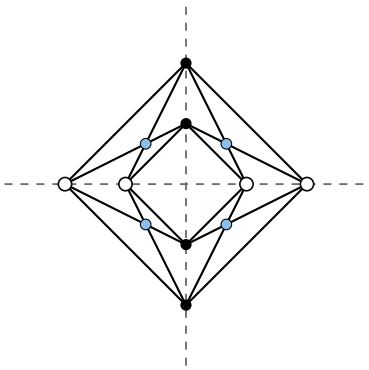


Figura 12.1: O desenho de Zarankiewicz de $K_{4,4}$, com $Z(4,4) = 4$ cruzamentos, um em cada quadrante.

Proposição 12.1. *O desenho de Zarankiewicz de $K_{m,n}$ tem exatamente*

$$Z(m,n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

cruzamentos. Portanto $\mathrm{cr}(K_{m,n}) \leq Z(m,n)$.

Demonstração. Dois segmentos que partem de semieixos x opostos, ou que chegam a semieixos y opostos, estão em quadrantes diferentes e não se cruzam. Considere então dois vértices $x_1 < x_2$ no semieixo positivo e dois vértices $0 < y_1 < y_2$ no semieixo positivo (os outros quadrantes são simétricos). Das duas maneiras de emparelhá-los, os segmentos x_1y_1 e x_2y_2 não se cruzam (um triângulo contém o outro) e os segmentos x_1y_2 e x_2y_1 se cruzam exatamente uma vez. Logo cada escolha de um par de vértices num mesmo semieixo x e de um par num mesmo semieixo y gera

exatamente um cruzamento. O número de pares de vértices de x no mesmo semieixo é

$$\binom{\lceil m/2 \rceil}{2} + \binom{\lfloor m/2 \rfloor}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor,$$

como você pode conferir separando os casos m par e m ímpar; o mesmo vale para n, e o produto é $Z(m,n)$. ■

Exemplo 12.2 (os primeiros valores de Z)**.** Para $K_{5,5}$, cada classe fica com 3 vértices de um lado e 2 do outro, e há $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 4$ pares no mesmo semieixo; logo $Z(5,5) = 4 \cdot 4 = 16$. Da mesma forma, $Z(6,6) = 6 \cdot 6 = 36$, $Z(7,7) = 9 \cdot 9 = 81$ e $Z(7,11) = 9 \cdot 25 = 225$. A Figura 12.2 mostra o desenho de $K_{5,5}$; você pode contar os 16 cruzamentos, 9 no quadrante em que cada eixo tem três vértices, $3+3$ nos dois quadrantes mistos e 1 no quadrante restante.

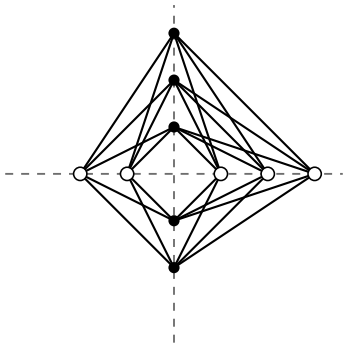


Figura 12.2: O desenho de Zarankiewicz de $K_{5,5}$, com $Z(5,5) = 16$ cruzamentos.

12.1.1 Por que dividir ao meio

A escolha de dividir cada classe igualmente entre os dois semieixos não é arbitrária.

Proposição 12.3. *Entre os desenhos de $K_{m,n}$ com os vértices de uma classe no eixo x, os da outra no eixo y (fora da origem) e arestas retas, o número mínimo de cruzamentos é $Z(m,n)$, atingido quando as classes são divididas o mais igualmente possível.*

Demonstração. Se a vértices da primeira classe estão no semieixo positivo e $m-a$ no negativo, e b e $n-b$ na segunda, a demonstração da Proposição 12.1 mostra que o desenho tem

$$\left[\binom{a}{2} + \binom{m-a}{2}\right]\left[\binom{b}{2} + \binom{n-b}{2}\right]$$

cruzamentos. Os dois fatores são independentes, e basta minimizar cada um. A função $g(a) = \binom{a}{2} + \binom{m-a}{2}$ satisfaz $g(a+1) - g(a) = a - (m-a-1) = 2a+1-m$, que é negativo enquanto $a < \frac{m-1}{2}$ e positivo depois. Logo g é mínima em $a = \lfloor m/2 \rfloor$ (ou $\lceil m/2 \rceil$), onde vale $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$. ■

A proposição não prova a conjectura, é claro: ela compara apenas desenhos de um tipo muito particular. O que impressiona é que, em mais de setenta anos, ninguém encontrou um desenho de $K_{m,n}$, de tipo algum, com menos cruzamentos.

Conjectura 12.4 (Zarankiewicz, 1954)**.** *Para todos $m, n \geq 1$, $\mathrm{cr}(K_{m,n}) = Z(m,n)$.*

A queda do teorema de Zarankiewicz

Zarankiewicz publicou em 1954 uma demonstração da igualdade, e o resultado foi citado como teorema por mais de uma década. Paul Kainen e Gerhard Ringel encontraram, independentemente, uma falha no argumento; Richard Guy contou a história no artigo "The decline and fall of Zarankiewicz's theorem" (1969). Desde então o enunciado é uma conjectura. A cota superior da Proposição 12.1 é tudo o que sobrou da demonstração original.

12.2 A técnica de contagem

O instrumento mais simples, e ainda o mais usado, para transportar uma cota inferior de um grafo pequeno para um grafo maior é a contagem dupla de cruzamentos em subdesenhos.

Lema 12.5. *Para $n \geq 3$,*

$$\operatorname{cr}(K_{m,n}) \;\geq\; \frac{n}{n-2}\,\operatorname{cr}(K_{m,n-1}).$$

Equivalentemente, a sequência $\operatorname{cr}(K_{m,n})/\binom{n}{2}$ é não decrescente em n.

Demonstração. Seja D um desenho bom ótimo de $K_{m,n}$ com classes A ($|A| = m$) e B ($|B| = n$). Num desenho bom de um grafo bipartido, cada cruzamento envolve duas arestas independentes, logo dois vértices de A e dois de B. Para cada $b \in B$, apagar b produz um desenho $D - b$ de $K_{m,n-1}$. Um cruzamento de D sobrevive em $D - b$ exatamente quando b não é um dos seus dois vértices de B, ou seja, para $n-2$ escolhas de b. Assim

$$\sum_{b \in B} \operatorname{cr}(D - b) = (n-2)\operatorname{cr}(D),$$

e como cada parcela é pelo menos $\operatorname{cr}(K_{m,n-1})$, obtemos $(n-2)\operatorname{cr}(K_{m,n}) \geq n\operatorname{cr}(K_{m,n-1})$. A forma equivalente vem de $\binom{n}{2} = \frac{n}{n-2}\binom{n-1}{2}$. ∎

O lema vale, é claro, também na outra classe. Ele já basta para mostrar que a conjectura de Zarankiewicz, no caso par, é consequência do caso ímpar imediatamente anterior: para $n = 2k$,

$$\frac{Z(m,2k)}{Z(m,2k-1)} = \frac{k(k-1)}{(k-1)^2} = \frac{k}{k-1} = \frac{2k}{2k-2},$$

que é exatamente o fator do Lema 12.5. Logo, se $\operatorname{cr}(K_{m,2k-1}) = Z(m,2k-1)$, então $\operatorname{cr}(K_{m,2k}) \geq Z(m,2k)$, e a igualdade segue da Proposição 12.1.

12.2.1 O caso $K_{3,n}$

Para três fornos, a contagem resolve tudo, sem nenhuma ferramenta adicional.

Teorema 12.6. *Para todo $n \geq 1$, $\operatorname{cr}(K_{3,n}) = Z(3,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.*

Demonstração. A cota superior é a Proposição 12.1. Para a inferior, usamos indução em n. Para $n \leq 2$, $Z(3,n) = 0$; para $n = 3$, $\operatorname{cr}(K_{3,3}) = 1 = Z(3,3)$. O caso $n = 2k$ par segue do caso $2k-1$ pelo argumento que acabamos de ver. Para $n = 2k+1$ ímpar ($k \geq 2$), o Lema 12.5 e a hipótese de indução dão

$$\operatorname{cr}(K_{3,2k+1}) \;\geq\; \frac{2k+1}{2k-1}\,k(k-1) = k^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2k-1)} \;>\; k^2 - 1.$$

Como $\operatorname{cr}(K_{3,2k+1})$ é inteiro, $\operatorname{cr}(K_{3,2k+1}) \geq k^2 = Z(3,2k+1)$. ∎

Exemplo 12.7. A indução do teorema, passo a passo: $\mathrm{cr}(K_{3,4}) \geq \frac{4}{2}\cdot 1 = 2$; $\mathrm{cr}(K_{3,5}) \geq \frac{5}{3}\cdot 2$, logo pelo menos 4; $\mathrm{cr}(K_{3,6}) \geq \frac{6}{4}\cdot 4 = 6$; $\mathrm{cr}(K_{3,7}) \geq \frac{7}{5}\cdot 6$, logo pelo menos 9. Esses são exatamente $Z(3,4)=2$, $Z(3,5)=4$, $Z(3,6)=6$ e $Z(3,7)=9$. Observe que nos passos ímpares a contagem sozinha não dá um inteiro, e é o arredondamento para cima que fecha a conta.

Aplicando o lema agora na classe de tamanho 3, com $m=4$, obtém-se $\mathrm{cr}(K_{4,n}) \geq 2\,\mathrm{cr}(K_{3,n}) = Z(4,n)$ (Exercício 12.5). Para $m=5$, porém, a contagem a partir de $K_{4,n}$ dá apenas o fator $5/3$, e $Z(5,n)/Z(4,n)=2$: aqui é preciso uma ideia nova.

12.3 Kleitman e o que veio depois

Teorema 12.8 (Kleitman, 1970). *A conjectura de Zarankiewicz vale sempre que* $\min\{m,n\} \leq 6$.

Pela observação sobre o caso par, basta tratar $m=5$. A demonstração de Kleitman é uma análise refinada dos desenhos de $K_{5,n}$, apoiada num fato notável sobre paridade.

Teorema 12.9 (paridade de Kleitman). *Se m e n são ímpares, todos os desenhos bons de $K_{m,n}$ têm números de cruzamentos com a mesma paridade (a de $Z(m,n)$). Se n é ímpar, todos os desenhos bons de K_n têm números de cruzamentos com a mesma paridade.*

Exemplo 12.10 ($K_{5,5}$ e $K_{6,6}$). Pelo teorema de Kleitman, $\mathrm{cr}(K_{5,5}) = 16$ e $\mathrm{cr}(K_{6,6}) = 36$. Veja como a paridade ajuda: a contagem a partir de $\mathrm{cr}(K_{5,4}) = Z(5,4) = 8$ dá $\mathrm{cr}(K_{5,5}) \geq \frac{5}{3}\cdot 8$, isto é, pelo menos 14; como $Z(5,5)=16$ é par, todo desenho bom de $K_{5,5}$ tem número par de cruzamentos, o que deixa as possibilidades 14 e 16. Excluir o 14 é a parte difícil.

A paridade dobra o efeito de qualquer cota inferior: se a contagem garante $\mathrm{cr} \geq Z-1$ e $Z-1$ tem a paridade errada, então $\mathrm{cr} = Z$.

Os avanços seguintes foram, em grande parte, computacionais:

- Woodall (1993) verificou a conjectura para $K_{7,7}$, $K_{7,8}$, $K_{7,9}$, $K_{7,10}$, $K_{8,8}$, $K_{8,9}$ e $K_{8,10}$.
- Christian, Richter e Salazar (2013) mostraram que, para cada m fixo, decidir a conjectura para todos os $K_{m,n}$ é um problema *finito*: existe $N(m)$ tal que, se ela vale para $n \leq N(m)$, vale para todo n.
- O menor caso em aberto é $K_{7,11}$.

12.4 A conjectura de Harary–Hill

Para o grafo completo, a conjectura foi proposta por Anthony Hill por volta de 1958 e divulgada por Guy (1960) e por Harary e Hill (1963).

Conjectura 12.11 (Harary–Hill). *Para todo $n \geq 3$,*

$$\mathrm{cr}(K_n) = H(n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor .$$

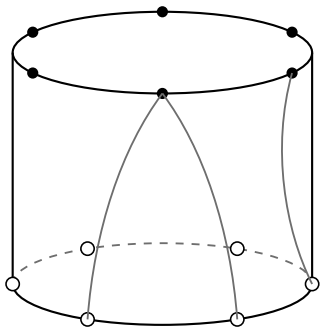
Os primeiros valores são

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$H(n)$	1	3	9	18	36	60	100	150	225	315

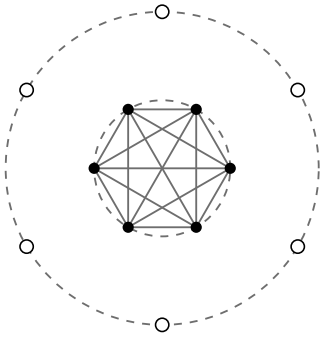
12.4.1 O desenho cilíndrico de Hill

Hill encontrou um desenho de K_n com $H(n)$ cruzamentos sobre a superfície de uma lata cilíndrica (que equivale à esfera, e portanto ao plano). Para $n = 2k$, coloque k vértices igualmente espaçados na borda da tampa de cima e k na borda da tampa de baixo, os de baixo girados de meio passo em relação aos de cima.

- As arestas entre vértices de cima são cordas retas na tampa de cima; idem para os de baixo.
- Cada aresta entre um vértice de cima e um de baixo desce pela parede lateral pelo caminho mais curto (uma hélice que gira menos de meia volta).



a lata, com uma tampa em cada ponta



planificação: tampa de cima no centro, tampa de baixo levada ao infinito

Figura 12.3: O desenho cilíndrico de Hill para $n = 12$. À esquerda, algumas arestas laterais; à direita, a mesma configuração vista no plano, com as cordas da tampa de cima (as da tampa de baixo ficam na região exterior).

Proposição 12.12. *O desenho cilíndrico de K_{2k} tem exatamente $H(2k)$ cruzamentos: $\binom{k}{4}$ em cada tampa e $k\binom{k}{3}$ na parede lateral.*

Esboço. Em cada tampa os k vértices estão em posição convexa e as arestas são cordas: cada quatro vértices geram exatamente um cruzamento (o das diagonais do quadrilátero), num total de $\binom{k}{4}$ por tampa. Arestas de tampas diferentes e arestas laterais não se encontram com as das tampas. A contagem na parede lateral é feita planificando o cilindro numa faixa periódica e verificando quando dois segmentos "helicoidais" trocam de ordem entre a borda de cima e a de baixo; ela resulta em $k\binom{k}{3}$. Finalmente,

$$2\binom{k}{4} + k\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{12}\big[(k-3)+2k\big] = \frac{k(k-1)^2(k-2)}{4} = H(2k). \qquad \blacksquare$$

Exemplo 12.13. Para $k = 3$ (isto é, K_6), cada tampa tem $\binom{3}{4} = 0$ cruzamentos e a parede tem $3\binom{3}{3} = 3$: total $3 = H(6)$, o que reproduz o valor da Figura 10.4. Para $k = 4$ (K_8): $2\binom{4}{4} + 4\binom{4}{3} = 2 + 16 = 18 = H(8)$. Para $k = 6$ (K_{12}): $2\binom{6}{4} + 6\binom{6}{3} = 30 + 120 = 150 = H(12)$.

Conferimos computacionalmente a contagem lateral para k até 8. Para n ímpar, apague um vértice do desenho de K_{n+1}: pelo argumento de contagem da próxima seção, algum vértice v satisfaz $\operatorname{cr}(D - v) \le \frac{n-3}{n+1}\operatorname{cr}(D)$, e você pode verificar que $\frac{n-3}{n+1}H(n+1) = H(n)$ para n ímpar. Logo $\operatorname{cr}(K_n) \le H(n)$ para todo n.

Hoje se conhecem várias outras famílias de desenhos com $H(n)$ cruzamentos: desenhos de duas páginas (vértices numa reta, arestas em semiplanos), desenhos com pontos aleatórios na esfera e

arcos geodésicos (que atingem $H(n)$ assintoticamente, em média) e uma variante da construção de Hill para n ímpar devida a Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, Ramos e Vogtenhuber.

12.5 Contagem para o grafo completo

Lema 12.14. *Para $n \geq 5$, $\operatorname{cr}(K_n) \geq \frac{n}{n-4}\operatorname{cr}(K_{n-1})$. Equivalentemente, $\operatorname{cr}(K_n)/\binom{n}{4}$ é não decrescente, e portanto o limite*

$$\kappa = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}}$$

existe e pertence ao intervalo $(0, \frac{3}{8}]$.

Demonstração. Num desenho bom ótimo D de K_n, cada cruzamento envolve quatro vértices e sobrevive à remoção de um vértice v exatamente quando v não é um deles. Logo $\sum_v \operatorname{cr}(D-v) = (n-4)\operatorname{cr}(D)$, e cada parcela é pelo menos $\operatorname{cr}(K_{n-1})$. A forma equivalente vem de $\binom{n}{4} = \frac{n}{n-4}\binom{n-1}{4}$. Uma sequência não decrescente e limitada por 1 converge; o limite é positivo porque $\operatorname{cr}(K_5)/\binom{5}{4} = 1/5$, e é no máximo $3/8$ porque $H(n)/\binom{n}{4} \to 3/8$. ∎

Como no caso bipartido, a conjectura para $n = 2k$ decorre da conjectura para $n = 2k-1$ (Exercício 12.3). Veja como a contagem, a paridade e o computador se combinam na história dos valores conhecidos:

- Guy verificou a conjectura até $n = 10$. Para K_7, a contagem dá $\operatorname{cr}(K_7) \geq \frac{7}{3}\cdot 3 = 7$; um argumento adicional leva a 9. A partir daí, $\operatorname{cr}(K_8) \geq 2\cdot 9 = 18$. Para K_9, a contagem dá $\operatorname{cr}(K_9) \geq \frac{9}{5}\cdot 18$, ou seja, pelo menos 33, e a paridade (todo desenho bom de K_9 tem número par de cruzamentos, como $H(9) = 36$) eleva para 34; o valor 36 exige mais trabalho. McQuillan e Richter (2016) deram uma prova de $\operatorname{cr}(K_9) = 36$ sem auxílio de computador.
- Pan e Richter (2007) provaram, com auxílio de computador, que $\operatorname{cr}(K_{11}) = 100$. Pela contagem, $\operatorname{cr}(K_{12}) \geq \frac{12}{8}\cdot 100 = 150 = H(12)$.
- Para K_{13}, a contagem dá $\operatorname{cr}(K_{13}) \geq \frac{13}{9}\cdot 150$, isto é, pelo menos 217, e a paridade restringe o valor a $\{217, 219, 221, 223, 225\}$. McQuillan, Pan e Richter (2015) excluíram 217.
- Aichholzer (2021), com uma enumeração iterativa de desenhos simples fortemente assistida por computador, anunciou $\operatorname{cr}(K_{13}) = 225$ e, consequentemente, $\operatorname{cr}(K_{14}) = \frac{14}{10}\cdot 225 = 315$.

Exemplo 12.15 (o que a contagem garante para K_{20})**.** Partindo de $\operatorname{cr}(K_{14}) = 315$ e aplicando o Lema 12.14 seis vezes, arredondando para cima a cada passo, obtêm-se as cotas da segunda linha da tabela abaixo, que comparamos com $H(n)$:

n	15	16	17	18	19	20
cota pela contagem	430	574	751	966	1224	1530
$H(n)$	441	588	784	1008	1296	1620

A razão entre a cota e a conjectura cai de $430/441$ para $1530/1620 = 17/18$: a contagem preserva a razão $\operatorname{cr}(K_n)/\binom{n}{4}$, mas $H(n)/\binom{n}{4}$ continua crescendo em direção a $3/8$, e a distância aumenta.

12.6 Cotas assintóticas

Seja $L = \lim_{n\to\infty} \operatorname{cr}(K_{n,n})/Z(n,n)$; o limite existe pelo Lema 12.5 aplicado às duas classes. A conjectura de Zarankiewicz implica $L = 1$, e a de Harary–Hill implica $\kappa = 3/8$. As duas

constantes estão ligadas.

Proposição 12.16 (Richter–Thomassen)**.** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{cr}(K_n)}{H(n)} \;\geq\; L.$

Demonstração. Seja D um desenho bom ótimo de K_{2n}. Para cada par ordenado (A, B) que divide os vértices em duas metades de tamanho n, o subdesenho formado pelas arestas entre A e B é um desenho de $K_{n,n}$. Um cruzamento de D, entre as arestas ab e cd, aparece nesse subdesenho exatamente quando A separa a de b e c de d; há $2 \cdot 2 \cdot \binom{2n-4}{n-2}$ pares (A, B) assim. Somando sobre todos os $\binom{2n}{n}$ pares,

$$4\binom{2n-4}{n-2}\operatorname{cr}(K_{2n}) \;\geq\; \binom{2n}{n}\operatorname{cr}(K_{n,n}).$$

Como $4\binom{2n-4}{n-2}/\binom{2n}{n} \to \frac{1}{4}$, $Z(n,n) \sim n^4/16$ e $H(2n) \sim n^4/4$, obtemos $\operatorname{cr}(K_{2n}) \geq (L - o(1))\, H(2n)$; o caso ímpar segue da monotonia do Lema 12.14. ∎

Assim, toda cota inferior para L é também uma cota para o grafo completo. A sequência de melhorias dos últimos vinte anos, quase toda baseada em programação semidefinida (SDP) e no método das álgebras de flags de Razborov, foi:

cota	trabalho
$L > 0{,}83$	de Klerk, Maharry, Pasechnik, Richter e Salazar (2006): SDP para $\operatorname{cr}(K_{7,n})$
$L > 0{,}859$	de Klerk, Pasechnik e Schrijver (2007): SDP para $\operatorname{cr}(K_{9,n})$
$L \geq 0{,}8878$	Brosch e Polak: SDP para $\operatorname{cr}(K_{10,n}), \ldots, \operatorname{cr}(K_{13,n})$
$L > 0{,}905$	Norin e Zwols: primeira aplicação de álgebras de flags (apresentada em palestra, não publicada)
$L > 0{,}9118$	Balogh, Lidický, Norin, Pfender, Salazar e Spiro (2023), álgebras de flags
$\operatorname{cr}(K_n) > 0{,}98559895\, H(n)$	Balogh, Lidický e Salazar (2019), para n suficientemente grande, com álgebras de flags aplicadas diretamente a desenhos de K_n

O trabalho de Balogh, Lidický e Salazar, publicado no *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, mostra que a conjectura de Hill é "assintoticamente pelo menos 98,5% verdadeira". No mesmo artigo eles mostram que o número de cruzamentos geodésico esférico (vértices na esfera, arestas como arcos de círculo máximo) é assintoticamente pelo menos $0{,}996\, H(n)$. O artigo de 2023 sobre $K_{n,n}$ prova também que o número retilíneo de $K_{n,n}$ é pelo menos $0{,}987\, Z(n,n) + o(n^4)$.

12.7 Classes de desenhos em que a conjectura de Hill está provada

Uma estratégia frutífera tem sido provar a conjectura de Harary–Hill para classes restritas de desenhos, que incluem todos os desenhos ótimos conhecidos.

- **Desenhos de duas páginas.** Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, Ramos e Salazar (2012) provaram que todo desenho de K_n com os vértices numa reta e cada aresta inteiramente num dos dois semiplanos tem pelo menos $H(n)$ cruzamentos.
- **Desenhos cilíndricos e monótonos.** A conjectura vale para desenhos cilíndricos (Ábrego et al.) e para desenhos x-monótonos, em que cada aresta é cruzada no máximo uma vez por cada reta vertical (Balko, Fulek e Kynčl, 2015).

- **Desenhos *shellable* e *bishellable*.** Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, McQuillan, Mohar, Mutzel, Ramos, Richter e Vogtenhuber identificaram uma propriedade combinatória (a existência de certas sequências de vértices em faces) que basta para garantir $H(n)$ cruzamentos e que engloba as classes acima.

12.8 Grafos multipartidos completos

Para o grafo tripartido completo K_{n_1,n_2,n_3} e, em geral, para o r-partido equilibrado, valores exatos são conhecidos apenas quando quase todas as partes são pequenas. Gethner, Hogben, Lidický, Pfender, Ruiz e Young (2017) propuseram cotas superiores análogas à de Zarankiewicz e estudaram o comportamento assintótico da razão entre o número de cruzamentos do r-partido equilibrado e o número máximo de cruzamentos de um desenho; o tema continua essencialmente aberto.

As duas conjecturas centrais

Provar que $\operatorname{cr}(K_{m,n}) = Z(m,n)$ (o menor caso aberto é $K_{7,11}$) e que $\operatorname{cr}(K_n) = H(n)$ (o menor caso aberto, após o anúncio de 2021, é K_{15}). Mesmo as versões assintóticas, $L = 1$ e $\kappa = 3/8$, estão em aberto.

Exercícios

Exercício 12.1. Mostre que $\operatorname{cr}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$ para todo $n \geq 5$, contando as cópias de K_5 num desenho ótimo.

Exercício 12.2. Mostre que $\operatorname{cr}(K_{m,n}) \geq \dfrac{m(m-1)\,n(n-1)}{36}$, contando cópias de $K_{3,3}$, e compare com $Z(m,n)$ quando $m = n \to \infty$.

Exercício 12.3. Prove que, se $\operatorname{cr}(K_{2k-1}) = H(2k-1)$, então $\operatorname{cr}(K_{2k}) = H(2k)$.

Exercício 12.4. Um desenho de $K_{m,n}$ é de *duas camadas* quando os m vértices estão numa reta horizontal, os n vértices numa reta paralela e as arestas são segmentos. Mostre que todo desenho de duas camadas tem exatamente $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ cruzamentos e compare com $Z(m,n)$.

Exercício 12.5. Prove que $\operatorname{cr}(K_{4,n}) = Z(4,n)$ para todo n.

Exercício 12.6. Prove que o limite $L = \lim_{n\to\infty} \operatorname{cr}(K_{n,n})/Z(n,n)$ existe.

Exercício 12.7. Usando $\operatorname{cr}(K_{13}) \geq 219$ (McQuillan, Pan e Richter), prove que $\operatorname{cr}(K_n) \geq \frac{219}{715}\binom{n}{4}$ para todo $n \geq 13$, e calcule a razão entre essa constante e $3/8$.

Exercício 12.8. Use $\operatorname{cr}(K_{4,n}) = Z(4,n)$ e a contagem para obter uma cota inferior para $\operatorname{cr}(K_{5,n})$, e mostre que ela vale pelo menos $\frac{5}{6}Z(5,n)$. (O teorema de Kleitman fecha a diferença.)

CAPÍTULO 13

Número de cruzamentos retilíneo

Em muitas aplicações as arestas precisam ser segmentos de reta: trilhas de uma placa traçadas por um roteador simples, ligações num diagrama gerado automaticamente, cabos esticados entre postes. Essa restrição muda o problema de modo surpreendente. Para grafos planares ela não custa nada, mas para grafos com poucos cruzamentos ela pode custar uma quantidade arbitrária, e para grafos completos ela leva a um problema clássico de probabilidade geométrica proposto por Sylvester em 1864.

13.1 Definição e primeiras relações

Definição 13.1. Um desenho é *retilíneo* se todas as arestas são segmentos de reta. O *número de cruzamentos retilíneo* $\overline{\mathrm{cr}}(G)$ é o menor número de cruzamentos de um desenho retilíneo de G (com os vértices em posição geral: três vértices nunca colineares).

Como todo desenho retilíneo é um desenho, $\mathrm{cr}(G) \le \overline{\mathrm{cr}}(G)$. O teorema de Fáry (Teorema 8.6) diz que todo grafo planar tem desenho plano com segmentos, isto é,

$$\mathrm{cr}(G) = 0 \iff \overline{\mathrm{cr}}(G) = 0.$$

Bienstock e Dean (1993) mostraram que a igualdade persiste para poucos cruzamentos e depois se perde completamente.

Teorema 13.2 (Bienstock–Dean)**.** *Se* $\mathrm{cr}(G) \le 3$*, então* $\overline{\mathrm{cr}}(G) = \mathrm{cr}(G)$*. Para cada* N *existe um grafo* G *com* $\mathrm{cr}(G) = 4$ *e* $\overline{\mathrm{cr}}(G) \ge N$*.*

A construção da segunda parte usa grafos com arestas “pesadas” (substituídas por muitos caminhos paralelos), dispostas de modo que o único desenho com 4 cruzamentos exige que uma aresta dê voltas que um segmento não consegue dar; qualquer desenho retilíneo é obrigado a cruzar uma aresta pesada, o que custa muitos cruzamentos.

Para grafos completos a diferença aparece cedo.

Exemplo 13.3 (K_8)**.** Já sabemos que $\mathrm{cr}(K_8) = 18$ (Exemplo 10.13). Com segmentos, porém, o mínimo é $\overline{\mathrm{cr}}(K_8) = 19$; a Figura 10.8 mostra um desenho retilíneo com 19 cruzamentos, conferido por computador. Os valores retilíneos coincidem com $H(n)$ para $n \le 7$ e para $n = 9$; os primeiros são

$$\overline{\mathrm{cr}}(K_5) = 1,\ \overline{\mathrm{cr}}(K_6) = 3,\ \overline{\mathrm{cr}}(K_7) = 9,\ \overline{\mathrm{cr}}(K_8) = 19,\ \overline{\mathrm{cr}}(K_9) = 36,\ \overline{\mathrm{cr}}(K_{10}) = 62,$$

contra $H(8) = 18$ e $H(10) = 60$.

13.2 Quadriláteros convexos

O número retilíneo de K_n tem uma interpretação puramente geométrica.

Proposição 13.4. *Seja P um conjunto de n pontos em posição geral e D_P o desenho retilíneo de K_n com vértices em P. Então $\mathrm{cr}(D_P)$ é o número de subconjuntos de quatro pontos de P em posição convexa. Consequentemente,*

$$\overline{\mathrm{cr}}(K_n) = \min_{|P|=n} \square(P),$$

onde $\square(P)$ denota o número de quádruplas convexas de P.

Demonstração. Dois segmentos que se cruzam têm quatro extremidades distintas; agrupe os cruzamentos pelas quádruplas de extremidades. Quatro pontos em posição convexa determinam um quadrilátero convexo, cujas diagonais se cruzam e cujos lados não se cruzam: exatamente um cruzamento. Se as quatro não estão em posição convexa, uma delas está no interior do triângulo das outras três, e nenhum par de segmentos disjuntos entre elas se cruza. ■



convexos: 1 cruzamento um ponto interior: nenhum

Figura 13.1: As duas posições possíveis de quatro pontos em posição geral.

Exemplo 13.5 ($\overline{\mathrm{cr}}(K_5) = 1$)**.** O teorema de Esther Klein, ponto de partida do problema de Erdős–Szekeres, diz que entre cinco pontos em posição geral há sempre quatro em posição convexa (Exercício 13.1). Pela Proposição 13.4, $\overline{\mathrm{cr}}(K_5) \geq 1$; o desenho da Figura 10.3 mostra que 1 é atingido.

Exemplo 13.6 ($\overline{\mathrm{cr}}(K_6) = 3$)**.** Seis pontos têm seis subconjuntos de cinco, e cada um contém ao menos uma quádrupla convexa. Cada quádrupla está em exatamente $6 - 4 = 2$ desses subconjuntos, logo há pelo menos $6/2 = 3$ quádruplas convexas. A Figura 10.4 atinge esse valor.

Exemplo 13.7 (o máximo)**.** Se os n pontos estão em posição convexa, todas as $\binom{n}{4}$ quádruplas são convexas e o desenho tem $\binom{n}{4}$ cruzamentos, o máximo possível para um desenho retilíneo (Exercício 10.4). O problema de minimização pede, então, configurações que fujam o máximo possível da convexidade.

13.3 O problema dos quatro pontos de Sylvester

Em 1864, Sylvester propôs na *Educational Times*: escolhendo-se quatro pontos ao acaso, qual a probabilidade de que formem um quadrilátero convexo? A pergunta está mal posta sem a distribuição, e ficou famosa justamente por isso. Para uma região convexa R com pontos uniformes, seja $p(R)$ essa probabilidade. Blaschke mostrou, em 1917, que entre as regiões convexas $p(R)$ é mínima para o triângulo, com $p = 2/3$, e máxima para o disco, com $p = 1 - \frac{35}{12\pi^2}$.

Para regiões arbitrárias, e não só convexas, a resposta está ligada a $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$.

Teorema 13.8. *A sequência $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)/\binom{n}{4}$ é não decrescente; seu limite*

$$q^* = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{cr}}(K_n)}{\binom{n}{4}}$$

existe. Além disso (Scheinerman e Wilf, 1994), q^* é o ínfimo de $p(R)$ sobre todas as regiões abertas R de área finita.

Demonstração da primeira parte. Seja P ótimo com n pontos. Para cada $x \in P$, $P \setminus \{x\}$ tem pelo menos $\overline{\mathrm{cr}}(K_{n-1})$ quádruplas convexas; cada quádrupla convexa de P é contada para $n-4$ escolhas de x. Assim $(n-4)\,\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq n\,\overline{\mathrm{cr}}(K_{n-1})$, que é a monotonia, como no Lema 12.14. A sequência é limitada por 1 e converge. ∎

A segunda parte se entende assim: se P é um conjunto de n pontos com poucas quádruplas convexas, substituir cada ponto por um disquinho minúsculo gera uma região em que quatro pontos sorteados caem, com probabilidade próxima de 1 quando n cresce, em quatro disquinhos distintos, e então formam um quadrilátero convexo exatamente quando os centros formam.

13.4 k-arestas

A ferramenta que levou às melhores cotas inferiores é a contagem de k-arestas.

Definição 13.9. Seja P um conjunto de n pontos em posição geral. Um segmento pq com $p, q \in P$ é uma *k-aresta* se a reta pq deixa exatamente k pontos de P de um lado (e $n-2-k$ do outro), com $0 \leq k \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Denote por $E_k(P)$ o número de k-arestas e por $E_{\leq k}(P) = E_0 + \cdots + E_k$.

As 0-arestas são as arestas do fecho convexo; para n par, as $\frac{n-2}{2}$-arestas são as *retas de bissecção*. Como cada um dos $\binom{n}{2}$ segmentos é uma k-aresta para exatamente um k, $\sum_k E_k = \binom{n}{2}$.

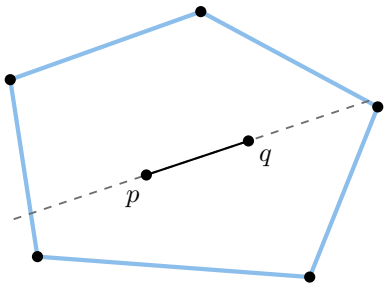


Figura 13.2: Sete pontos. As arestas do fecho convexo (azuis) são as 0-arestas. A reta pelo segmento pq deixa dois pontos de um lado e três do outro, de modo que pq é uma 2-aresta.

O resultado-chave é uma identidade exata, que traduz quádruplas convexas em k-arestas. Ela foi obtida, em formas equivalentes, por Lovász, Vesztergombi, Wagner e Welzl (2004) e por Ábrego e Fernández-Merchant (2005).

Teorema 13.10. *Para todo conjunto P de n pontos em posição geral,*

$$\square(P) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} \left(\frac{n-2}{2} - k \right)^2 E_k(P) \; - \; \frac{3}{4}\binom{n}{3}.$$

Demonstração. **A contagem dupla.** Para cada quádrupla $S \subseteq P$ e cada segmento pq com extremidades em S, diga que pq é *de mesmo lado em S* se os outros dois pontos de S estão do mesmo lado da reta pq. Se S é convexa, os quatro lados do quadrilátero são de mesmo lado e as duas diagonais não: 4 segmentos. Se S não é convexa, com d no interior do triângulo abc, os lados ab, bc, ca são de mesmo lado (o quarto ponto e d ficam do mesmo lado) e os segmentos da, db, dc não: 3 segmentos. Seja $Y = \binom{n}{4} - \square(P)$ o número de quádruplas não convexas. Contando os

pares (quádrupla, segmento de mesmo lado) pelos segmentos: um segmento pq que é k-aresta é de mesmo lado em $\binom{k}{2} + \binom{n-2-k}{2}$ quádruplas. Logo

$$4\,\square(P) + 3Y = \sum_k E_k \left[\binom{k}{2} + \binom{n-2-k}{2} \right].$$

A simplificação. Usando $Y = \binom{n}{4} - \square(P)$,

$$\square(P) = \sum_k E_k \left[\binom{k}{2} + \binom{n-2-k}{2} \right] - 3\binom{n}{4}.$$

Um cálculo direto mostra que

$$\binom{k}{2} + \binom{n-2-k}{2} = \left(\frac{n-2}{2} - k \right)^2 + \frac{(n-2)(n-4)}{4}.$$

Como $\sum_k E_k = \binom{n}{2}$, resta verificar que $\binom{n}{2}\frac{(n-2)(n-4)}{4} - 3\binom{n}{4} = -\frac{3}{4}\binom{n}{3}$; ambos os lados valem $-\frac{n(n-1)(n-2)}{8}$. ∎

Conferimos a identidade por computador em dezenas de conjuntos aleatórios com até 11 pontos. Ela mostra que minimizar cruzamentos é o mesmo que concentrar as k-arestas perto do meio (k próximo de $\frac{n-2}{2}$), onde o peso $(\frac{n-2}{2} - k)^2$ é pequeno. Reorganizando a soma (somação por partes), obtém-se a forma equivalente

$$\square(P) = \sum_{k < \frac{n-2}{2}} (n - 2k - 3)\, E_{\le k}(P) - \frac{3}{4}\binom{n}{3} + \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{1}{4}\binom{n}{2}, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \tag{13.1}$$

em que todos os coeficientes são positivos. Portanto, *qualquer cota inferior para $E_{\le k}$ vira uma cota inferior para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$.*

Exemplo 13.11 (o pentágono)**.** Para cinco pontos em posição convexa, cada lado do pentágono é 0-aresta e cada diagonal é 1-aresta: $E_0 = E_1 = 5$. A identidade dá

$$\square = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 5 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 5 - \tfrac{3}{4} \cdot 10 = \tfrac{45}{4} + \tfrac{5}{4} - \tfrac{30}{4} = 5 = \binom{5}{4},$$

como deveria. Para o triângulo com dois pontos interiores da Figura 10.3, $E_0 = 3$ e $E_1 = 7$, e a identidade dá $\frac{27}{4} + \frac{7}{4} - \frac{30}{4} = 1$.

Exemplo 13.12 (os sete pontos da Figura 13.2)**.** Para esses sete pontos, uma contagem direta dá $E_0 = 5$ (o fecho é um pentágono), $E_1 = 6$ e $E_2 = 10$; confira que $5 + 6 + 10 = 21 = \binom{7}{2}$. Com $\frac{n-2}{2} = \frac{5}{2}$, a identidade dá

$$\square = \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \cdot 5 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 10 - \tfrac{3}{4} \cdot 35 = \tfrac{125}{4} + \tfrac{54}{4} + \tfrac{10}{4} - \tfrac{105}{4} = 21.$$

O desenho retilíneo de K_7 sobre esses pontos tem, portanto, 21 cruzamentos, bem acima do ótimo 9. Para baixar esse número seria preciso transformar 0- e 1-arestas em 2-arestas, e a Figura 10.7 mostra uma configuração em que isso foi feito: um triângulo externo, com os demais pontos agrupados perto de seu interior.

Teorema 13.13 (Lovász–Vesztergombi–Wagner–Welzl; Ábrego–Fernández-Merchant)**.** *Para todo conjunto P de n pontos em posição geral e todo $k < \frac{n-2}{2}$,*

$$E_{\le k}(P) \;\ge\; 3\binom{k+2}{2}.$$

Para $k = 0$ isso diz que o fecho convexo tem pelo menos 3 arestas. A cota é justa para k até cerca de $n/3$ e foi melhorada para k maior por Aichholzer, García, Orden e Ramos e por Ábrego, Fernández-Merchant, Leaños e Salazar.

Corolário 13.14. $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq \frac{3}{8}\binom{n}{4} + O(n^3)$. *Em particular* $q^* \geq \frac{3}{8}$.

Demonstração. Substituindo a cota do Teorema 13.13 em (13.1),

$$\square(P) \;\geq\; \sum_{k<\frac{n-2}{2}} (n-2k-3)\cdot\frac{3(k+2)(k+1)}{2} - O(n^3).$$

O termo principal da soma é $\int_0^{n/2}(n-2x)\frac{3x^2}{2}\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{n^4}{24}-\frac{n^4}{32}\right) = \frac{n^4}{64}$, e $\frac{n^4}{64} = \frac{24}{64}\cdot\frac{n^4}{24} \sim \frac{3}{8}\binom{n}{4}$. ∎

Como $\mathrm{cr}(K_n) \leq H(n) \sim \frac{3}{8}\binom{n}{4}$, esse corolário já é quase a conjectura de Hill para desenhos retilíneos. As melhorias da cota de $E_{\leq k}$ para $k > n/3$ empurram a constante para cima de 3/8:

$$0{,}379972 \;<\; q^* \;<\; 0{,}380473,$$

com a cota inferior de Ábrego, Fernández-Merchant, Leaños e Salazar (2008) e a superior de Fabila-Monroy e López (2014), obtida com um desenho retilíneo de K_{75} com 450 492 cruzamentos e uma construção recursiva que transforma bons desenhos pequenos em bons desenhos grandes. Um projeto contínuo de Aichholzer e colaboradores, que atualiza periodicamente esses desenhos, registrava em 2020 a cota $q^* \leq 0{,}3804491869$.

Uma consequência

Como $0{,}379972 > \frac{3}{8}$, para todo n suficientemente grande vale $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) > H(n) \geq \mathrm{cr}(K_n)$. Retas custam cruzamentos, e o desenho ótimo de K_n precisa usar curvas.

13.5 Valores exatos e complexidade

Os valores exatos de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ são conhecidos para $n \leq 27$ e para $n = 30$, graças a uma combinação de cotas de k-arestas e de buscas computacionais extensas em tipos de ordem (configurações combinatórias de pontos) conduzidas por Aichholzer e colaboradores. Uma conexão bonita com o Capítulo 11: Dey (1998) usou o lema do cruzamento para provar que n pontos têm no máximo $O(n^{4/3})$ retas de bissecção, o que limita $E_{(n-2)/2}$ e, pela identidade, influencia a estrutura dos conjuntos ótimos.

Do ponto de vista computacional, o problema é ainda mais difícil que o topológico. Bienstock (1991) mostrou que calcular $\overline{\mathrm{cr}}(G)$ é NP-difícil, e a redução, examinada depois por Schaefer, mostra que o problema é $\exists\mathbb{R}$-*completo*: equivalente, em complexidade, a decidir se um sistema de equações e inequações polinomiais com coeficientes inteiros tem solução real. Em particular, não se sabe sequer se ele pertence a NP, pois um desenho ótimo pode exigir coordenadas com número exponencial de bits.

Desenhos retilíneos com poucos cruzamentos de grafos famosos continuam sendo objeto de buscas computacionais e de catálogos; o verbete do MathWorld sobre o grafo de Robertson, por exemplo, registra desenhos retilíneos com 17 cruzamentos.

13.5.1 A forma dos conjuntos ótimos

Embora não se conheça uma descrição explícita dos conjuntos ótimos, algumas propriedades estruturais são conhecidas. Aichholzer, Orden e Ramos mostraram que todo conjunto de pontos

que atinge $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ tem fecho convexo triangular, o que é coerente com o Teorema 13.13: o fecho contribui com 0-arestas, as de peso máximo na identidade, e um triângulo minimiza essa contribuição. Os melhores conjuntos conhecidos têm, além disso, uma simetria aproximada de ordem 3, com os pontos divididos em três aglomerados de mesmo tamanho, cada um voltado para um vértice do triângulo, e essa organização se repete dentro de cada aglomerado. Ábrego, Cetina, Fernández-Merchant, Leaños e Salazar estudaram os conjuntos com essa estrutura (os 3-*decomponíveis*) e obtiveram para eles cotas inferiores melhores que as válidas em geral. Os desenhos de K_7 e K_8 das Figuras 10.7 e 10.8, obtidos por busca computacional, já exibem o fecho triangular.

13.6 Desenhos pseudolineares

Entre os desenhos gerais e os retilíneos há uma classe intermediária. Um desenho de K_n é *pseudolinear* se as arestas podem ser estendidas a uma família de pseudorretas: curvas ilimitadas, cada par das quais se cruza exatamente uma vez. Todo desenho retilíneo é pseudolinear, e a identidade das k-arestas e o Teorema 13.13 continuam valendo nessa classe, de modo que também o número pseudolinear $\widetilde{\mathrm{cr}}(K_n)$ é pelo menos $0{,}379972\binom{n}{4}$ assintoticamente. Balko e Kynčl mostraram que o limite pseudolinear $\tilde{q}^*$ é menor que 0,380448, abaixo da melhor cota superior conhecida para q^* na época. Não se sabe se $\tilde{q}^* < q^*$.

Problemas em aberto

Determinar q^* (o problema de Sylvester para regiões arbitrárias). Decidir se $\widetilde{\mathrm{cr}}(K_n) = \overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para todo n. Encontrar uma descrição explícita de conjuntos de pontos ótimos para infinitos valores de n: até hoje não há sequer uma conjectura para a forma desses conjuntos.

Exercícios

Exercício 13.1. Prove o teorema de Esther Klein: entre cinco pontos do plano em posição geral, há quatro em posição convexa.

Exercício 13.2. Sabendo que $\overline{\mathrm{cr}}(K_8) = 19$, prove que $\overline{\mathrm{cr}}(K_9) \geq 35$ e $\overline{\mathrm{cr}}(K_{10}) \geq 59$.

Exercício 13.3. Para n pontos em posição convexa, determine E_k para cada k e verifique que a identidade do Teorema 13.10 dá $\binom{n}{4}$ quando n é par.

Exercício 13.4. Mostre que $E_0(P) + E_1(P) \geq 9$ para todo conjunto P de $n \geq 6$ pontos em posição geral, sem usar o Teorema 13.13. (Dica: separe os casos segundo o número h de vértices do fecho convexo.)

Exercício 13.5. Mostre que $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$ usando apenas o teorema de Esther Klein, e explique por que a mesma cota vale para $\mathrm{cr}(K_n)$ por outro caminho.

Exercício 13.6. Mostre que, para n pontos sorteados independentemente e uniformemente num triângulo, o número esperado de quádruplas convexas é $\frac{2}{3}\binom{n}{4}$, admitindo o resultado de Blaschke para o triângulo, e conclua que existem conjuntos de n pontos com no máximo $\frac{2}{3}\binom{n}{4}$ quádruplas convexas.

Exercício 13.7. Mostre que $\overline{\mathrm{cr}}(K_{m,n}) = Z(m,n)$ sempre que $\min\{m,n\} \leq 6$.

CAPÍTULO 14

Variantes do número de cruzamentos

Nos capítulos anteriores contamos cruzamentos de um jeito só: cada ponto onde duas arestas se cortam vale uma unidade. Essa escolha é natural, mas não é a única possível. Quem projeta uma placa de circuito impresso se preocupa com quantos *pares* de trilhas se tocam, porque cada par exige uma ponte; quem estuda a topologia do desenho se interessa pela *paridade* dos cruzamentos, porque ela é invariante por muitas deformações; quem desenha um mapa de metrô legível quer que nenhuma linha seja cortada muitas vezes. Cada uma dessas perguntas dá origem a um parâmetro diferente. Neste capítulo você vai conhecer os principais, ver como eles se comparam e descobrir que a pergunta mais simples de todas, se o número de cruzamentos e o número de pares que se cruzam coincidem sempre, continua sem resposta.

14.1 Três maneiras de contar

Fixe um desenho D de um grafo G no plano. Lembre que, num desenho, as arestas são curvas simples ligando as extremidades, nenhuma aresta passa por um vértice que não seja extremidade sua, duas arestas têm só finitos pontos em comum e nenhum ponto é interior a três arestas. Não exigimos aqui que o desenho seja *bom* (no sentido do Capítulo 10): duas arestas podem cruzar-se várias vezes, e arestas adjacentes podem cruzar-se.

Definição 14.1. Para um desenho D de G, defina

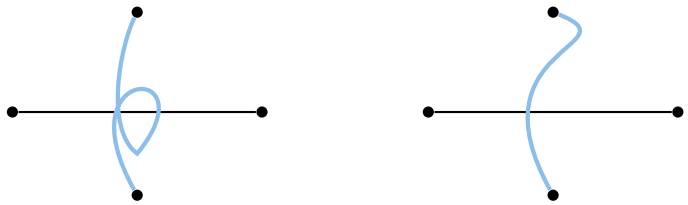
- $\mathrm{cr}(D)$: o número total de pontos de cruzamento;
- $\mathrm{pcr}(D)$: o número de pares de arestas que se cruzam pelo menos uma vez;
- $\mathrm{ocr}(D)$: o número de pares de arestas que se cruzam um número *ímpar* de vezes;
- $\mathrm{iocr}(D)$: o número de pares de arestas *independentes* (sem extremidade comum) que se cruzam um número ímpar de vezes.

O **número de cruzamentos de pares** $\mathrm{pcr}(G)$, o **número de cruzamentos ímpar** $\mathrm{ocr}(G)$ e o **número de cruzamentos ímpar independente** $\mathrm{iocr}(G)$ são os mínimos de $\mathrm{pcr}(D)$, $\mathrm{ocr}(D)$ e $\mathrm{iocr}(D)$ sobre todos os desenhos D de G.

Para um mesmo desenho vale claramente $\mathrm{iocr}(D) \le \mathrm{ocr}(D) \le \mathrm{pcr}(D) \le \mathrm{cr}(D)$: todo par independente ímpar é um par ímpar, todo par ímpar se cruza pelo menos uma vez, e cada par que se cruza contribui com pelo menos um ponto. Tomando mínimos,

$$\mathrm{iocr}(G) \le \mathrm{ocr}(G) \le \mathrm{pcr}(G) \le \mathrm{cr}(G). \tag{14.1}$$

Exemplo 14.2. Os parâmetros de um *desenho* não são os do *grafo*. Desenhe K_4 como um quadrado com as duas diagonais retas: esse desenho tem $\mathrm{cr}(D) = \mathrm{pcr}(D) = \mathrm{ocr}(D) = \mathrm{iocr}(D) = 1$, pois o único par que se cruza é o das diagonais, que são independentes. Mas K_4 é planar (leve uma diagonal para fora do quadrado), e por isso $\mathrm{cr}(K_4) = \mathrm{pcr}(K_4) = \mathrm{ocr}(K_4) = \mathrm{iocr}(K_4) = 0$. Para K_5, todos os quatro parâmetros valem 1: o desenho usual tem um único cruzamento, e o teorema de Hanani–Tutte, a seguir, garante $\mathrm{iocr}(K_5) \ge 1$.



três cruzamentos, um par dois cruzamentos: par par

Figura 14.1: À esquerda, um único par de arestas contribui com 3 para cr, com 1 para pcr e com 1 para ocr. À direita, o par contribui com 2 para cr, 1 para pcr e 0 para ocr.

A pergunta que organiza todo o capítulo é: *as desigualdades em* (14.1) *podem ser estritas?* Pach e Tóth formularam essa questão em 2000, num artigo de título sugestivo, *Which crossing number is it anyway?*. A resposta, parcial, é a seguinte.

- ocr e pcr **são diferentes**: existem grafos com $\mathrm{ocr}(G) < \mathrm{pcr}(G)$ (Pelsmajer, Schaefer e Štefankovič, 2008).
- Não se sabe se $\mathrm{pcr}(G) = \mathrm{cr}(G)$ para todo G. É um dos problemas em aberto mais incômodos da área.
- Todos os parâmetros estão a uma distância polinomial uns dos outros: $\mathrm{cr}(G)$ é limitado por uma função quadrática de $\mathrm{iocr}(G)$.

14.2 O teorema de Hanani–Tutte

O ponto de partida é um teorema sobre o caso em que todos os parâmetros valem zero. Você já sabe que $\mathrm{cr}(G) = 0$ significa exatamente que G é planar. Será que $\mathrm{iocr}(G) = 0$ basta?

Teorema 14.3 (Hanani 1934; Tutte 1970 — forma forte)**.** *Se um grafo G admite um desenho no plano em que todo par de arestas independentes se cruza um número par de vezes, então G é planar. Em outras palavras,* $\mathrm{iocr}(G) = 0$ *implica* $\mathrm{cr}(G) = 0$.

Teorema 14.4 (forma fraca)**.** *Se G admite um desenho no plano em que* todo *par de arestas (adjacentes ou não) se cruza um número par de vezes, então G admite um desenho plano com o mesmo sistema de rotação, isto é, com a mesma ordem cíclica das arestas em torno de cada vértice.*

A forma forte diz que arestas adjacentes podem cruzar-se à vontade, e arestas independentes podem cruzar-se muitas vezes, desde que cada par independente se cruze um número par de vezes; ainda assim o grafo é planar. A demonstração completa exige um trabalho cuidadoso de redesenho e está fora do nosso escopo; vamos ver a ideia algébrica que a sustenta, que é bonita e útil por si só.

14.2.1 A ideia algébrica: paridade como invariante

Considere um grafo G e um desenho D. Para cada par $\{e, f\}$ de arestas independentes, seja $c_D(e, f) \in \mathbb{Z}_2$ a paridade do número de cruzamentos entre e e f. Agora faça uma *movimentação de vértice*: pegue um vértice v e uma aresta f não incidente a v, e arraste uma pequena parte de cada aresta incidente a v até passar por cima de f, como se v "atravessasse" f (Figura 14.2). Cada aresta e incidente a v e independente de f ganha exatamente um cruzamento com f; nenhum outro par muda de paridade.

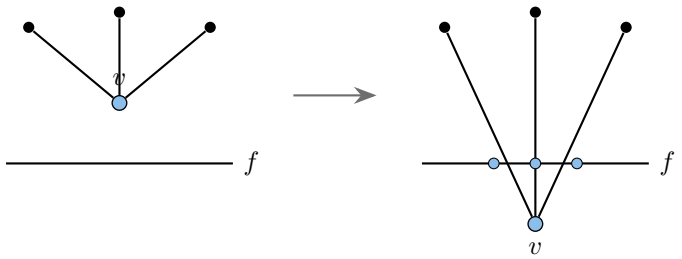
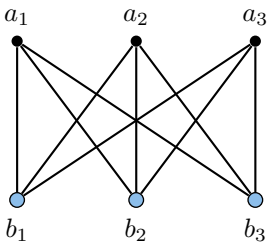


Figura 14.2: O movimento (v, f): o vértice v atravessa a aresta f, e cada aresta incidente a v ganha um cruzamento com f.

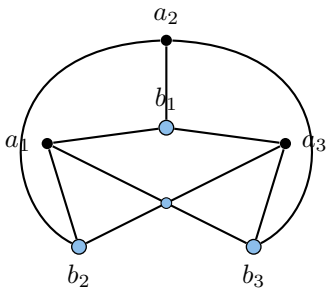
Assim, o vetor $c_D \in \mathbb{Z}_2^P$, onde P é o conjunto dos pares independentes, muda pela soma do vetor de incidência $\mu_{v,f}$, que tem 1 exatamente nas coordenadas $\{e, f\}$ com $e \ni v$. Um fato clássico da topologia do plano é que *quaisquer dois desenhos de G diferem, módulo 2, por uma combinação de movimentos desse tipo*. Logo a classe de c_D no quociente

$$\mathbb{Z}_2^P / \langle \mu_{v,f} \rangle$$

não depende do desenho: é um invariante do grafo, chamado *classe de van Kampen*. Para K_5 e $K_{3,3}$ essa classe é não nula, o que você pode verificar com uma conta finita (Exercício 14.2). Combinando com o teorema de Kuratowski (Teorema 8.2), obtém-se: se G não é planar, G contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$, e a restrição de qualquer desenho a essa subdivisão tem algum par independente ímpar; portanto $\operatorname{iocr}(G) \geq 1$. Isso é exatamente a forma forte do teorema.



(a) desenho em duas linhas: 9 cruzamentos



(b) desenho com 1 cruzamento

Figura 14.3: Dois desenhos de $K_{3,3}$. Em (a) há nove pares independentes que se cruzam uma vez cada; em (b), um só. Em ambos, a soma das paridades sobre os pares independentes é ímpar.

Exemplo 14.5. Na Figura 14.3(a), os vértices a_1, a_2, a_3 estão numa reta e b_1, b_2, b_3 numa paralela, e as arestas são segmentos. Os segmentos $a_i b_j$ e $a_k b_l$ com $i < k$ se cruzam exatamente quando $j > l$. Há $\binom{3}{2} = 3$ escolhas de $\{i, k\}$ e 3 de $\{j, l\}$, e para cada uma exatamente uma das duas maneiras de pareá-las produz cruzamento: são $3 \cdot 3 = 9$ cruzamentos, todos entre pares independentes. Logo $S(D) = 9 \equiv 1 \pmod 2$. Na Figura 14.3(b) o único cruzamento é entre $a_1 b_3$ e $a_3 b_2$, que são independentes; então $S(D) = 1$. As duas contas concordam módulo 2, como deve ser, e nenhuma é zero: é o teorema de Hanani–Tutte para $K_{3,3}$ em miniatura.

Exemplo 14.6. No desenho usual de K_5 com um único cruzamento (cinco vértices num pentágono, com uma diagonal desviada por fora), há exatamente um par de arestas independentes que se cruza, e ele se cruza uma vez. Logo c_D tem uma única coordenada igual a 1. O teorema diz que nenhuma sequência de movimentos (v, f) zera esse vetor.

14.2.2 Do zero ao pequeno

Uma vez que o teorema de Hanani–Tutte trata do caso $\operatorname{iocr} = 0$, é natural perguntar o que acontece para valores pequenos. Pelsmajer, Schaefer e Štefankovič provaram:

Teorema 14.7 (Pelsmajer–Schaefer–Štefankovič)**.** *Se* $\operatorname{ocr}(G) \le 3$*, então* $\operatorname{ocr}(G) = \operatorname{cr}(G)$*. Se* $\operatorname{iocr}(G) \le 2$*, então* $\operatorname{iocr}(G) = \operatorname{cr}(G)$*.*

A técnica central é a remoção de arestas pares: num desenho, chame uma aresta de *par* se ela cruza cada outra aresta um número par de vezes.

Teorema 14.8 (remoção de cruzamentos pares)**.** *Seja* D *um desenho de* G *e* F *o conjunto das arestas que não são pares. Então* G *tem um desenho* D' *em que as arestas de* $E(G) \setminus F$ *não estão envolvidas em cruzamento algum, e os únicos cruzamentos ocorrem entre arestas de* F*.*

Esse teorema dá uma cota quadrática imediata.

Teorema 14.9 (Pach–Tóth 2000)**.** *Para todo grafo* G*,* $\operatorname{cr}(G) \le 2\,\operatorname{ocr}(G)^2$*.*

Demonstração. Tome um desenho D com $\operatorname{ocr}(D) = k = \operatorname{ocr}(G)$. Há no máximo $2k$ arestas envolvidas em pares ímpares; as demais são pares. Pelo Teorema 14.8, redesenhamos de modo que só essas no máximo $2k$ arestas participem de cruzamentos. Um desenho em que só $2k$ arestas se cruzam pode ser simplificado (removendo cruzamentos repetidos entre o mesmo par e cruzamentos entre arestas adjacentes, pelas operações locais do Capítulo 10) até que cada par se cruze no máximo uma vez. O número de pares entre $2k$ arestas é $\binom{2k}{2} < 2k^2$. ∎

Pelsmajer, Schaefer e Štefankovič melhoraram o argumento para $\operatorname{cr}(G) \le \binom{2\,\operatorname{iocr}(G)}{2}$, o que mostra que *todos os oito parâmetros naturais* (combinando cr, pcr, ocr com as regras sobre arestas adjacentes) estão a uma distância no máximo quadrática uns dos outros.

14.3 O número de cruzamentos ímpar é diferente

Durante anos se conjecturou que todos esses parâmetros fossem iguais. A primeira separação veio em 2008.

Teorema 14.10 (Pelsmajer–Schaefer–Štefankovič 2008)**.** *Existe uma família infinita de grafos com* $\operatorname{ocr}(G) < 0{,}867 \cdot \operatorname{pcr}(G)$*.*

A construção começa com um objeto auxiliar: um *mapa ponderado no anel*. Imagine uma coroa circular com quatro pontos na borda externa e quatro na interna, e quatro arcos que devem ligar pares de pontos, cada arco com um peso inteiro (a, b, c, d), que representa um feixe de arestas paralelas. A contagem de cruzamentos depende de quantas voltas cada arco dá em torno do furo. Para os pesos $a = 1$, $b = c = 3$, $d = 4$, os autores mostraram que $\operatorname{cr} = \operatorname{pcr} = 15$, enquanto há um desenho com apenas 13 pares ímpares: o arco que dá uma volta a mais cruza outro duas vezes, e esse par deixa de contar para ocr. Trocando cada arco ponderado por um feixe de arestas e os furos por grafos rígidos que fazem o papel do anel, obtém-se um grafo comum. Otimizando os pesos sobre os reais, a razão fica $\sqrt{3}/2$. Tóth (2008) refinou o exemplo para razão 0,855.

Observação 14.11. O exemplo separa ocr de pcr, mas, nele, $\operatorname{pcr} = \operatorname{cr}$. Essa é a lacuna que permanece: nenhum exemplo conhecido tem $\operatorname{pcr}(G) < \operatorname{cr}(G)$.

14.4 Pares que se cruzam e cruzamentos: a conjectura cr = pcr

Conjectura 14.12. *Para todo grafo G,* $\operatorname{pcr}(G) = \operatorname{cr}(G)$.

Por que isso é difícil? Num desenho que minimiza pcr, duas arestas que se cruzam podem cruzar-se muitas vezes, e eliminar esses cruzamentos múltiplos pode criar cruzamentos com terceiras arestas. Se nos limitamos a redesenhos que não alteram *quais* pares se cruzam, Kratochvíl e Matoušek mostraram que pode ser necessário um número exponencial de cruzamentos; logo qualquer prova de pcr = cr tem de mudar o conjunto de pares cruzantes.

As melhores cotas conhecidas são polinomiais, e a história delas é instrutiva:

- $\operatorname{cr}(G) \le 2\operatorname{pcr}(G)^2$ (consequência de Pach–Tóth);
- $\operatorname{cr}(G) = O(\operatorname{pcr}(G)^2/\log \operatorname{pcr}(G))$ (Valtr);
- $\operatorname{cr}(G) = O(\operatorname{pcr}(G)^2/\log^2 \operatorname{pcr}(G))$ (Tóth);
- $\operatorname{cr}(G) = O\big(\operatorname{pcr}(G)^{7/4}\log^{3/2}\operatorname{pcr}(G)\big)$ (Tóth 2012, usando separadores de grafos de cordas);
- $\operatorname{cr}(G) = O\big(\operatorname{pcr}(G)^{3/2}\log^2 \operatorname{pcr}(G)\big)$ (Matoušek 2014, inserindo no argumento de Tóth um teorema de separadores para grafos de cordas com $O(\sqrt{m})$ vértices).

Grafos de cordas

Um *grafo de cordas* (*string graph*) é o grafo de interseção de uma família de curvas no plano: um vértice por curva, uma aresta quando duas curvas se tocam. Num desenho que realiza pcr, as arestas do grafo desenhado são curvas, e o grafo de interseção delas tem exatamente pcr arestas. Matoušek provou que todo grafo de cordas com m arestas tem um separador equilibrado de tamanho $O(\sqrt{m}\log m)$, e esse separador permite cortar o desenho em pedaços e redesenhá-los recursivamente com controle sobre os cruzamentos. Lee (2016) eliminou o fator logarítmico do separador.

14.5 Hanani–Tutte em outras superfícies

O teorema de Hanani–Tutte tem versão no plano projetivo (Pelsmajer, Schaefer e Stasi; também Colin de Verdière e coautores): se G tem um desenho no plano projetivo com todo par independente se cruzando um número par de vezes, então G se imerge no plano projetivo. A forma fraca vale em todas as superfícies (Cairns–Nikolayevsky para orientáveis; Pelsmajer–Schaefer–Štefankovič para não orientáveis).

Schaefer e Štefankovič conjecturaram em 2013 que a forma forte valesse em toda superfície orientável. Fulek e Kynčl refutaram a conjectura.

Teorema 14.13 (Fulek–Kynčl, Combinatorica 2019)**.** *Existe um grafo de gênero* 5 *que admite, na superfície orientável de gênero* 4*, um desenho em que todo par de arestas independentes se cruza um número par de vezes. Logo a forma forte do teorema de Hanani–Tutte falha na superfície orientável de gênero* 4 *(e, juntando cópias disjuntas de K_5, em todo gênero maior que* 4*).*

Em compensação, Fulek e Kynčl mostraram que o gênero de um grafo é limitado por uma função do seu $\mathbb{Z}_2$-gênero, o que dá uma versão *aproximada* do teorema em superfícies. Para o toro, o bitoro e a superfície de gênero 3, a forma forte continua em aberto.

14.6 Cruzamentos por aresta: grafos k-planares

Num mapa de metrô, o problema raramente é o número total de cruzamentos; é uma linha ser cortada tantas vezes que fica impossível segui-la com o olho. Isso motiva o parâmetro local.

Definição 14.14. O **número de cruzamentos local** $\operatorname{lcr}(G)$ é o menor k tal que G tem um desenho em que cada aresta participa de no máximo k cruzamentos. Um grafo com $\operatorname{lcr}(G) \le k$ é dito **k-planar**; os 1-planares são os que admitem um desenho com no máximo um cruzamento por aresta.

A pergunta extremal básica é: quantas arestas pode ter um grafo k-planar com n vértices? Para $k = 0$ a resposta é $3n - 6$ (Teorema 7.5).

Teorema 14.15. *Todo grafo 1-planar simples com $n \ge 3$ vértices tem no máximo $4n-8$ arestas, e a cota é atingida para infinitos valores de n.*

Demonstração. Tome um desenho 1-planar de G com o número máximo de arestas possível para n vértices e, entre esses, com o menor número de cruzamentos; seja c o número de cruzamentos. Em cada cruzamento, as arestas ab e cd formam um "X" cujas pontas podem ser ligadas, na ordem a, c, b, d, por quatro arcos que acompanham o X sem cruzar nada; pela maximalidade (e pela minimalidade do número de cruzamentos), essas quatro arestas já estão no grafo e são desenhadas assim. Remova as duas arestas de cada cruzamento. Sobra um grafo plano H com $m - 2c$ arestas no qual cada X removido deixa uma face de tamanho 4. Seja f o número de faces de H. Contando lados de faces, $2(m - 2c) \ge 4c + 3(f - c) = 3f + c$; pela fórmula de Euler (Teorema 7.3), $f = m - 2c - n + 2$. Daí

$$2(m - 2c) \ge 3(m - 2c - n + 2) + c, \qquad \text{isto é,} \qquad m \le 3n - 6 + c.$$

Na mesma contagem, como $m - 2c = n + f - 2$, vale $2(n + f - 2) \ge 3f + c$, ou seja, $f \le 2n - 4 - c$; como as c faces quadradas estão entre as f faces, $c \le f \le 2n - 4 - c$ e, portanto, $c \le n - 2$. Portanto $m \le 4n - 8$. A cota é atingida, por exemplo, pelo cubo com as duas diagonais de cada face (8 vértices, 24 arestas) e, mais geralmente, por quadrangulações nas quais diagonais de faces distintas nunca repetem uma aresta. ∎

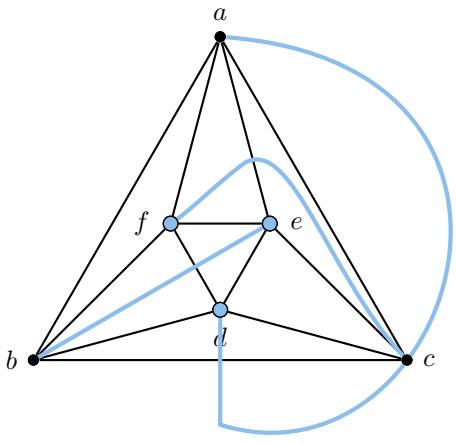


Figura 14.4: Um desenho 1-planar de K_6: o octaedro (preto) é planar e as três arestas que faltam (azuis), ad, be e cf, cruzam cada uma uma única aresta do octaedro.

Exemplo 14.16. O octaedro é K_6 menos um emparelhamento perfeito: 12 arestas, todas as faces triangulares. Cada aresta que falta liga dois vértices opostos e pode ser desenhada atravessando uma única aresta do octaedro, desde que as três passem por pares de faces distintos. Na Figura 14.4, ad cruza bc (pela face externa e pela face bcd), be cruza df (faces bdf e def) e cf cruza ae (faces ace e aef). O desenho tem 3 cruzamentos, cada aresta participa de no máximo um, e como $\mathrm{cr}(K_6) = 3$ ele é ótimo nos dois sentidos: $\mathrm{lcr}(K_6) = 1$ e o desenho realiza $\mathrm{cr}(K_6)$. Já K_7 tem 21 arestas e $4 \cdot 7 - 8 = 20 < 21$, logo $\mathrm{lcr}(K_7) \geq 2$ pelo Teorema 14.15.

Exemplo 14.17. Quantas arestas um grafo 1-planar pode ter com $n = 12$ vértices? No máximo $4 \cdot 12 - 8 = 40$. Compare: um grafo planar com 12 vértices tem no máximo 30 arestas, e o lema do cruzamento na forma $\mathrm{cr} \geq m^3/(64n^2)$, aplicado com a restrição $\mathrm{cr} \leq m/2$ (cada cruzamento usa duas arestas e cada aresta está em no máximo um), dá apenas $m \leq \sqrt{32}\, n$, isto é, $m \leq 67$. A contagem fina pela fórmula de Euler é muito melhor para k pequeno.

Para k maiores, as cotas lineares conhecidas são $5n - 10$ para $k = 2$, $5{,}5n - 11$ para $k = 3$ (Pach, Radoičić, Tardos e Tóth, 2006) e $6n - 12$ para $k = 4$ (Ackerman, 2019). Para k grande, o lema do cruzamento dá a ordem certa: num desenho k-planar, $\mathrm{cr} \leq km/2$, e o Teorema 11.1 força $km/2 \geq c\, m^3/n^2$, isto é, $m \leq C\sqrt{k}\, n$. A troca vale nos dois sentidos: cada cota linear para k-planares melhora a constante do lema do cruzamento (Capítulo 11), e é exatamente assim que se chegou às constantes $1/29$ de Ackerman e $1/27{,}48$ de Büngener e Kaufmann (2024).

Observação 14.18. Reconhecer grafos 1-planares é NP-completo (Grigoriev e Bodlaender, 2007; Korzhik e Mohar, 2013), em contraste com o teste de planaridade, que é linear.

14.6.1 Desenhos com ângulos retos

Em diagramas técnicos, cruzamentos em ângulo reto são quase tão legíveis quanto a ausência de cruzamento. Um *desenho RAC* (*right angle crossing*) é um desenho retilíneo em que toda dupla de arestas que se cruza o faz perpendicularmente.

Teorema 14.19 (Didimo–Eades–Liotta 2011)**.** *Todo grafo com $n \geq 4$ vértices que admite desenho RAC tem no máximo $4n - 10$ arestas, e a cota é justa.*

O ponto de partida da prova é que, num desenho RAC, três arestas nunca se cruzam duas a duas (Exercício 14.7); a partir daí, os autores particionam as arestas em classes conforme os cruzamentos e combinam a fórmula de Euler com uma contagem de faces mais delicada que a da prova anterior.

14.7 Grafos quase-planares

Uma variante oposta: em vez de limitar quantas vezes uma aresta é cortada, proíbe-se que muitas arestas se cruzem duas a duas.

Definição 14.20. Um desenho é **k-quase-planar** se não contém k arestas duas a duas cruzantes. Os 2-quase-planares são os planares; os 3-quase-planares são chamados simplesmente quase-planares.

Conjectura 14.21 (Pach, Shahrokhi e Szegedy; também atribuída a folclore)**.** *Para cada k fixo existe c_k tal que todo grafo k-quase-planar com n vértices tem no máximo $c_k\, n$ arestas.*

O que se sabe:

- $k = 3$: verdadeira (Agarwal, Aronov, Pach, Pollack e Sharir, 1997); a constante ótima é conhecida, $6{,}5n - 20$ (Ackerman e Tardos, 2007).
- $k = 4$: verdadeira (Ackerman, 2009).
- $k \geq 5$: em aberto. A melhor cota geral é $n(\log n)^{O(\log k)}$ (Fox, Pach e Suk); para desenhos retilíneos, ou mais geralmente para desenhos em que cada aresta é cortada no máximo uma vez por cada reta vertical, valem cotas $O(n \log n)$.

14.8 Thrackles

Agora o extremo oposto do desenho plano: e se exigirmos que *todo* par de arestas se encontre?

Definição 14.22. Um **thrackle** é um desenho de um grafo em que todo par de arestas se encontra exatamente uma vez: ou numa extremidade comum, ou num cruzamento próprio.

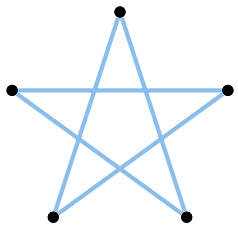


Figura 14.5: O pentagrama é um thrackle de C_5: cada par de arestas não adjacentes se cruza exatamente uma vez.

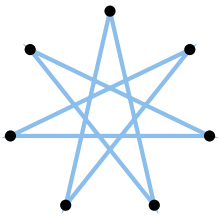


Figura 14.6: O heptagrama $\{7/3\}$: um thrackle retilíneo de C_7 com $\binom{7}{2} - 7 = 14$ cruzamentos.

Exemplo 14.23. Num thrackle, todo par de arestas não adjacentes se cruza exatamente uma vez. Num ciclo C_n há $\binom{n}{2}$ pares de arestas, dos quais n são adjacentes; logo todo thrackle de C_n tem exatamente $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ cruzamentos. Para o pentagrama da Figura 14.5 são 5; para o heptagrama da Figura 14.6, 14. O ciclo C_6 também admite thrackle, com 9 cruzamentos, mas não com segmentos de reta: num thrackle retilíneo, um ciclo é sempre ímpar (Woodall). O desenho de C_6 exige curvas.

Conjectura 14.24 (Conway, década de 1960)**.** *Todo thrackle com n vértices tem no máximo n arestas.*

Para thrackles retilíneos a afirmação já era conhecida antes de Conway (Hopf e Pannwitz, 1934; Erdős e Perles). Para curvas arbitrárias, o caminho tem sido de constantes decrescentes:

- $2n - 3$ (Lovász, Pach e Szegedy, 1997), a primeira cota linear;
- $\frac{3}{2}(n-1)$ (Cairns e Nikolayevsky, 2000);
- $\frac{167}{117}n < 1{,}428n$ (Fulek e Pach, 2011), com abordagem computacional;
- $1{,}3984n$ (Fulek e Pach, 2019);
- $1{,}393(n-1)$ (Xu), o melhor valor registrado na literatura recente.

A conjectura seria justa: todo ciclo de comprimento pelo menos 5 admite desenho como thrackle, enquanto C_4 não admite. Conway ofereceu uma garrafa de cerveja pela solução; a recompensa hoje é de mil dólares.

14.9 Livros, cores e superfícies

14.9.1 Desenhos em livro

Disponha os vértices numa reta (a *lombada*) e desenhe cada aresta num de k semiplanos (as *páginas*) que têm a lombada como bordo comum. O **número de cruzamentos em k páginas** $\nu_k(G)$ é o mínimo de cruzamentos nesses desenhos. Para $k = 2$, o desenho em duas páginas é o mesmo que um desenho no plano com os vértices numa reta e cada aresta inteiramente acima ou abaixo dela. Um marco do período foi:

Teorema 14.25 (Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, Ramos e Salazar 2012)**.** *$\nu_2(K_n) = H(n)$, onde $H(n)$ é o número de Harary–Hill da Conjectura 12.11.*

Assim, a Conjectura de Harary–Hill vale para a classe dos desenhos em duas páginas. Esse resultado e sua extensão a classes mais amplas de desenhos (*shellable* e *bishellable*, Ábrego e coautores) são discutidos no Capítulo 12.

Exemplo 14.26. Numa página, duas arestas ab e cd com $a < b$, $c < d$ e extremidades distintas se cruzam exatamente quando os intervalos se entrelaçam: $a < c < b < d$ ou $c < a < d < b$. Assim, um desenho em duas páginas é uma 2-coloração das arestas, e o número de cruzamentos é o número de pares entrelaçados de mesma cor. Para K_5 com os vértices $1, \dots, 5$, as arestas $12, 23, 34, 45$ ficam sobre a lombada; colocando $13, 14, 15$ em cima e $24, 25, 35$ embaixo, só 24 e 35 se entrelaçam: 1 cruzamento, que é $H(5)$. Para K_6, a coloração da Figura 14.7 dá $3 = H(6)$ cruzamentos; uma busca exaustiva pelas 2^9 colorações das arestas que não estão na lombada nem são a aresta externa 16 confirma que 3 é o mínimo.

14.9.2 Número de cruzamentos biplanar e k-planar

Em placas de circuito com duas camadas, as trilhas podem ser distribuídas entre as faces da placa, e só contam os cruzamentos dentro de uma mesma camada. Isso dá o **número de cruzamentos k-planar**

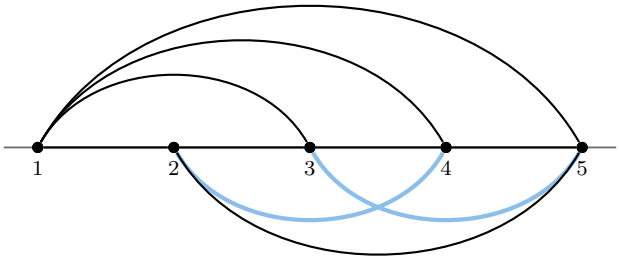
$$\mathrm{cr}_k(G) = \min\bigl\{\mathrm{cr}(G_1) + \cdots + \mathrm{cr}(G_k)\bigr\},$$

minimizado sobre as decomposições de $E(G)$ em k subgrafos geradores. O caso $k = 2$ (biplanar) foi introduzido por Owens; a generalização é de Shahrokhi, Sýkora, Székely e Vrťo. Determinar a espessura de um grafo (o menor k com $\mathrm{cr}_k = 0$) já é NP-difícil para $k = 2$ (Mansfield, 1983).

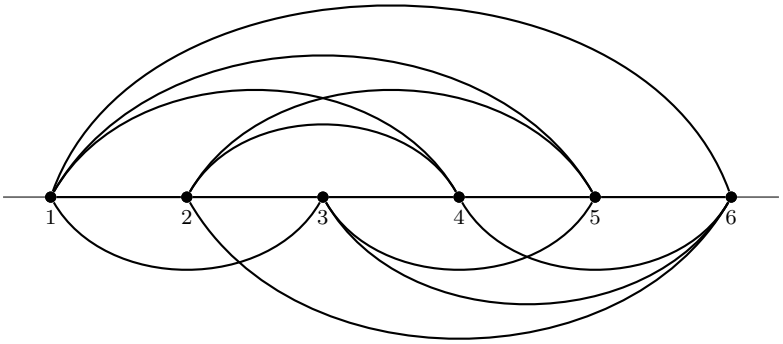
Exemplo 14.27. A espessura de K_n é $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$ para $n \neq 9, 10$, e vale 3 para $n = 9, 10$ (Beineke e Harary; Battle, Harary e Kodama para K_9). Assim K_8 se decompõe em dois grafos planares e $\mathrm{cr}_2(K_8) = 0$, embora $\mathrm{cr}(K_8) = 18$. Já K_9 não se decompõe em dois planares, logo $\mathrm{cr}_2(K_9) \geq 1$. Para K_{11} a impossibilidade é uma conta de arestas: dois grafos planares com 11 vértices têm juntos no máximo $2(3 \cdot 11 - 6) = 54$ arestas, e K_{11} tem 55.

14.9.3 Cruzamentos em superfícies

Desenhando no toro, no plano projetivo ou numa superfície S qualquer, define-se $\mathrm{cr}_S(G)$. Pelo Capítulo 9, $\mathrm{cr}_S(G) = 0$ quando o gênero de G é pequeno o suficiente para S. O lema do



K_5: 1 cruzamento



K_6: 3 cruzamentos

Figura 14.7: Desenhos de K_5 e K_6 em duas páginas, com os vértices na lombada (reta cinza). Em K_5, o único cruzamento é entre 24 e 35 (em azul). Em K_6, os cruzamentos são 14×25 na página de cima e 13×26, 35×46 na de baixo.

cruzamento tem análogo: numa superfície de gênero g, $\mathrm{cr}_S(G) \geq c\,m^3/n^2$ sempre que m é grande em relação a n e g (Shahrokhi, Székely, Sýkora e Vrťo). Valores exatos são raros mesmo para grafos completos no toro.

14.10 Estruturas planas em desenhos simples de K_n

Até aqui procuramos o desenho com menos cruzamentos. Uma linha de pesquisa muito ativa nos últimos vinte anos inverte a pergunta: dado um desenho *qualquer* de K_n, que estruturas sem cruzamentos ele necessariamente contém? Considere desenhos *simples*: duas arestas se encontram no máximo uma vez, num cruzamento próprio ou numa extremidade comum.

Conjectura 14.28 (Rafla 1988)**.** *Todo desenho simples de K_n, com $n \geq 3$, contém um ciclo hamiltoniano plano, isto é, um ciclo que passa por todos os vértices cujas arestas não se cruzam.*

Para desenhos retilíneos a conjectura é fácil (Exercício 14.6). Em geral, os resultados conhecidos ainda estão muito longe dela:

- Todo desenho simples de K_n contém um subdesenho plano com pelo menos $2n-3$ arestas, e isso é o melhor possível, como mostra o desenho convexo retilíneo (Fulek e Ruiz-Vargas).
- Pach, Solymosi e Tóth (2003) mostraram que há $\Omega((\log n)^{1/6})$ arestas duas a duas disjuntas.
- Aichholzer, García, Tejel, Vogtenhuber e Weinberger provaram que todo desenho simples de K_n contém pelo menos $\left\lfloor \sqrt{n/48} \right\rfloor$ arestas duas a duas disjuntas e um ciclo plano de comprimento $\Omega(\log n/\log\log n)$; o artigo saiu no *Discrete & Computational Geometry*.
- Suk e Zeng (2022) mostraram que todo desenho simples de K_n contém uma cópia plana de qualquer árvore com $(\log n)^{1/4-o(1)}$ vértices.
- Bergold, Felsner, Reddy, Orthaber e Scheucher (2024) provaram a conjectura de Rafla para os *desenhos convexos*, uma classe ampla que contém os retilíneos, e mostraram ainda que esses desenhos são planamente hamiltoniano-conexos e planamente pancíclicos.

Por que a distância é tão grande

Um caminho hamiltoniano tem $n-1$ arestas; o melhor resultado geral garante um caminho plano com cerca de $\log n/\log\log n$ arestas. A dificuldade é que desenhos simples de K_n podem ser muito "torcidos": nos chamados desenhos torcidos, as arestas se enrolam em torno de um ponto, e as técnicas geométricas usuais (convexidade, ordenação angular) desaparecem. Curiosamente, os desenhos torcidos generalizados, que são o caso extremo, contêm caminho hamiltoniano plano, e para n ímpar até ciclo hamiltoniano plano.

Exercícios

Exercício 14.1. Mostre que, num desenho de G que minimiza cr, nenhum par de arestas se cruza mais de uma vez e arestas adjacentes não se cruzam. Conclua que $\mathrm{cr}(G)$ coincide com o mínimo de $\mathrm{cr}(D)$ sobre desenhos bons. Explique por que o mesmo argumento *não* prova $\mathrm{pcr}(G) = \mathrm{cr}(G)$.

Exercício 14.2. Seja D um desenho de $K_{3,3}$ e $S(D) = \sum c_D(e,f) \in \mathbb{Z}_2$, a soma das paridades sobre todos os pares de arestas independentes. Mostre que $S(D)$ não muda pelos movimentos (v,f) da Figura 14.2 nem por deformações que passam uma aresta por cima de outra. Calcule $S(D)$ para um desenho concreto e conclua que todo desenho de $K_{3,3}$ tem um par independente que se cruza um número ímpar de vezes.

Exercício 14.3. Usando o Teorema 14.3, prove que, se um grafo G tem um desenho em que cada aresta cruza todas as outras um número par de vezes, então $\mathrm{cr}(G) = 0$. Por que esse enunciado é mais fraco que o teorema?

Exercício 14.4. Prove que o grafo completo K_7 não é 1-planar. Depois exiba um desenho 1-planar de K_6.

Exercício 14.5. Prove que C_4 não pode ser desenhado como thrackle. Depois mostre que todo ciclo ímpar C_{2k+1}, $k \geq 2$, admite um thrackle retilíneo, generalizando o pentagrama da Figura 14.5.

Exercício 14.6. Prove a conjectura de Rafla para desenhos retilíneos: se n pontos em posição geral no plano são ligados dois a dois por segmentos, existe um ciclo hamiltoniano sem cruzamentos.

Exercício 14.7. Mostre que, num desenho RAC, não existem três arestas duas a duas cruzantes. Conclua que todo grafo com desenho RAC é quase-planar.

Exercício 14.8. Seja G um grafo k-planar com n vértices e m arestas, e suponha a forma do lema do cruzamento $\mathrm{cr}(G) \geq m^3/(64n^2)$ para $m \geq 4n$. Prove que $m \leq \max\{4n,\ \sqrt{32k}\,n\}$.

CAPÍTULO 15

Complexidade e algoritmos

Quem desenha o leiaute de um chip, o diagrama de uma rede elétrica ou o grafo de dependências de um programa quer um desenho com poucos cruzamentos, e quer que o computador o encontre. Este capítulo mostra o que se sabe sobre essa tarefa: calcular $\mathrm{cr}(G)$ exatamente é difícil, e continua difícil mesmo em classes muito restritas de grafos; decidir se $\mathrm{cr}(G) \leq k$ para k fixo, ao contrário, pode ser feito em tempo linear; e aproximar $\mathrm{cr}(G)$ dentro de um fator constante é um problema em aberto que concentrou boa parte da pesquisa algorítmica dos últimos quinze anos.

15.1 Classes de complexidade em linguagem simples

Um *problema de decisão* é uma pergunta de resposta sim ou não sobre uma entrada. Aqui a entrada é um par (G, k) e a pergunta é "$\mathrm{cr}(G) \leq k$?". O tamanho da entrada é, essencialmente, o número de vértices e arestas de G mais o número de dígitos de k.

- **P** é a classe dos problemas que um algoritmo resolve em tempo limitado por um polinômio no tamanho da entrada. Testar planaridade está em P; de fato, Hopcroft e Tarjan (1974) mostraram que basta tempo linear.
- **NP** é a classe dos problemas em que, quando a resposta é sim, existe um *certificado* curto que um algoritmo polinomial confere. Para "$\mathrm{cr}(G) \leq k$?", o certificado é a descrição combinatória de um desenho com no máximo k cruzamentos: substitua cada cruzamento por um vértice novo de grau 4 e entregue um mergulho plano do grafo resultante. Conferir que o grafo é planar e que, ao desfazer os vértices novos, se recupera G leva tempo polinomial. Como podemos supor desenhos bons, $k \leq \binom{m}{2}$ e o certificado tem tamanho polinomial.
- Um problema é **NP-difícil** se todo problema de NP se reduz a ele em tempo polinomial; é **NP-completo** se, além disso, está em NP. Se algum problema NP-completo estivesse em P, teríamos P = NP, o que quase ninguém acredita.
- Um problema parametrizado por k é **tratável por parâmetro fixo** (FPT) se pode ser resolvido em tempo $f(k) \cdot n^c$, com c independente de k. É **para-NP-difícil** se continua NP-difícil para algum valor constante do parâmetro.
- A classe $\exists\mathbb{R}$ (existencial dos reais) reúne os problemas equivalentes a decidir se um sistema de equações e desigualdades polinomiais com coeficientes inteiros tem solução real. Vale $\mathrm{NP} \subseteq \exists\mathbb{R} \subseteq \mathrm{PSPACE}$.

Exemplo 15.1. Em uma escola, a coordenação quer saber se é possível marcar as provas de recuperação em três horários sem que nenhum aluno tenha duas provas no mesmo horário. Modelando disciplinas como vértices e ligando duas disciplinas com aluno em comum, a pergunta é se o grafo é 3-colorível (Capítulo 5). Uma escala pronta é fácil de conferir; encontrá-la pode ser muito difícil: 3-coloração é NP-completa. O número de cruzamentos tem a mesma natureza: conferir um desenho é fácil, encontrar o melhor parece não ser.

Exemplo 15.2. Veja como fica o certificado para "$\mathrm{cr}(K_5) \leq 1$". Tome o desenho de K_5 com um cruzamento, entre as arestas 13 e 24 (vértices $1, \ldots, 5$). Troque o cruzamento por um vértice novo x e as arestas 13, 24 pelas arestas $1x$, $x3$, $2x$, $x4$. O grafo obtido tem 6 vértices e $10-2+4 = 12 = 3 \cdot 6 - 6$ arestas: é uma triangulação planar. O verificador testa planaridade (em tempo linear) e confere que, ao apagar x e religar 1 com 3 e 2 com 4, recupera K_5. O certificado tem tamanho proporcional a $n + m + k$.

Exemplo 15.3. Por que não se conhece certificado curto para "$\mathrm{cr}(G) > k$"? Para K_{11}, provar $\mathrm{cr}(K_{11}) \geq 100$ exigiu examinar sistemas de rotação: num desenho de K_n, cada vértice tem $n-1$ arestas, cuja ordem cíclica pode ser escolhida de $(n-2)!$ modos, e há $((n-2)!)^n$ sistemas de rotação no total. Para K_5 são $6^5 = 7776$; para K_{11}, $(9!)^{11}$, um número com mais de 60 algarismos. Pan e Richter só conseguiram a enumeração explorando simetrias e podas fortes. Uma prova de $\mathrm{cr}(G) > k$ verificável em tempo polinomial implicaria NP = coNP, o que se acredita falso.

15.2 O número de cruzamentos é NP-completo

Teorema 15.4 (Garey–Johnson 1983)**.** *Decidir, dados G e k, se $\mathrm{cr}(G) \leq k$ é NP-completo.*

A redução de Garey e Johnson parte do problema do *arranjo linear ótimo*: ordenar os vértices de um grafo numa reta minimizando a soma dos comprimentos das arestas. Eles constroem uma "escada rígida": um grafo muito denso (pesado) em forma de grade que, em qualquer desenho ótimo, se desenha de um único jeito. As arestas do grafo original são então representadas por caminhos que precisam atravessar degraus da escada; atravessar mais degraus custa mais cruzamentos, e o custo total imita o comprimento total do arranjo. Arestas "pesadas" são simuladas por feixes de muitas arestas paralelas subdivididas, um truque presente em quase toda prova de dificuldade da área.

15.2.1 Uma redução ilustrativa: pesos e feixes

Muitas reduções usam *arestas com peso*: uma aresta de peso w conta w vezes cada cruzamento. Veja por que isso não muda a complexidade.

Proposição 15.5. *Seja G_w um grafo com pesos inteiros positivos nas arestas, e seja G o grafo obtido trocando cada aresta uv de peso w por w caminhos de comprimento 2 entre u e v, internamente disjuntos. Então o número de cruzamentos ponderado de G_w é igual a $\mathrm{cr}(G)$.*

Demonstração. Um desenho de G_w dá um desenho de G: desenhe os w caminhos de cada aresta como curvas paralelas muito próximas da aresta original. Cada cruzamento entre arestas de pesos w e w' vira ww' cruzamentos. Reciprocamente, num desenho ótimo de G, considere, para uma aresta uv de G_w, os w caminhos que a representam e escolha o que tem menos cruzamentos com o resto do desenho. Redesenhe todos os w caminhos colados a esse. O número de cruzamentos não aumenta: cada caminho do feixe passou a ter tantos cruzamentos quanto o melhor deles, e cruzamentos internos ao feixe desaparecem. Repetindo para cada aresta, chegamos a um desenho de G em que todo feixe é paralelo, e ele corresponde a um desenho de G_w com custo ponderado igual. ∎

Com essa proposição, uma redução pode usar arestas de peso polinomial ("paredes" praticamente impossíveis de atravessar) sem sair do mundo dos grafos simples.

Exemplo 15.6. Na Figura 15.1, a aresta uv de peso 3 e a aresta pq de peso 2 se cruzam uma vez, com custo ponderado 6. No grafo simples correspondente há 3 caminhos de u a v e 2 de p

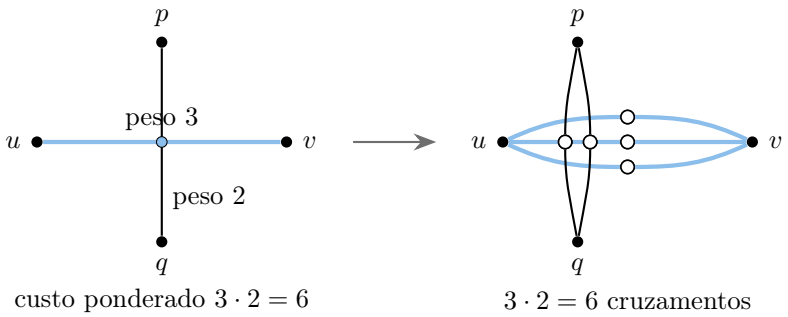


Figura 15.1: Arestas com peso trocadas por feixes de caminhos de comprimento 2 (vértices brancos são os de subdivisão). Os cruzamentos entre feixes reproduzem o produto dos pesos.

a q, e cada caminho de um feixe cruza cada caminho do outro: $3 \cdot 2 = 6$ cruzamentos. Numa redução, usa-se peso W maior que o custo total de qualquer desenho "honesto" para criar paredes: atravessar uma aresta de peso W custaria mais do que tudo o que se pode ganhar, e por isso nenhum desenho ótimo o faz.

15.3 Difícil até em classes restritas

Depois de Garey e Johnson, a pergunta passou a ser: em que classes o problema continua difícil?

- **Grafos cúbicos.** Hliněný (2006) provou que o problema é NP-completo mesmo para grafos com todos os vértices de grau 3. Isso fecha a esperança de que grau máximo pequeno torne o problema fácil.
- **Sistema de rotação fixo.** Se a ordem cíclica das arestas em torno de cada vértice já vem dada, o problema continua NP-completo (Pelsmajer, Schaefer e Štefankovič).
- **Grafos quase planares.** Um grafo é *quase planar* (no sentido algorítmico) se fica planar ao retirar uma única aresta. Cabello e Mohar (2013) mostraram que calcular cr é NP-difícil mesmo nessa classe, e o resultado vale até para grafos de grau máximo limitado. É surpreendente: inserir *uma* aresta num grafo planar com mergulho *fixo* é fácil (veja a próxima seção), mas escolher o mergulho do grafo planar é o que torna tudo difícil.
- **Largura de árvore limitada.** Muitos problemas NP-difíceis ficam polinomiais em grafos de largura de árvore limitada. Para o número de cruzamentos, Cabello chamou essa questão de "problema em aberto tentador". Hliněný e Khazaliya (ISAAC 2024) responderam negativamente: *o problema é NP-completo mesmo para grafos de largura de caminho no máximo* 12 *e largura de árvore no máximo* 9 (para grafos simples, largura de caminho 13). Logo o problema é para-NP-difícil nesses parâmetros, e decomposições de largura limitada não bastam.

15.4 Quando k é pequeno: tratabilidade por parâmetro fixo

Para $k = 0$ a pergunta é planaridade, que se decide em tempo linear. Para cada k fixo, a força bruta funciona em tempo polinomial: escolha os no máximo k pares de arestas que se cruzam (há $O(m^{2k})$ escolhas), subdivida cada par com um vértice de cruzamento e teste planaridade. Mas o expoente cresce com k. A pergunta FPT é se dá para tirar k do expoente.

Exemplo 15.7. Para decidir se $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \le 1$ por força bruta: cada aresta a_ib_j é independente das $2 \cdot 2 = 4$ arestas que evitam a_i e b_j, de modo que há $9 \cdot 4/2 = 18$ pares independentes. Para cada par, troque o cruzamento por um vértice de grau 4 e teste planaridade. O par $\{a_1b_3, a_3b_2\}$ da Figura 14.3(b) dá um grafo planar; logo $\mathrm{cr}(K_{3,3}) \le 1$, e como $K_{3,3}$ não é planar, $\mathrm{cr}(K_{3,3}) = 1$. Para $\mathrm{cr} \le k$ seriam até $\binom{18}{k}$ testes: o expoente cresce com k.

Teorema 15.8 (Grohe 2004; Kawarabayashi–Reed 2007)**.** *Para cada k fixo, existe um algoritmo que decide se $\mathrm{cr}(G) \le k$ em tempo $f(k) \cdot n^2$ (Grohe) e, mais ainda, em tempo $f(k) \cdot n$ (Kawarabayashi e Reed).*

A ideia de Grohe combina dois fatos. Se G tem largura de árvore grande, então G contém uma grade grande como menor (teorema da grade de Robertson e Seymour); uma grade grande com poucos cruzamentos tem uma região central plana "irrelevante", cuja contração não altera a resposta. Repetindo, a largura de árvore cai até um valor limitado por função de k, e aí a pergunta "$\mathrm{cr} \le k$" pode ser expressa em lógica monádica de segunda ordem e decidida em tempo linear pelo teorema de Courcelle. As funções $f(k)$ obtidas são astronômicas; esses algoritmos têm valor teórico, não prático.

Observação 15.9. Não há contradição com Hliněný–Khazaliya: lá o parâmetro é a largura de caminho e k faz parte da entrada (e cresce com o grafo); aqui k é o parâmetro.

15.5 Inserir uma aresta

Um subproblema central, tanto na teoria quanto nos programas de desenho de grafos, é o seguinte: dado um grafo planar G e uma aresta nova uv, inserir uv cruzando o mínimo possível.

Com o mergulho de G *fixo*, a resposta é um caminho mínimo no grafo dual (Capítulo 8): saia de uma face que contém u, chegue a uma face que contém v, e cada aresta dual atravessada é um cruzamento. Uma busca em largura resolve em tempo linear.

Exemplo 15.10. Tome $G = K_{3,3} - a_3b_3$, que é planar, e insira a_3b_3. Num mergulho plano de G você pode verificar que a_3 e b_3 não estão numa face comum (se estivessem, $K_{3,3}$ seria planar), mas que existe uma face incidente a a_3 e outra incidente a b_3 que são vizinhas no dual. A inserção custa então exatamente 1 cruzamento, e reobtemos $\mathrm{cr}(K_{3,3}) = 1$. O mesmo raciocínio com $K_5 - e$, que é planar, dá $\mathrm{cr}(K_5) = 1$.

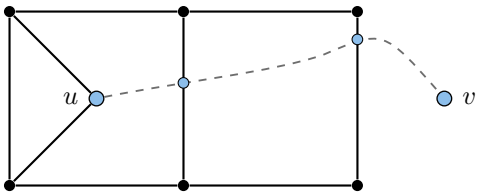


Figura 15.2: Inserção de uma aresta uv (tracejada) num mergulho fixo: cada aresta atravessada corresponde a um passo no grafo dual.

Quando o mergulho é *livre*, é preciso escolher, entre os exponencialmente muitos mergulhos de G, o que permite a inserção mais barata.

Teorema 15.11 (Gutwenger–Mutzel–Weiskircher 2005)**.** *Dado um grafo planar G e um par de vértices u, v, é possível encontrar, em tempo linear, um mergulho de G e uma inserção de uv com o menor número de cruzamentos possível sobre todos os mergulhos.*

A prova usa a árvore SPQR, que codifica todos os mergulhos de um grafo 2-conexo, e um caminho mínimo nessa estrutura. Hliněný e Salazar mostraram que esse número ótimo de inserção aproxima $\mathrm{cr}(G{+}uv)$ dentro de um fator que depende só do grau máximo, e Cabello–Mohar explica por que não dá para fazer muito melhor sem pagar caro: a dificuldade está toda na escolha do mergulho.

15.6 Aproximação

Se não podemos calcular $\mathrm{cr}(G)$, podemos ao menos obter um desenho com, digamos, no máximo o dobro do ótimo? Hoje ninguém sabe. Os fatos conhecidos são:

- **Dificuldade de aproximação.** Cabello (2013) mostrou que o problema é APX-difícil: existe uma constante $c > 1$ tal que aproximar $\mathrm{cr}(G)$ dentro do fator c é NP-difícil (mesmo em grafos cúbicos). Em particular, não há esquema de aproximação polinomial a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.
- **O paradigma do conjunto planarizante.** Quase todos os algoritmos de aproximação (e os programas usados na prática) seguem o mesmo roteiro: encontre um conjunto pequeno E' de arestas cuja remoção deixa G planar, desenhe $G - E'$ sem cruzamentos e reinsira as arestas de E'. Combinado com separadores e com a relação entre cr e largura de bisseção (Capítulo 11), esse roteiro deu fatores de aproximação da forma $O(n^{1/2-\varepsilon}\,\mathrm{poly}(\Delta \log n))$ em grafos de grau máximo Δ. Chuzhoy (2011) exibiu grafos em que qualquer implementação desse roteiro paga $\Omega(\mathrm{OPT}^2)$, o que impede ir além de fatores da ordem de $\sqrt{n}$.
- **Um paradigma novo.** Chuzhoy, Mahabadi e Tan (2020) reduziram o problema ao *número de cruzamentos com sistema de rotação*, em que a ordem cíclica em torno de cada vértice é dada, perdendo só um fator pequeno. Chuzhoy e Tan (STOC 2022) resolveram esse novo problema e obtiveram:

Teorema 15.12 (Chuzhoy–Tan 2022). *Existe um algoritmo aleatorizado polinomial que encontra um desenho de G com no máximo*

$$2^{O\left((\log n)^{7/8} \log\log n\right)} \cdot \mathrm{poly}(\Delta) \cdot \mathrm{cr}(G)$$

cruzamentos, onde Δ é o grau máximo de G.

O fator $2^{O((\log n)^{7/8} \log\log n)}$ cresce mais devagar que qualquer potência n^{ε}: é a primeira aproximação *subpolinomial*, ainda que só para grafos de grau máximo subpolinomial. Entre esse resultado e a APX-dificuldade de Cabello, a lacuna continua enorme.

Exemplo 15.13. Um conjunto planarizante pode ser muito menor que o número de cruzamentos. Em K_n, um subgrafo planar gerador tem no máximo $3n - 6$ arestas, então qualquer conjunto planarizante tem pelo menos $\binom{n}{2} - 3n + 6$ arestas, e esse valor é atingido (retire de K_n tudo o que não está numa triangulação). Para $n = 10$ são $45 - 24 = 21$ arestas, enquanto $\mathrm{cr}(K_{10}) = H(10) = 60$. Reinserir as 21 arestas uma a uma, cada uma pelo caminho mínimo no dual, é exatamente a heurística de planarização; a qualidade do resultado depende de escolher bem o subgrafo planar e a ordem de inserção.

Aproximação constante

Existe um algoritmo polinomial que aproxima $\mathrm{cr}(G)$ dentro de um fator constante, pelo menos para grafos de grau máximo limitado?

15.7 O caso retilíneo: $\exists\mathbb{R}$

Para o número de cruzamentos retilíneo, até a pertinência a NP é duvidosa. O certificado natural seria a lista de coordenadas dos vértices, mas há grafos cujos desenhos retilíneos ótimos exigem coordenadas com número exponencial de dígitos. Bienstock (1991) mostrou que o problema é tão difícil quanto decidir se um arranjo de pseudo-retas pode ser "esticado" num arranjo de retas, e, na linguagem moderna, decidir $\overline{\mathrm{cr}}(G) \le k$ é $\exists\mathbb{R}$-completo (Bienstock; Schaefer). É a mesma classe que contém o reconhecimento de grafos de distância unitária e de grafos de disco unitário, assunto conhecido do leitor deste material.

Em sentido positivo, para grafos densos o retilíneo se aproxima bem:

Teorema 15.14 (Fox–Pach–Suk 2016). *Existe um algoritmo determinístico de tempo $n^{2+o(1)}$ que, dado um grafo G com n vértices, encontra um desenho retilíneo com no máximo $\overline{\mathrm{cr}}(G) + O\big(n^4/(\log\log n)^{\delta}\big)$ cruzamentos, onde $\delta > 0$ é uma constante absoluta.*

Como o lema do cruzamento força $\overline{\mathrm{cr}}(G) = \Omega(n^4)$ quando G tem $\Omega(n^2)$ arestas, isso é uma aproximação $1 + o(1)$ para grafos densos.

15.8 Métodos exatos na prática

Para grafos de tamanho moderado (algumas dezenas a poucas centenas de vértices, quando esparsos), o número de cruzamentos pode ser calculado exatamente por programação inteira. Na formulação de Buchheim, Chimani, Ebner, Gutwenger, Jünger, Klau, Mutzel e Weiskircher, há uma variável binária x_{ef} para cada par de arestas, que vale 1 quando e e f se cruzam; a dificuldade é escrever restrições lineares que garantam que a escolha seja realizável num desenho. A solução usa as restrições de Kuratowski: para cada subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ no grafo planarizado, pelo menos um cruzamento precisa ocorrer. Como há exponencialmente muitas, elas são geradas sob demanda num algoritmo de *branch-and-cut*.

Exemplo 15.15. Para K_6, ignore por um momento a realizabilidade e use só as restrições de Kuratowski do próprio grafo. Há 6 subgrafos isomorfos a K_5 (um para cada vértice retirado), e cada um exige pelo menos um par de arestas independentes cruzado dentro dele. Um par de arestas independentes de K_6 ocupa 4 vértices e está contido em exatamente 2 dos K_5 (escolha um dos 2 vértices restantes para completar). Somando as 6 restrições, cada variável aparece no máximo duas vezes, logo $\sum x_{ef} \ge 6/2 = 3$. A relaxação já fornece a cota correta $\mathrm{cr}(K_6) \ge 3$.

Chimani e coautores refinaram o método com formulações por ordenação simultânea de cruzamentos sobre cada aresta, e o resultado está implementado na biblioteca OGDF. Para a pesquisa matemática, essas ferramentas servem para testar conjecturas em grafos pequenos (por exemplo, famílias de Petersen generalizados) e para buscar desenhos ótimos que sugerem padrões.

Heurísticas

Na prática industrial (diagramas UML, redes metabólicas, leiautes VLSI), usa-se a heurística de *planarização*: extrai-se um subgrafo planar maximal, reinserem-se as arestas uma a uma por caminhos mínimos no dual e aplicam-se rodadas de remoção e reinserção. Os resultados costumam ficar próximos do ótimo em instâncias reais, embora não haja garantia teórica.

Exercícios

Exercício 15.1. Mostre que o problema "$\mathrm{cr}(G) \leq k$?" está em NP. Explique cuidadosamente por que se pode supor $k \leq \binom{m}{2}$ e por que o certificado tem tamanho polinomial em $n + m$.

Exercício 15.2. Descreva um algoritmo que decide se $\mathrm{cr}(G) \leq 1$ em tempo polinomial, usando um teste de planaridade como sub-rotina. Estime o tempo em função de m.

Exercício 15.3. Seja G um grafo plano (com mergulho fixo) e u, v vértices de G. Prove que o menor número de cruzamentos com que se pode inserir uv sem alterar o mergulho é a distância, no grafo dual, entre o conjunto das faces incidentes a u e o conjunto das faces incidentes a v.

Exercício 15.4. Construa um grafo planar G, dois vértices u, v e dois mergulhos de G tais que inserir uv custa 0 cruzamentos num mergulho e pelo menos 3 no outro. O que isso diz sobre a importância da escolha do mergulho?

Exercício 15.5. Seja G um grafo simples com $n \geq 3$ vértices e e uma aresta tal que $G - e$ é planar. Prove que $\mathrm{cr}(G) \leq 2n - 5$.

Exercício 15.6. Usando a Proposição 15.5, mostre que, se cr de grafos simples pudesse ser calculado em tempo polinomial, então o número de cruzamentos ponderado com pesos em $\{1, \ldots, W\}$ poderia ser calculado em tempo polinomial em n e W. Explique por que isso permite que reduções de NP-dificuldade usem arestas com pesos.

CAPÍTULO 16

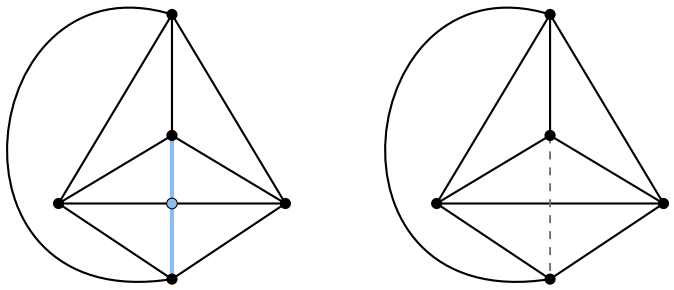
Grafos críticos, produtos e a conjectura de Albertson

Este capítulo reúne três linhas de pesquisa que dialogam com o restante da teoria. A primeira estuda os grafos "mínimos" com um dado número de cruzamentos, que fazem para o número de cruzamentos o papel que K_5 e $K_{3,3}$ fazem para a planaridade. A segunda trata de famílias estruturadas, como produtos de ciclos e hipercubos, para as quais há fórmulas conjecturadas há meio século. A terceira liga número de cruzamentos e coloração, generalizando o teorema das quatro cores.

16.1 Grafos cruzamento-críticos

Definição 16.1. Um grafo G é **k-cruzamento-crítico** se $\mathrm{cr}(G) \geq k$ e $\mathrm{cr}(G - e) < k$ para toda aresta e de G.

Para $k = 1$, os 1-cruzamento-críticos sem vértices de grau 2 são exatamente K_5 e $K_{3,3}$: pelo teorema de Kuratowski (Teorema 8.2), todo grafo não planar contém uma subdivisão de um deles, e retirar uma aresta de K_5 ou $K_{3,3}$ dá um grafo planar. Assim, os grafos críticos são o análogo natural das obstruções de Kuratowski: todo grafo com $\mathrm{cr}(G) \geq k$ contém um subgrafo k-cruzamento-crítico, obtido retirando arestas enquanto o número de cruzamentos permanece pelo menos k.



K_5: 1 cruzamento $\qquad$ $K_5 - e$: planar

Figura 16.1: K_5 é 1-cruzamento-crítico: no desenho com um cruzamento, retirar a aresta destacada (tracejada à direita) deixa um desenho plano. Por simetria, o mesmo vale para qualquer aresta.

Exemplo 16.2. O grafo de Petersen P tem $\mathrm{cr}(P) = 2$, e a cota inferior sai da cintura. Como P não tem ciclos de comprimento 3 nem 4, todo subgrafo plano de P com $n = 10$ vértices tem faces de tamanho pelo menos 5, logo no máximo $\frac{5}{3}(n-2) = \frac{40}{3}$ arestas, isto é, no máximo 13. Num desenho ótimo de P, retirar uma aresta de cada cruzamento deixa um grafo plano; como

P tem 15 arestas, foram retiradas pelo menos 2, e $\mathrm{cr}(P) \geq 2$. A Figura 16.2 mostra um desenho com 2 cruzamentos. O grafo de Petersen é 2-cruzamento-crítico. Retirando uma aresta ficam 14 arestas e a mesma conta dá só $\mathrm{cr}(P - e) \geq 1$; e de fato $\mathrm{cr}(P - e) = 1$, como mostra a busca do Exercício 15.2: trocando um par conveniente de arestas independentes de $P - e$ por um vértice de grau 4, obtém-se um grafo planar. Como P é aresta-transitivo, isso vale para toda aresta.

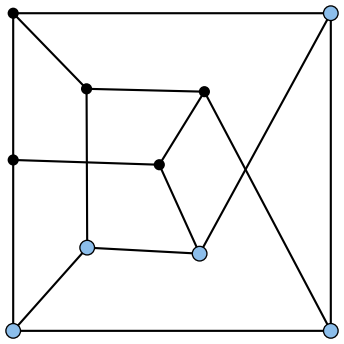


Figura 16.2: Um desenho retilíneo do grafo de Petersen com 2 cruzamentos (vértices do ciclo $u_0u_1u_2u_3u_4$ em preto, vértices $v_0, \ldots, v_4$ em azul claro), obtido por busca computacional que maximiza a distância entre vértices e arestas.

A primeira surpresa é que, para $k \geq 2$, não existe uma lista finita.

Exemplo 16.3. $K_{3,3}$ também é 1-cruzamento-crítico. Retirando qualquer aresta, digamos a_3b_3, os vértices a_3 e b_3 ficam com grau 2; suprimindo-os, sobra o grafo nos vértices a_1, a_2, b_1, b_2 com as arestas a_ib_j e as novas arestas b_1b_2 (vinda de a_3) e a_1a_2 (vinda de b_3): é K_4, que é planar. Logo $K_{3,3} - e$ é uma subdivisão de K_4 e é planar. Em contraste, $K_{3,3}$ acrescido de um vértice novo ligado a a_1 continua com $\mathrm{cr} = 1$, mas não é crítico: a aresta pendente pode ser retirada sem baixar o número de cruzamentos.

Teorema 16.4 (Širáň 1984; Kochol 1987)**.** *Para todo $k \geq 2$ existe uma família infinita de grafos k-cruzamento-críticos; Kochol obteve famílias infinitas de grafos simples e 3-conexos.*

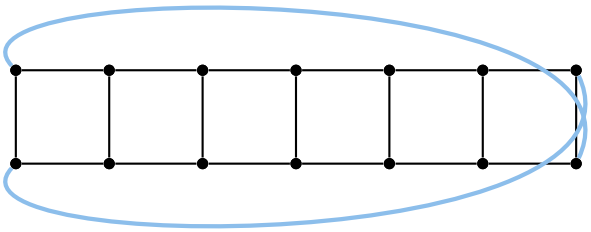


Figura 16.3: Uma escada fechada com uma torção (faixa de Möbius discreta). Construções com várias torções desse tipo, coladas com cuidado, produzem famílias infinitas de grafos cruzamento-críticos: o comprimento da escada cresce, mas o número de cruzamentos forçados permanece o mesmo.

Apesar da infinidade, os grafos críticos têm estrutura muito restrita.

Teorema 16.5 (Richter–Thomassen 1993)**.** *Todo grafo k-cruzamento-crítico satisfaz* $\mathrm{cr}(G) \leq \frac{5}{2}k + 16$.

Ou seja, retirar uma aresta nunca derruba o número de cruzamentos de um patamar muito

alto para baixo de k; um grafo crítico não pode ter número de cruzamentos muito maior que o patamar que define a criticidade.

Exemplo 16.6. K_6 é 3-cruzamento-crítico. De fato $\mathrm{cr}(K_6) = 3$, e $K_6 - e$ tem 14 arestas e 6 vértices, de modo que a cota linear dá só $\mathrm{cr}(K_6 - e) \geq 14 - 12 = 2$. Para ver que $\mathrm{cr}(K_6 - e) \leq 2$, use o desenho 1-planar da Figura 14.4: retirar a aresta ad elimina o cruzamento com bc e restam 2. Como K_6 é aresta-transitivo, vale para toda aresta.

Teorema 16.7 (Hliněný 2003)**.** *Para cada k, os grafos k-cruzamento-críticos têm largura de caminho limitada por uma função de k.*

Intuitivamente: um grafo crítico grande é "comprido e fino", formado por muitos pedaços pequenos (*ladrilhos*) encaixados em sequência ao longo de uma faixa, como na Figura 16.3. Essa intuição virou teorema em duas etapas.

- Bokal, Oporowski, Richter e Salazar (2016) caracterizaram os grafos 2-cruzamento-críticos: a menos de um número finito de exceções 3-conexas, os grafos 2-cruzamento-críticos 3-conexos que contêm uma subdivisão de uma escada de Möbius suficientemente grande são obtidos encadeando ladrilhos de uma lista explícita e finita, fechados com uma torção.
- Dvořák, Hliněný e Mohar (2018) descreveram a estrutura dos k-cruzamento-críticos para todo k: um grafo k-cruzamento-crítico suficientemente grande é obtido de um número limitado (em função de k) de "faixas" formadas por ladrilhos de uma família finita, o que permite, em princípio, gerar todos eles.

16.1.1 O grau máximo de grafos críticos

Richter e Salazar perguntaram se os grafos k-cruzamento-críticos têm grau máximo limitado por uma função de k. A resposta depende de k de um modo inesperado.

Teorema 16.8 (Dvořák–Mohar 2010)**.** *Para todo $k \geq 171$ existem grafos k-cruzamento-críticos com grau máximo arbitrariamente grande.*

Teorema 16.9 (Bokal, Dvořák, Hliněný, Leaños, Mohar e Wiedera)**.** *Os grafos k-cruzamento-críticos têm grau máximo limitado se e somente se $k \leq 12$.*

O limiar 12 fecha a questão com precisão: para $k \geq 13$ há construções com grau máximo ilimitado, e para $k \leq 12$ a estrutura por ladrilhos impede vértices de grau grande.

16.2 Produtos de ciclos

O produto cartesiano $G \,\square\, H$ tem vértices (g, h), e (g, h) é adjacente a (g', h') quando $g = g'$ e $hh' \in E(H)$, ou $h = h'$ e $gg' \in E(G)$. O produto $C_m \,\square\, C_n$ é a grade toroidal $m \times n$: ela se mergulha no toro sem cruzamentos, mas não no plano para $m, n \geq 3$.

O desenho da Figura 16.4 generaliza: com n cópias de C_m dispostas e m ciclos concêntricos de comprimento n, cada uma das n arestas de fechamento atravessa os $m - 2$ ciclos intermediários, totalizando $(m - 2)n$ cruzamentos.

Conjectura 16.10 (Harary–Kainen–Schwenk 1973)**.** *Para $3 \leq m \leq n$, $\mathrm{cr}(C_m \,\square\, C_n) = (m-2)n$.*

A conjectura foi demonstrada para $m \leq 7$, em uma série de trabalhos: $m = 3$ (Ringeisen e

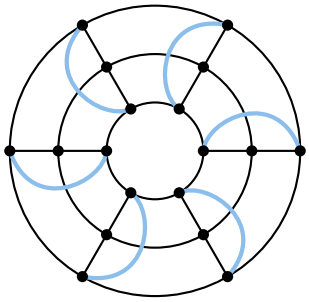
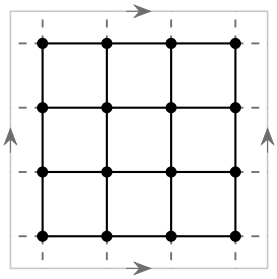


Figura 16.4: Desenho esquemático de $C_3 \,\square\, C_6$: três ciclos concêntricos de comprimento 6 ligados por raios; as arestas que fecham os ciclos de comprimento 3 (em azul) ligam o anel externo ao interno por dentro de um setor, cruzando só o ciclo do meio. Desenhos desse tipo dão $(m-2)n$ cruzamentos.

Beineke, 1978), $m = 4$ (Beineke e Ringeisen, 1980), $m = 5$ (Klešč, Richter e Stobert, 1996), $m = 6$ (Richter e Salazar, 2001) e $m = 7$ (Adamsson e Richter, 2004). O resultado geral mais forte é:

Teorema 16.11 (Glebsky–Salazar 2004)**.** *Para todo $m \geq 3$, $\mathrm{cr}(C_m \,\square\, C_n) = (m-2)n$ sempre que $n \geq m(m+1)$.*

Assim, para cada m fixo, a conjectura vale exceto possivelmente para finitos valores de n; o que falta é a faixa $m \leq n < m(m+1)$ com $m \geq 8$.



$C_4 \,\square\, C_4$ no toro

Figura 16.5: A grade toroidal $C_4 \,\square\, C_4 \cong Q_4$: lados opostos do quadrado são identificados (setas), e as arestas tracejadas continuam do lado oposto. Não há cruzamentos; as 16 faces são quadrados.

Exemplo 16.12. Para $C_3 \,\square\, C_4$ ($m = 3$, $n = 4$) a conjectura prevê $(3-2)\cdot 4 = 4$ cruzamentos, valor confirmado pelo caso $m = 3$ (Ringeisen e Beineke). O desenho da Figura 16.4, adaptado para quatro raios, realiza esse número: são 4 arestas de fechamento, cada uma cruzando o único ciclo intermediário uma vez. Para $C_4 \,\square\, C_4$ a previsão é $2 \cdot 4 = 8$, que coincide com $\mathrm{cr}(Q_4) = 8$, já que $Q_4 \cong C_4 \,\square\, C_4$ (escreva cada vértice de Q_4 como um par de sequências de 2 bits e observe que $Q_2 \cong C_4$).

16.3 Petersen generalizados e hipercubos

O *grafo de Petersen generalizado* $P(N,k)$ tem vértices $u_0,\dots,u_{N-1},v_0,\dots,v_{N-1}$, arestas u_iu_{i+1} (ciclo externo), u_iv_i (raios) e v_iv_{i+k} (ciclo interno estrelado), índices módulo N. O grafo de Petersen é $P(5,2)$, com $\mathrm{cr} = 2$. Algumas famílias têm número de cruzamentos determinado: Richter e Salazar (2002) calcularam $\mathrm{cr}(P(N,3))$ para todo N, e Fiorini e Gauci mostraram que

$\mathrm{cr}(P(3k,k)) = k$ para $k \geq 4$. Em geral, até $\mathrm{cr}(P(N,4))$ resiste.

O hipercubo Q_n tem como vértices as sequências binárias de comprimento n, adjacentes quando diferem em uma coordenada. Em placas de processamento paralelo e em redes de interconexão, Q_n aparece como topologia de comunicação, e o seu número de cruzamentos mede o custo de colocá-lo numa camada.

Para $n \leq 3$, Q_n é planar (Q_3 é o cubo). Eggleton e Guy (1970) anunciaram um desenho de Q_n com

$$\frac{5}{32}\,4^n - \left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor 2^{n-2}$$

cruzamentos, mas a construção continha uma lacuna, e Erdős e Guy (1973) conjecturaram que esse número fosse exatamente $\mathrm{cr}(Q_n)$. A história desde então:

- $\mathrm{cr}(Q_4) = 8$ (Dean e Richter, 1995), usando que $Q_4 \cong C_4 \,\square\, C_4$; a fórmula dá $40 - 32 = 8$.
- Madej (1991) desenhou Q_5 com 56 cruzamentos e obteve a cota assintótica $\mathrm{cr}(Q_n) \leq 4^n/6 + o(4^n)$; Faria e de Figueiredo (2000) baixaram para $\frac{165}{1024}4^n$.
- Faria, de Figueiredo, Sýkora e Vrťo (*Journal of Graph Theory* 59, 2008) construíram um desenho com exatamente o número de Eggleton e Guy, confirmando-o como cota superior.
- Yang, Wang, Wang e Zhou (preprint, arXiv 1201.4700, 2012) desenharam Q_7 com 1744 cruzamentos, menos que os 1760 da fórmula, e construíram desenhos de Q_n abaixo da fórmula para todo $n > 6$; com isso a forma exata da conjectura de Erdős e Guy é falsa (o fato é registrado no levantamento de Clancy, Haythorpe e Newcombe, 2019).
- A melhor cota inferior é $\mathrm{cr}(Q_n) \geq 4^n/20 + O(n^2 2^n)$ (Sýkora e Vrťo, 1993), obtida pela técnica de imersão de um grafo completo cujas arestas viram caminhos curtos de Q_n (Capítulo 11).

Conjectura 16.13 (forma assintótica). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cr}(Q_n)}{4^n} = \frac{5}{32}.$

16.4 A conjectura de Albertson

O teorema das quatro cores diz que todo grafo planar tem $\chi \leq 4$. Equivalentemente: se $\chi(G) \geq 5$, então $\mathrm{cr}(G) \geq 1 = \mathrm{cr}(K_5)$. Albertson propôs em 2007 uma generalização natural.

Conjectura 16.14 (Albertson 2007). *Se $\chi(G) \geq r$, então $\mathrm{cr}(G) \geq \mathrm{cr}(K_r)$.*

A conjectura seria imediata se todo grafo r-cromático contivesse uma subdivisão de K_r, pois então $\mathrm{cr}(G) \geq \mathrm{cr}(K_r)$. Essa afirmação mais forte é a conjectura de Hajós, que é falsa para $r \geq 7$ (Catlin, 1979). Por isso a conjectura de Albertson exige argumentos genuinamente métricos.

16.4.1 Grafos cromáticos sem cliques grandes

Para sentir a força da conjectura, é bom olhar grafos de número cromático alto que não contêm K_r. A construção de Mycielski transforma um grafo G com vértices $u_1, \dots, u_n$ em $M(G)$: acrescente cópias $w_1, \dots, w_n$, ligue w_i a todos os vizinhos de u_i e acrescente um vértice z ligado a todos os w_i. Ela preserva a ausência de triângulos e aumenta o número cromático em exatamente 1. Começando com K_2, obtém-se C_5, depois o grafo de Grötzsch ($\chi = 4$), depois um grafo com $\chi = 5$, e assim por diante.

Exemplo 16.15. Se G tem n vértices e m arestas, $M(G)$ tem $2n+1$ vértices e $3m+n$ arestas: cada aresta u_iu_j gera u_iu_j, w_iu_j e w_ju_i, e z ganha n arestas. Partindo de C_5 $(5,5)$: o grafo

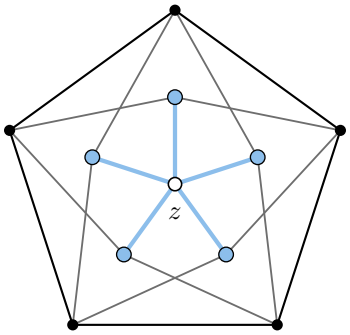


Figura 16.6: O grafo de Grötzsch $M(C_5)$: 11 vértices, 20 arestas, sem triângulos e com $\chi = 4$. Em preto o C_5 original, em cinza as arestas $w_i u_{i\pm1}$, em azul a estrela de z.

de Grötzsch tem $(11, 20)$ e o seguinte, M_5, tem $(23, 71)$. Como esses grafos não têm triângulos, vale $\mathrm{cr} \geq m - 2n + 4$ (Exercício 16.5). Para o grafo de Grötzsch: $\mathrm{cr} \geq 20 - 22 + 4 = 2$. Para M_5, que tem $\chi = 5$: $\mathrm{cr}(M_5) \geq 71 - 46 + 4 = 29$, muito acima de $\mathrm{cr}(K_5) = 1$. A conjectura de Albertson é "folgada" nesses exemplos; a dificuldade real está em grafos r-críticos densos, com poucos vértices a mais que r.

16.4.2 A ordem de grandeza está certa

Proposição 16.16. *Existe uma constante $c > 0$ tal que $\mathrm{cr}(G) \geq c\,\chi(G)^4$ para todo grafo G com $\chi(G) \geq 9$. Em particular, $\chi(G) = O\big(\mathrm{cr}(G)^{1/4}\big)$ para todo grafo com pelo menos um cruzamento.*

Demonstração. Seja $r = \chi(G)$ e $H \subseteq G$ um subgrafo r-crítico, isto é, com $\chi(H) = r$ e $\chi(H - e) < r$ para toda aresta e. Todo vértice de H tem grau pelo menos $r - 1$: se v tivesse grau menor, uma $(r-1)$-coloração de $H - v$ se estenderia a v. Sejam $n = |V(H)| \geq r$ e $m = |E(H)| \geq n(r-1)/2$. Para $r \geq 9$, $m \geq 4n$ e o lema do cruzamento (Teorema 11.1, na forma $\mathrm{cr} \geq m^3/(64n^2)$) dá

$$\mathrm{cr}(G) \geq \mathrm{cr}(H) \geq \frac{m^3}{64n^2} \geq \frac{(r-1)^3 n^3}{512\, n^2} = \frac{(r-1)^3 n}{512} \geq \frac{(r-1)^3\, r}{512}.$$

Como $(r-1)^3 r \geq \left(\tfrac{8}{9}\right)^3 r^4$ para $r \geq 9$, obtemos a cota com $c = 8^3/(9^3 \cdot 512) = 1/729$. ∎

Como $\mathrm{cr}(K_r) = \Theta(r^4)$ (Capítulo 12), a proposição mostra que a conjectura é verdadeira a menos de uma constante multiplicativa. O desafio é a constante exata.

Exemplo 16.17. Para $r = 9$ a proposição dá $\mathrm{cr}(G) \geq 9^4/729 = 9$, enquanto a conjectura pede $\mathrm{cr}(G) \geq \mathrm{cr}(K_9) = H(9) = 36$. Para $r = 20$, a proposição dá $20^4/729 = 160000/729 < 220$, contra $H(20) = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 1620$. As constantes do argumento simples ficam longe; é isso que obriga ao uso de cotas finas para grafos k-planares, para grafos críticos e para amostragem.

16.4.3 Histórico

- $r \leq 4$: trivial. $r = 5$: equivalente ao teorema das quatro cores.
- $r = 6$: Oporowski e Zhao.
- $r \leq 12$: Albertson, Cranston e Fox (2009).
- $r \leq 16$: Barát e Tóth (2010).

- $r \leq 18$: Ackerman (2019), como corolário da cota $6n - 12$ para grafos 4-planares e da cota linear $\operatorname{cr}(G) \geq 5m - \frac{139}{6}(n-2)$.
- $r \leq 24$: Cranston, em preprint de dezembro de 2025 (arXiv 2512.08020), que também exclui contraexemplos r-críticos com $1{,}212r \leq |V| \leq 1{,}768r$ ou $|V| \geq 2{,}812r$.

A estratégia comum tem dois passos. Primeiro, cotas inferiores para o número de arestas de grafos r-críticos com n vértices (Gallai, Kostochka–Stiebitz e outros), que melhoram a cota trivial $m \geq n(r-1)/2$ quando n é próximo de r. Segundo, cotas inferiores para cr em função de m e n: lineares (vindas de grafos k-planares), o lema do cruzamento e argumentos de amostragem aleatória de subgrafos. Quando n é muito grande em relação a r, o lema do cruzamento ganha folgadamente; quando n é próximo de r, o grafo é quase completo e se buscam subdivisões de K_r (Barát e Tóth mostraram que um grafo r-crítico com no máximo $r+4$ vértices contém subdivisão de K_r). A dificuldade concentra-se na faixa intermediária, n entre cerca de $1{,}2r$ e $3r$; Fox, Pach e Suk mostraram que não há contraexemplos com $n \leq (1{,}64 - o(1))r$.

Um preprint de 2026

Em setembro de 2026, Ankan Sadhu depositou no arXiv o preprint *A Proof of Albertson's Conjecture* (arXiv 2609.01682; versão 3 de outubro de 2026), que anuncia a demonstração para todo r. Segundo o resumo, a prova usa o resultado de Ackerman para $r \leq 18$ e, para $r \geq 19$, combina cotas de arestas sensíveis a cliques, amostragem de cliques máximas e uma construção de imersões, com as desigualdades numéricas restantes verificadas em aritmética racional exata por um certificado computacional reproduzível. Até a data desta apostila, o trabalho não tem publicação revisada por pares, e a comunidade ainda não se pronunciou sobre ele. Trate a conjectura como *possivelmente resolvida, aguardando verificação.*

Exercícios

Exercício 16.1. Prove que todo grafo com $\operatorname{cr}(G) \geq k$ contém um subgrafo k-cruzamento-crítico. Depois prove que, se e é uma ponte de G, então $\operatorname{cr}(G) = \operatorname{cr}(G - e)$, e conclua que um grafo k-cruzamento-crítico, com $k \geq 1$, não tem pontes.

Exercício 16.2. Verifique que K_5 e $K_{3,3}$ são 1-cruzamento-críticos e que qualquer subdivisão de um deles também é. Conclua que, para $k = 1$, existem infinitos grafos críticos, mas apenas dois sem vértices de grau 2.

Exercício 16.3. Mostre que $\operatorname{cr}(C_3 \,\square\, C_3) \leq 3$ exibindo um desenho, e prove que $C_3 \,\square\, C_3$ não é planar usando a fórmula de Euler. (Atenção: a cota $m \leq 3n - 6$ sozinha não basta.)

Exercício 16.4. Prove que $C_m \,\square\, C_n$ se mergulha no toro sem cruzamentos e calcule, pela fórmula de Euler para o toro, o número de faces desse mergulho. Usando o Exercício 16.3, mostre que $C_m \,\square\, C_n$ tem gênero exatamente 1 quando $m, n \geq 3$.

Exercício 16.5. Prove que todo grafo sem triângulos com $n \geq 3$ vértices e m arestas satisfaz $\operatorname{cr}(G) \geq m - 2n + 4$. Aplique a Q_4 para obter $\operatorname{cr}(Q_4) \geq 4$ e explique por que a cota geral $\operatorname{cr} \geq m - 3n + 6$ (Teorema 10.6) não dá informação nesse caso.

Exercício 16.6. Prove que todo grafo r-crítico tem grau mínimo pelo menos $r - 1$ e é 2-conexo para $r \geq 3$.

Exercício 16.7. Mostre que a conjectura de Albertson para $r = 6$ implica: todo grafo com $\mathrm{cr}(G) \leq 2$ tem $\chi(G) \leq 5$. Depois prove esse último fato diretamente a partir do teorema das quatro cores, retirando um vértice de cada cruzamento. (Pode usar que $\mathrm{cr}(K_{4,4}) = 4$.)

CAPÍTULO 17

Panorama 2006–2026: problemas resolvidos e problemas em aberto

Este capítulo final organiza o que foi visto nos capítulos 10 a 16 em duas partes. A primeira é uma cronologia comentada dos avanços dos últimos vinte anos. A segunda é uma lista de problemas em aberto, cada um com enunciado preciso, o estado atual do conhecimento e as abordagens que parecem promissoras. Se você pretende pesquisar na área, esta é a parte para guardar.

17.1 Cronologia

A tabela a seguir reúne resultados publicados (ou, quando indicado, depositados como preprint) entre 2006 e 2026. Ela não é exaustiva: privilegia os resultados que mudaram o estado de um problema central.

Ano	Resultado	Autores
2006	Grafos 3-planares têm no máximo $5{,}5n - 11$ arestas; constante $1/31{,}1$ no lema do cruzamento	Pach, Radoičić, Tardos, Tóth
2006	Número de cruzamentos é NP-completo para grafos cúbicos	Hliněný
2006	Cotas por programação semidefinida para $\mathrm{cr}(K_{7,n})$	de Klerk, Maharry, Pasechnik, Richter, Salazar
2007	Cota por SDP para $\mathrm{cr}(K_{9,n})$; $\lim \mathrm{cr}(K_{n,n})/Z(n,n) > 0{,}859$	de Klerk, Pasechnik, Schrijver
2007	$\mathrm{cr}(K_{11}) = 100$ (com computador), logo $\mathrm{cr}(K_{12}) = 150$	Pan, Richter
2007	Algoritmo linear para decidir $\mathrm{cr}(G) \le k$, k fixo	Kawarabayashi, Reed
2007	Grafos quase-planares simples: no máximo $6{,}5n - 20$ arestas	Ackerman, Tardos
2008	$\mathrm{ocr} \neq \mathrm{pcr}$: família com $\mathrm{ocr} < 0{,}867\ \mathrm{pcr}$	Pelsmajer, Schaefer, Štefankovič
2008	Cota inferior $0{,}379972\binom{n}{4}$ para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$	Ábrego, Fernández-Merchant, Leaños, Salazar
2008	Desenho de Q_n com o número conjecturado por Erdős e Guy	Faria, Figueiredo, Sýkora, Vrťo
2009	Grafos 4-quase-planares têm $O(n)$ arestas	Ackerman
2009	Conjectura de Albertson para $r \le 12$	Albertson, Cranston, Fox
2010	Conjectura de Albertson para $r \le 16$	Barát, Tóth
2010	Grafos k-cruzamento-críticos com grau máximo ilimitado ($k \ge 171$)	Dvořák, Mohar
2011	Grafos RAC: no máximo $4n - 10$ arestas	Didimo, Eades, Liotta
2011	Thrackles: no máximo $\frac{167}{117}n$ arestas	Fulek, Pach

Ano	Resultado	Autores
2012	Número de cruzamentos em 2 páginas de K_n é $H(n)$	Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, Ramos, Salazar
2012	Desenhos de Q_n, $n > 6$, abaixo da fórmula de Erdős–Guy (preprint)	Yang, Wang, Wang, Zhou
2013	NP-difícil para grafos planares mais uma aresta	Cabello, Mohar
2013	APX-dificuldade do número de cruzamentos	Cabello
2013	Para cada m, a conjectura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ se reduz a finitos casos	Christian, Richter, Salazar
2014	Cota superior $0{,}380473\binom{n}{4}$ para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$	Fabila-Monroy, López
2014	Harary–Hill vale para desenhos *shellable*	Ábrego, Aichholzer, Fernández-Merchant, Ramos, Salazar
2014	$\mathrm{cr} = O(\mathrm{pcr}^{3/2}\log^2 \mathrm{pcr})$	Matoušek
2016	Caracterização dos grafos 2-cruzamento-críticos	Bokal, Oporowski, Richter, Salazar
2016	Aproximação de $\overline{\mathrm{cr}}$ com erro $O(n^4/(\log\log n)^{\delta})$	Fox, Pach, Suk
2018	Estrutura dos grafos k-cruzamento-críticos	Dvořák, Hliněný, Mohar
2019	$\lim \mathrm{cr}(K_n)/H(n) > 0{,}9855$ via álgebras de flags	Balogh, Lidický, Salazar
2019	Grafos 4-planares: $6n-12$ arestas; lema do cruzamento com $1/29$; Albertson para $r \le 18$	Ackerman
2019	Contraexemplo à forma forte de Hanani–Tutte no gênero 4	Fulek, Kynčl
2019	Thrackles: no máximo $1{,}3984n$ arestas	Fulek, Pach
2021	$\mathrm{cr}(K_{13}) = 225$ e $\mathrm{cr}(K_{14}) = 315$ (prova computacional)	Aichholzer
2022	Primeira aproximação subpolinomial para cr em grafos de grau baixo	Chuzhoy, Tan
2022	Árvores planas de tamanho $(\log n)^{1/4-o(1)}$ em desenhos simples de K_n	Suk, Zeng
2023	$\mathrm{cr}(K_{n,n}) \ge 0{,}9118\,Z(n,n) + o(n^4)$; retilíneo $\ge 0{,}987\,Z(n,n)$	Balogh, Lidický, Norin, Pfender, Salazar, Spiro
2023	Emparelhamento plano $\Omega(\sqrt{n})$ e ciclo plano $\Omega(\log n/\log\log n)$ em desenhos simples de K_n	Aichholzer, García, Tejel, Vogtenhuber, Weinberger
2024	NP-completo para largura de caminho 12 e largura de árvore 9	Hliněný, Khazaliya
2024	Lema do cruzamento com constante $1/27{,}48$	Büngener, Kaufmann
2024	Conjectura de Rafla para desenhos convexos	Bergold, Felsner, Reddy, Orthaber, Scheucher
2025	Albertson para $r \le 24$ (preprint)	Cranston
2026	Prova anunciada da conjectura de Albertson para todo r (preprint)	Sadhu

17.1.1 Leitura da cronologia

Três movimentos aparecem com clareza.

Computação a serviço da prova. Os valores exatos de $\mathrm{cr}(K_{11})$, $\mathrm{cr}(K_{13})$ e o progresso assintótico para K_n e $K_{n,n}$ vieram de métodos computacionais: enumeração exaustiva de sistemas

de rotação, programação semidefinida e álgebras de flags. Uma prova por álgebras de flags tem a forma de um certificado (uma combinação de quadrados de densidades de subdesenhos pequenos) que pode ser conferido independentemente. O mesmo espírito aparece no preprint de Sadhu sobre a conjectura de Albertson, que vem acompanhado de um verificador em aritmética racional exata. Nada disso torna a área "computacional": em cada caso, a parte teórica decide quais objetos finitos bastam verificar.

Densidade e cruzamentos andam juntos. As cotas lineares para grafos k-planares ($k = 1, \dots, 4$) e as constantes do lema do cruzamento melhoraram em tandem, e a conjectura de Albertson avançou como consequência das duas. O trabalho de Büngener e Kaufmann mostra que o método ainda não se esgotou: proibindo configurações locais específicas dos grafos 2- e 3-planares mais densos, eles obtiveram cotas lineares melhores e a constante $1/27{,}48$.

Dificuldade algorítmica cada vez mais fina. Em 2006 sabia-se que o problema era difícil para grafos cúbicos; em 2013, para grafos a uma aresta da planaridade; em 2024, para largura de árvore limitada. Do lado positivo, a aproximação subpolinomial de Chuzhoy e Tan mudou o paradigma de projeto de algoritmos para o problema.

Exemplo 17.1. Os números ajudam a medir as lacunas. Como $H(n)$ é, a menos de termos de grau menor, $n^4/64$, e $\binom{n}{4}$ é $n^4/24$, a razão $H(n)/\binom{n}{4}$ tende a $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$. Já a constante retilínea satisfaz $q^* > 0{,}379972 > \frac{3}{8}$. Assim, para n grande, $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) > \mathrm{cr}(K_n)$: desenhar K_n com segmentos custa assintoticamente mais do que com curvas, mesmo que a Conjectura de Harary–Hill seja falsa, pois $\mathrm{cr}(K_n) \le H(n)$ sempre vale. Os valores de $H(n)$ para os próximos casos em aberto são $H(15) = \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 = 441$ e $H(16) = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 588$.

Exemplo 17.2. Para $K_{n,n}$, a conjectura de Zarankiewicz prevê $Z(n,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^2$. Para $n = 7$ isso dá $3^4 = 81$ (valor confirmado por Woodall); para $n = 9$, $4^4 = 256$, ainda sem prova. A cota assintótica de 2023 garante, para n grande, que nenhum desenho de $K_{n,n}$ tem menos que $0{,}9118\, Z(n,n)$ cruzamentos, a menos de termos de ordem inferior a n^4.

17.2 Problemas em aberto

1. Conjectura de Harary–Hill

Enunciado. Para todo $n \ge 3$, $\mathrm{cr}(K_n) = H(n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$.
O que se sabe. Verdadeira para $n \le 12$ (Guy; Pan e Richter); a prova computacional de Aichholzer (2021) estende a $n \le 14$. Verdadeira para desenhos em 2 páginas, cilíndricos, *shellable*, *bishellable* e monótonos (Balko, Fulek e Kynčl). Assintoticamente, $\mathrm{cr}(K_n) \ge 0{,}9855\, H(n)$ para n grande.
Por onde atacar. Estender a enumeração a K_{15} (ímpar; pela paridade de Kleitman, o valor de K_{16} viria a seguir pela contagem do Exercício 17.1); refinar o certificado de álgebras de flags com subdesenhos maiores; encontrar uma classe de desenhos que contenha todos os ótimos e para a qual o método *shellable* funcione.

2. Conjectura de Zarankiewicz

Enunciado. $\mathrm{cr}(K_{m,n}) = Z(m,n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.
O que se sabe. Verdadeira para $\min(m,n) \le 6$ (Kleitman, 1970) e para $K_{7,n}$ e $K_{8,n}$ com $n \le 10$ (Woodall, 1993). Para cada m, o caso $K_{m,n}$ se reduz a uma verificação finita (Christian, Richter e Salazar, 2013). Assintoticamente, $\mathrm{cr}(K_{n,n}) \ge 0{,}9118\, Z(n,n)$ (Balogh, Lidický, Norin, Pfender, Salazar e Spiro, 2023), melhorando 0,905 (Norin e Zwols) e 0,8878

(Brosch e Polak, por SDP). Mesmo a forma fraca, $\mathrm{cr}(K_{n,n}) = n^4/16 + o(n^4)$, está em aberto.
Por onde atacar. O mesmo grupo de 2023 mostrou que desenhos de $K_{n,n}$ sem certo subdesenho local de $K_{3,4}$ com dois cruzamentos já têm $Z(n,n)+o(n^4)$ cruzamentos: entender esse subdesenho proibido parece ser o caminho para a forma assintótica.

3. A constante do lema do cruzamento

Enunciado. Determinar $c^* = \lim \min\{\mathrm{cr}(G)\, n^2/m^3\}$, o melhor valor no lema do cruzamento quando $n \ll m \ll n^2$.
O que se sabe. A constante existe nesse regime (Pach, Spencer e Tóth) e satisfaz $1/27{,}48 \le c^* \le 0{,}09$, sendo a cota superior dada por construções explícitas de Pach e Tóth.
Por onde atacar. Cotas lineares mais justas para grafos k-planares com $k \ge 5$, ou para $k = 2, 3$ evitando mais configurações locais, entram diretamente no argumento probabilístico.

4. Pares que se cruzam

Enunciado. Para todo G, $\mathrm{pcr}(G) = \mathrm{cr}(G)$?
O que se sabe. $\mathrm{cr} = O(\mathrm{pcr}^{3/2} \log^2 \mathrm{pcr})$ (Matoušek, a partir de Tóth); $\mathrm{ocr} \neq \mathrm{pcr}$ em geral; $\mathrm{ocr} = \mathrm{cr}$ quando $\mathrm{ocr} \le 3$.
Por onde atacar. Mesmo $\mathrm{cr} = O(\mathrm{pcr})$ seria um avanço enorme. Separadores para grafos de cordas já sem fator logarítmico (Lee) sugerem que o expoente $3/2$ é o limite do método atual, e que é preciso uma ideia de redesenho que altere o conjunto de pares cruzantes.

5. A constante retilínea

Enunciado. Determinar $q^* = \lim \overline{\mathrm{cr}}(K_n)/\binom{n}{4}$, equivalentemente, a menor probabilidade de que 4 pontos escolhidos ao acaso de uma distribuição no plano estejam em posição convexa (problema dos quatro pontos de Sylvester).
O que se sabe. $0{,}379972 < q^* < 0{,}380473$; valores exatos de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ são conhecidos para $n \le 27$ e $n = 30$. Um projeto contínuo de Aichholzer e coautores tem baixado a cota superior; não se sabe sequer se q^* é maior que a constante pseudolinear correspondente.
Por onde atacar. A cota inferior atual vem de cotas para o número de $(\le k)$-arestas combinadas com a propriedade de 3-decomponibilidade dos conjuntos ótimos; melhorá-la exige informação estrutural nova sobre esses conjuntos.

6. Conjectura de Rafla

Enunciado. Todo desenho simples de K_n contém um ciclo hamiltoniano plano.
O que se sabe. Verdadeira para desenhos convexos (2024) e para desenhos torcidos generalizados (caminho hamiltoniano plano; ciclo para n ímpar). Em geral, apenas caminhos planos de comprimento $\Omega(\log n/\log\log n)$ e emparelhamentos planos de tamanho $\Omega(\sqrt{n})$. Variante de Aichholzer, Orthaber e Vogtenhuber: entre quaisquer dois vértices existe um caminho hamiltoniano plano.
Por onde atacar. Hierarquia de convexidade de Arroyo, McQuillan, Richter e Salazar; o caso dos desenhos que não são convexos e não são torcidos é o centro da dificuldade.

7. Conjectura de Conway sobre thrackles

Enunciado. Todo thrackle com n vértices tem no máximo n arestas.
O que se sabe. Cota $1{,}393(n-1)$ (Xu); verdadeira para thrackles retilíneos e para thrackles "externos"; basta verificá-la para os chamados halteres (Woodall).
Por onde atacar. Abordagens computacionais (Fulek e Pach) reduzem a melhoria da

constante a verificações finitas de planaridade; uma prova completa provavelmente exige entender thrackles de ciclos pares e ímpares unidos por um caminho.

8. Grafos k-quase-planares

Enunciado. Para todo k fixo, grafos k-quase-planares com n vértices têm $O(n)$ arestas.
O que se sabe. Verdadeira para $k \le 4$. Em geral, $n(\log n)^{O(\log k)}$ (Fox, Pach e Suk); $O(n \log n)$ para desenhos retilíneos.

9. Conjectura de Harary–Kainen–Schwenk

Enunciado. $\operatorname{cr}(C_m \,\square\, C_n) = (m-2)n$ para $3 \le m \le n$.
O que se sabe. Verdadeira para $m \le 7$ e para $n \ge m(m+1)$.
Por onde atacar. O argumento de Glebsky e Salazar usa a abundância de ciclos disjuntos quando n é grande; para n próximo de m é preciso contar cruzamentos entre ciclos de um modo mais fino.

10. Aproximação de fator constante

Enunciado. Existe algoritmo polinomial que aproxima $\operatorname{cr}(G)$ dentro de um fator $O(1)$ em grafos de grau máximo limitado?
O que se sabe. APX-difícil (Cabello); aproximação $2^{O((\log n)^{7/8} \log\log n)}$ (Chuzhoy e Tan).

11. Hanani–Tutte em superfícies de gênero baixo

Enunciado. A forma forte do teorema de Hanani–Tutte vale no toro e nas superfícies orientáveis de gênero 2 e 3?
O que se sabe. Vale no plano e no plano projetivo; falha no gênero 4 e acima (Fulek e Kynčl). O gênero é limitado por uma função do $\mathbb{Z}_2$-gênero.

12. Conjectura de Albertson

Enunciado. $\chi(G) \ge r$ implica $\operatorname{cr}(G) \ge \operatorname{cr}(K_r)$.
Situação. Provada por trabalhos revisados para $r \le 18$ (Ackerman). Preprints: $r \le 24$ (Cranston, 2025) e todos os r (Sadhu, 2026). Como $\operatorname{cr}(K_r)$ só é conhecido para $r \le 14$, para $r \ge 15$ a afirmação deve ser lida como $\operatorname{cr}(G) \ge \operatorname{cr}(K_r)$ sem que se saiba o valor de $\operatorname{cr}(K_r)$; as provas trabalham com cotas superiores para $\operatorname{cr}(K_r)$, como $H(r)$.
O que fazer. Ler e verificar o preprint de 2026 é, neste momento, a contribuição mais útil que um especialista pode dar ao problema.

Exercícios

Exercício 17.1. Seja D um desenho bom de K_n, $n \ge 5$. Prove que $\sum_v \operatorname{cr}(D-v) = (n-4)\operatorname{cr}(D)$. Conclua que $\operatorname{cr}(K_n) \ge \left\lceil \frac{n}{n-4} \operatorname{cr}(K_{n-1}) \right\rceil$ e que, se $\operatorname{cr}(K_{2k-1}) = H(2k-1)$, então $\operatorname{cr}(K_{2k}) = H(2k)$.

Exercício 17.2. Prove que a sequência $\operatorname{cr}(K_n)/\binom{n}{4}$ é não decrescente para $n \ge 4$. Usando $\operatorname{cr}(K_{13}) = 225$, obtenha uma constante explícita α tal que $\operatorname{cr}(K_n) \ge \alpha\binom{n}{4}$ para todo $n \ge 13$, e compare com $\lim H(n)/\binom{n}{4}$.

Exercício 17.3. Adapte o argumento do Exercício 17.1 a $K_{m,n}$ e prove: se a conjectura de Zarankiewicz vale para $K_{2k+1,n}$, então vale para $K_{2k+2,n}$.

Exercício 17.4. Prove que, entre 5 pontos do plano em posição geral, há sempre 4 em posição convexa. Deduza que $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$ para todo $n \geq 5$.

CAPÍTULO A

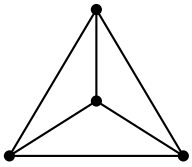
Galeria dos grafos principais

Este apêndice reúne, num só lugar, os grafos que aparecem ao longo da apostila. Para cada um há um desenho e seus parâmetros: ordem n, tamanho m, grau (quando o grafo é regular), cintura g, diâmetro, número cromático χ, se é planar e o número de cruzamentos. Os parâmetros n, m, g, diâmetro, χ e a planaridade foram conferidos por computador a partir das listas de arestas usadas nos desenhos.

Os desenhos privilegiam a simetria, e por isso muitos deles têm mais cruzamentos do que o mínimo. O número de cruzamentos do grafo é dado separadamente, e o número de cruzamentos do desenho mostrado também, para você comparar. Um bom exercício é tentar redesenhar cada grafo com o número mínimo de cruzamentos.

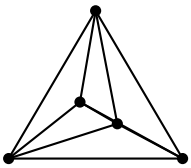
Os valores dos grafos cúbicos (Petersen, Heawood, Möbius–Kantor, Pappus, Desargues, McGee, Nauru, Coxeter, Tutte–Coxeter) estão em Pegg e Exoo (2009) e em Clancy, Haythorpe, Newcombe e Pegg (2020): cada um deles é o menor grafo cúbico com aquele número de cruzamentos. O valor 13 do grafo de Tutte–Coxeter é amplamente aceito, mas não tem demonstração publicada. Para o grafo de Clebsch, o melhor desenho conhecido tem 32 cruzamentos.

Tetraedro K_4



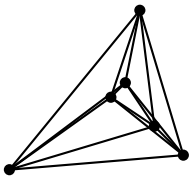
$n = 4$, $m = 6$, $r = 3$, $g = 3$, diâm. 1, $\chi = 4$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
menor grafo 3-regular; planar

Completo K_5



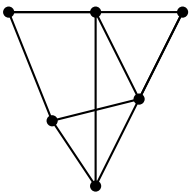
$n = 5$, $m = 10$, $r = 4$, $g = 3$, diâm. 1, $\chi = 5$
cr $= 1$; desenho mostrado: 1 cruzamento
obstrução de Kuratowski; desenho retilíneo ótimo

Completo K_6



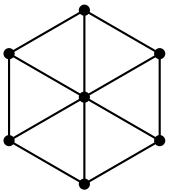
$n = 6$, $m = 15$, $r = 5$, $g = 3$, diâm. 1, $\chi = 6$
cr $= 3$; desenho mostrado: 3 cruzamentos
desenho retilíneo ótimo

Bipartido $K_{3,3}$



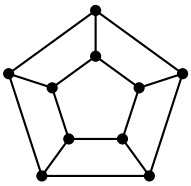
$n = 6$, $m = 9$, $r = 3$, $g = 4$, diâm. 2, $\chi = 2$
cr $= 1$; desenho mostrado: 1 cruzamento
problema das três casas; desenho retilíneo ótimo

Roda W_6



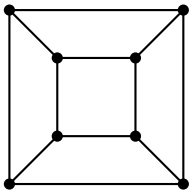
$n = 7$, $m = 12$, $g = 3$, diâm. 2, $\chi = 3$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
autodual como mapa

Prisma pentagonal



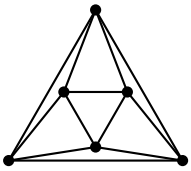
$n = 10$, $m = 15$, $r = 3$, $g = 4$, diâm. 3, $\chi = 3$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
$C_5 \,\square\, K_2$

Cubo Q_3



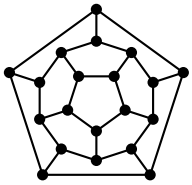
$n = 8$, $m = 12$, $r = 3$, $g = 4$, diâm. 3, $\chi = 2$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
bipartido; 3-regular

Octaedro $K_{2,2,2}$



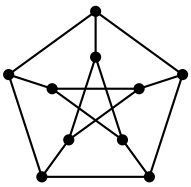
$n = 6$, $m = 12$, $r = 4$, $g = 3$, diâm. 2, $\chi = 3$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
dual do cubo; 4-regular

Dodecaedro



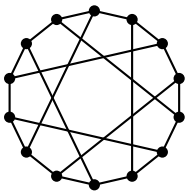
$n = 20$, $m = 30$, $r = 3$, $g = 5$, diâm. 5, $\chi = 3$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
cintura 5; hamiltoniano (jogo de Hamilton)

Petersen $GP(5, 2)$



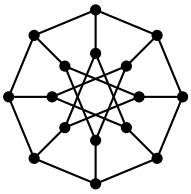
$n = 10$, $m = 15$, $r = 3$, $g = 5$, diâm. 2, $\chi = 3$
cr $= 2$; desenho mostrado: 5 cruzamentos
cintura 5; não hamiltoniano; desenho com 5 cruzamentos

Heawood



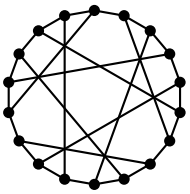
$n = 14$, $m = 21$, $r = 3$, $g = 6$, diâm. 3, $\chi = 2$
cr $= 3$; desenho mostrado: 14 cruzamentos
grafo de incidência do plano de Fano; $(3, 6)$-gaiola

Möbius–Kantor $GP(8, 3)$



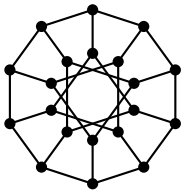
$n = 16$, $m = 24$, $r = 3$, $g = 6$, diâm. 4, $\chi = 2$
cr $= 4$; desenho mostrado: 16 cruzamentos
configuração 8_3; cintura 6

Pappus



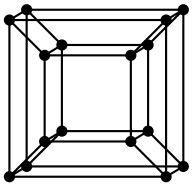
$n = 18$, $m = 27$, $r = 3$, $g = 6$, diâm. 4, $\chi = 2$
cr $= 5$; desenho mostrado: 24 cruzamentos
configuração de Pappus 9_3

Desargues $GP(10, 3)$



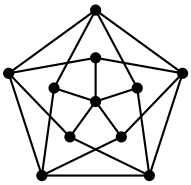
$n = 20$, $m = 30$, $r = 3$, $g = 6$, diâm. 5, $\chi = 2$
cr $= 6$; desenho mostrado: 20 cruzamentos
configuração de Desargues 10_3

Hipercubo Q_4



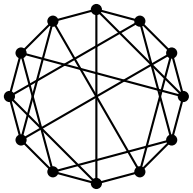
$n = 16$, $m = 32$, $r = 4$, $g = 4$, diâm. 4, $\chi = 2$
cr $= 8$; desenho mostrado: 12 cruzamentos
$\mathrm{cr}(Q_4) = 8$ (Dean e Richter, 1995)

Grötzsch



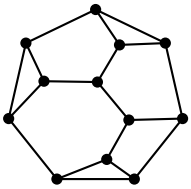
$n = 11$, $m = 20$, $g = 4$, diâm. 2, $\chi = 4$
cr $= 5$; desenho mostrado: 5 cruzamentos
sem triângulos e $\chi = 4$ (construção de Mycielski)

Chvátal



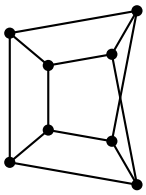
$n = 12$, $m = 24$, $r = 4$, $g = 4$, diâm. 2, $\chi = 4$
cr $= 6$; desenho mostrado: 29 cruzamentos
4-regular, sem triângulos, $\chi = 4$

Frucht



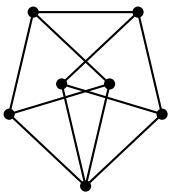
$n = 12$, $m = 18$, $r = 3$, $g = 3$, diâm. 4, $\chi = 3$
cr $= 0$; desenho mostrado: 0 cruzamentos
cúbico sem simetrias não triviais; imersão baricêntrica de Tutte

Wagner V_8



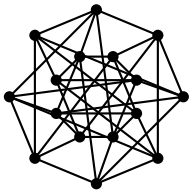
$n = 8$, $m = 12$, $r = 3$, $g = 4$, diâm. 2, $\chi = 3$
cr $= 1$; desenho mostrado: 1 cruzamento
escada de Möbius; desenho ótimo

Fuso de Moser



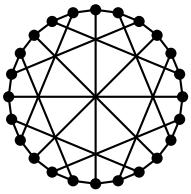
$n = 7$, $m = 11$, $g = 3$, diâm. 2, $\chi = 4$
cr $= 0$; desenho mostrado: 4 cruzamentos
desenho com todas as arestas de comprimento 1; $\chi = 4$

Clebsch (quíntico)



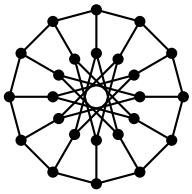
$n = 16$, $m = 40$, $r = 5$, $g = 4$, diâm. 2, $\chi = 4$
cr ≤ 32; desenho mostrado: 86 cruzamentos
5-regular, sem triângulos; 32 é o melhor valor conhecido

McGee



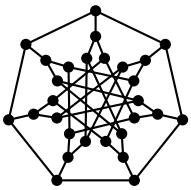
$n = 24$, $m = 36$, $r = 3$, $g = 7$, diâm. 4, $\chi = 3$
cr $= 8$; desenho mostrado: 38 cruzamentos
$(3, 7)$-gaiola

Nauru $GP(12, 5)$



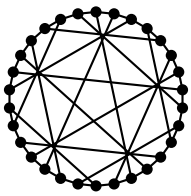
$n = 24$, $m = 36$, $r = 3$, $g = 6$, diâm. 4, $\chi = 2$
cr $= 8$; desenho mostrado: 48 cruzamentos
cúbico simétrico de 24 vértices

Coxeter



$n = 28$, $m = 42$, $r = 3$, $g = 7$, diâm. 4, $\chi = 3$
cr $= 11$; desenho mostrado: 49 cruzamentos
cúbico, cintura 7, não hamiltoniano

Tutte–Coxeter (Levi)



$n = 30$, $m = 45$, $r = 3$, $g = 8$, diâm. 4, $\chi = 2$
cr $= 13^*$; desenho mostrado: 60 cruzamentos
$(3, 8)$-gaiola; *valor aceito, sem prova publicada

Tabela de parâmetros

Grafo	n	m	reg.	g	diâm.	χ	planar	cr
Tetraedro K_4	4	6	3	3	1	4	sim	0
Completo K_5	5	10	4	3	1	5	não	1
Completo K_6	6	15	5	3	1	6	não	3
Bipartido $K_{3,3}$	6	9	3	4	2	2	não	1
Roda W_6	7	12	—	3	2	3	sim	0
Prisma pentagonal	10	15	3	4	3	3	sim	0
Cubo Q_3	8	12	3	4	3	2	sim	0
Octaedro $K_{2,2,2}$	6	12	4	3	2	3	sim	0
Dodecaedro	20	30	3	5	5	3	sim	0
Petersen $GP(5,2)$	10	15	3	5	2	3	não	2
Heawood	14	21	3	6	3	2	não	3
Möbius–Kantor $GP(8,3)$	16	24	3	6	4	2	não	4
Pappus	18	27	3	6	4	2	não	5
Desargues $GP(10,3)$	20	30	3	6	5	2	não	6
Hipercubo Q_4	16	32	4	4	4	2	não	8
Grötzsch	11	20	—	4	2	4	não	5
Chvátal	12	24	4	4	2	4	não	6
Frucht	12	18	3	3	4	3	sim	0
Wagner V_8	8	12	3	4	2	3	não	1
Fuso de Moser	7	11	—	3	2	4	sim	0
Clebsch (quíntico)	16	40	5	4	2	4	não	≤ 32
McGee	24	36	3	7	4	3	não	8
Nauru $GP(12,5)$	24	36	3	6	4	2	não	8
Coxeter	28	42	3	7	4	3	não	11
Tutte–Coxeter (Levi)	30	45	3	8	4	2	não	13^{*}

Alguns grafos citados no texto ficaram fora da galeria porque seus desenhos simétricos são densos demais para este formato. O grafo de Robertson (19 vértices, 4-regular, cintura 5, a $(4,5)$-gaiola) tem número de cruzamentos no máximo 17; os dois desenhos retilíneos conhecidos com 17 cruzamentos estão registrados no MathWorld, um de G. Exoo e outro de H. C. Silva Filho, e o valor exato continua desconhecido. Para os grafos completos, $\mathrm{cr}(K_7)=9$, $\mathrm{cr}(K_8)=18$, $\mathrm{cr}(K_9)=36$, $\mathrm{cr}(K_{10})=60$, $\mathrm{cr}(K_{11})=100$, $\mathrm{cr}(K_{12})=150$, $\mathrm{cr}(K_{13})=225$ e $\mathrm{cr}(K_{14})=315$ (Capítulo 12).

Resoluções dos exercícios

Capítulo 1 — Conceitos básicos

Resolução do Exercício 1.1. Monte o grafo das pessoas, com aresta para cada cumprimento. Os graus estão em $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, que tem n valores. Os valores 0 e $n-1$ não podem ocorrer juntos: quem tem grau $n-1$ cumprimentou todos, inclusive quem teria grau 0. Logo os n graus assumem no máximo $n-1$ valores, e pelo princípio da casa dos pombos dois coincidem.

Resolução do Exercício 1.2. Sejam u, v não adjacentes. Os conjuntos $N(u)$ e $N(v)$ estão contidos em $V \setminus \{u, v\}$, que tem $n-2$ elementos, e $|N(u)| + |N(v)| \geq n-1 > n-2$. Logo têm um elemento comum w, e $u\,w\,v$ é um caminho de comprimento 2. Assim quaisquer dois vértices estão a distância no máximo 2; em particular, G é conexo.

Resolução do Exercício 1.3. Suponha G desconexo e sejam u, v vértices. Se estão em componentes diferentes de G, são adjacentes em $\overline{G}$. Se estão na mesma componente, tome w em outra componente: $u\,w\,v$ é caminho em $\overline{G}$. Logo $\overline{G}$ é conexo (e com diâmetro no máximo 2).

Agora suponha $\operatorname{diam}(G) \geq 3$ e tome a, b com $d_G(a, b) \geq 3$. Então a e b não têm vizinho comum em G e não são adjacentes em G. Assim todo vértice $x \neq a, b$ é não adjacente em G a pelo menos um de a, b, isto é, adjacente em $\overline{G}$ a a ou a b; e $ab \in E(\overline{G})$. Dados x, y quaisquer, ligue x a a ou b e y a a ou b em $\overline{G}$, usando a aresta ab se preciso: obtemos um passeio de comprimento no máximo 3. Logo $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq 3$.

Resolução do Exercício 1.4. Se $G \cong \overline{G}$, ambos têm o mesmo número de arestas, e juntos têm $\binom{n}{2}$. Logo $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ é par, ou seja, $4 \mid n(n-1)$. Como n e $n-1$ têm paridades distintas, 4 divide um deles: $n \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. Exemplos: P_4 (o complemento de $a\,b\,c\,d$ é o caminho $b\,d\,a\,c$) e C_5 (o complemento do pentágono é o pentagrama, outro 5-ciclo).

Resolução do Exercício 1.5. Use a descrição por pares de $\{1, \ldots, 5\}$, com adjacência por disjunção. Um triângulo seria formado por três pares dois a dois disjuntos, que exigiriam seis elementos. Dois pares não adjacentes compartilham exatamente um elemento, digamos $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$; um vizinho comum é um par disjunto de $\{a, b, c\}$, e o único é o par formado pelos dois elementos restantes. Logo há exatamente um vizinho comum. Pares adjacentes $\{a, b\}, \{c, d\}$ não têm vizinho comum, pois este teria de evitar quatro elementos e só resta um. Um 4-ciclo $x\,y\,z\,w$ teria x e z com dois vizinhos comuns (y e w); se x, z forem não adjacentes isso contradiz o que vimos, e se forem adjacentes também, pois pares adjacentes não têm vizinho comum.

Resolução do Exercício 1.6. A contagem por média. Para cada partição $V = A \cup B$, seja $f(A)$ o número de arestas entre A e B. Escolha A ao acaso, colocando cada vértice em A com probabilidade $1/2$, independentemente. Cada aresta uv fica entre as classes com probabilidade $1/2$ (quando u e v caem em lados distintos). Pela linearidade da esperança, $\mathbb{E}[f] = m/2$, e portanto alguma partição atinge pelo menos $m/2$. As arestas entre A e B formam o subgrafo bipartido procurado.

Resolução do Exercício 1.7. Conte as arestas pelas extremidades em A: cada uma tem exatamente uma, logo $m = k|A|$. Pelo mesmo argumento em B, $m = k|B|$. Como $k \geq 1$,

$|A| = |B|$.

Resolução do Exercício 1.8. Temos $J^2 = nJ$. Então $A^2 = (J-I)^2 = nJ-2J+I = (n-2)J+I$ e

$$A^4 = \big((n-2)J + I\big)^2 = (n-2)^2 nJ + 2(n-2)J + I.$$

A entrada diagonal é $n(n-2)^2 + 2(n-2) + 1 = (n-1)(n^2-3n+3)$. Por exemplo, em K_3 obtemos $2 \cdot 3 = 6$: de um vértice saem 2 escolhas a cada passo, $2^4 = 16$ passeios, e dos que voltam ao início conta-se 6, como você pode conferir à mão.

Resolução do Exercício 1.9. Fixe um vértice v. Ele tem k vizinhos, e cada vizinho tem $k-1$ outros vizinhos. Esses $k(k-1)$ vértices a distância 2 são distintos entre si e distintos de v e de seus vizinhos: uma coincidência criaria um ciclo de comprimento 3 ou 4. Logo $n \geq 1 + k + k(k-1) = k^2 + 1$. Para $k = 3$, a cota é 10, e o grafo de Petersen é cúbico, tem cintura 5 e 10 vértices.

Resolução do Exercício 1.10. Cada aresta muda a paridade do número de uns da palavra; um ciclo volta à palavra inicial, logo muda a paridade um número par de vezes. A distância de Hamming entre v e w é o número de posições em que diferem; os vértices a distância k de v correspondem às escolhas das k posições a trocar, que são $\binom{d}{k}$.

Capítulo 2 — Árvores e conectividade

Resolução do Exercício 2.1. Sendo $n = \sum_k n_k$ e $m = n-1$, o aperto de mãos dá $\sum_k k\, n_k = 2(n-1) = 2\sum_k n_k - 2$. Logo $\sum_k (k-2) n_k = -2$, isto é, $-n_1 + \sum_{k \geq 3} (k-2) n_k = -2$, que é a identidade pedida. Com dois vértices de grau 4 e três de grau 3: $n_1 = 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$ folhas, qualquer que seja o número de vértices de grau 2.

Resolução do Exercício 2.2. Pela identidade do exercício anterior, $n_1 = 2 + \sum_{k \geq 3} (k-2) n_k \geq 2 + (\Delta - 2) = \Delta$ quando $\Delta \geq 3$, porque há ao menos um vértice de grau Δ. Para $\Delta \leq 2$, a árvore é um caminho com pelo menos Δ folhas. Uma prova alternativa: removendo o vértice v de grau k, sobram k subárvores, e cada uma contém uma folha de T (se a subárvore tem um só vértice, ele é folha de T; senão, tem duas folhas, das quais no máximo uma era vizinha de v).

Resolução do Exercício 2.3. Remover e de T_1 separa V em duas partes $S, \overline{S}$. Acrescentar e a T_2 cria um único ciclo C, que contém e e, portanto, atravessa o corte $(S, \overline{S})$ um número par de vezes, pelo menos duas. Seja $f \neq e$ uma aresta de C com extremidades em lados opostos. Então $f \notin T_1$ (em T_1, a única aresta entre S e $\overline{S}$ é e). $T_1 - e + f$ é conexo (religa S e $\overline{S}$) com $n-1$ arestas, logo árvore. $T_2 + e - f$ continua conexo, pois f está no ciclo C, e tem $n-1$ arestas, logo também é árvore.

Resolução do Exercício 2.4. Sejam a, b os vértices da classe pequena e $x_1, \ldots, x_n$ os da outra. Uma árvore geradora tem $n+1$ arestas; cada x_i tem grau 1 ou 2 nela. Se dois x_i tivessem grau 2, haveria o ciclo $a\, x_i\, b\, x_j$; se nenhum tivesse, a e b estariam desconectados. Logo exatamente um x_i é ligado a ambos (n escolhas), e cada um dos demais escolhe a ou b (2^{n-1} escolhas). Total: $n\, 2^{n-1}$.

Resolução do Exercício 2.5. Suponha duas árvores ótimas distintas $T \neq T'$ e seja e a aresta de menor custo na diferença simétrica; digamos $e \in T \setminus T'$. Pelo Exercício 2.3, existe $f \in T' \setminus T$ com $T' - f + e$ árvore. Como f está na diferença simétrica e os custos são distintos, $c(f) > c(e)$; então $T' - f + e$ custa menos que T', contradição.

Resolução do Exercício 2.6. Seja F um corte mínimo separando S e $\overline{S}$, com $|S| = s \leq n/2$. Se $s \leq \delta$, conte as arestas que saem de S: cada vértice de S tem pelo menos $\delta - (s-1)$ vizinhos fora de S, logo $\lambda = |F| \geq s(\delta - s + 1)$. A função $s \mapsto s(\delta - s + 1)$, para $1 \leq s \leq \delta$, é côncava e vale δ nos extremos $s = 1$ e $s = \delta$; portanto $\lambda \geq \delta$. Se $s > \delta$, então $s \geq \delta + 1 \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1 > n/2$, contradição. Assim $\lambda \geq \delta$, e com o Teorema 2.18, $\lambda = \delta$.

Resolução do Exercício 2.7. Tome uma árvore geradora T de G; ela tem duas folhas u, v (Lema 2.2). Remover uma folha de T deixa $T - u$ conexo, e $T - u$ é subgrafo gerador de $G - u$; logo $G - u$ é conexo. O mesmo vale para v.

Resolução do Exercício 2.8. Para cada vértice v, seja $f(v)$ o tamanho da maior componente de $T - v$, e tome v que minimiza f. Suponha que a maior componente C de $T - v$ tenha mais de $n/2$ vértices, e seja w o vizinho de v em C. As componentes de $T - w$ são as subárvores de $C - w$, todas com menos de $|C|$ vértices, e a componente que contém v, com $n - |C| < n/2 < |C|$ vértices. Então $f(w) < |C| = f(v)$, contradição.

Resolução do Exercício 2.9. Uma árvore geradora T de G tem $n - 1$ arestas, logo G tem exatamente uma aresta e fora de T. Pelo Teorema 2.3(vi), $T + e = G$ contém exatamente um ciclo.

Capítulo 3 — Percursos

Resolução do Exercício 3.1. Todos os três grafos são conexos (para $n \geq 2$, $m, n \geq 1$, $d \geq 1$), então basta olhar os graus. Em K_n todos têm grau $n-1$: euleriano se e só se n é ímpar (incluindo o caso trivial $n = 1$). Em $K_{m,n}$ os graus são n e m: euleriano se e só se m e n são ambos pares. Em Q_d todos têm grau d: euleriano se e só se d é par.

Resolução do Exercício 3.2. Cada trilha aberta tem duas extremidades, e um vértice de grau ímpar precisa ser extremidade de alguma trilha da partição (as passagens internas consomem arestas aos pares). Logo são necessárias pelo menos $2k/2 = k$ trilhas. Para obter k: emparelhe arbitrariamente os vértices ímpares em k pares e acrescente uma aresta nova entre cada par. O multigrafo obtido é conexo com todos os graus pares, logo tem um circuito euleriano. Removendo as k arestas novas, o circuito se parte em exatamente k trilhas que cobrem todas as arestas originais.

Resolução do Exercício 3.3. Rotule os vértices externos $o_0, \ldots, o_4$ (com $o_i o_{i+1}$ arestas), os internos $p_0, \ldots, p_4$ (com $p_i p_{i+2}$ arestas) e os raios $o_i p_i$, índices módulo 5. Um ciclo hamiltoniano H atravessa o corte entre externos e internos um número par de vezes, e só pelos raios; como visita os dois lados, usa 2 ou 4 raios.

Quatro raios. Digamos que o raio não usado seja $o_0 p_0$. Então o_0 usa $o_4 o_0$ e $o_0 o_1$. Os vértices o_1 e o_4 usam seu raio e já têm uma aresta do pentágono, logo H não contém $o_1 o_2$ nem $o_3 o_4$; para dar grau 2 a o_2 e o_3, H contém $o_2 o_3$. Do lado interno, p_0 usa $p_0 p_2$ e $p_0 p_3$; então $p_2 p_4$ e $p_3 p_1$ ficam fora, e p_1, p_4 precisam da aresta $p_1 p_4$. Mas então $o_0\, o_1\, p_1\, p_4\, o_4\, o_0$ é um ciclo de comprimento 5 contido em H, impossível para um ciclo com 10 vértices.

Dois raios. Do lado externo, três vértices usam duas arestas do pentágono e dois usam uma; logo H tem $(3 \cdot 2 + 2 \cdot 1)/2 = 4$ arestas do pentágono, isto é, o pentágono menos uma aresta $o_i o_{i+1}$, cujas extremidades são as que usam raios. Do lado interno, pelo mesmo motivo, as extremidades p_i, p_{i+1} dos raios teriam de ser vizinhas no pentagrama. Mas p_i e p_{i+1} não são adjacentes. Contradição.

Nos dois casos não há ciclo hamiltoniano.

Resolução do Exercício 3.4. Indução em d. Para $d = 2$, $Q_2 = C_4$. Suponha que Q_{d-1} tem um ciclo hamiltoniano, listado como $w_1, w_2, \ldots, w_N$, $N = 2^{d-1}$. Em Q_d, considere

$$0w_1, 0w_2, \ldots, 0w_N,\ 1w_N, 1w_{N-1}, \ldots, 1w_1,$$

e volte a $0w_1$. Consecutivos diferem em um bit: dentro de cada metade pela hipótese, e nas junções $0w_N \to 1w_N$ e $1w_1 \to 0w_1$ pelo primeiro bit. Esse é o *código de Gray refletido*, usado em codificadores rotativos de posição: como só um bit muda por vez, uma leitura feita durante a transição erra no máximo por uma posição.

Resolução do Exercício 3.5. Duas colorações. Pinte as casas como no tabuleiro de xadrez (brancas e pretas) e, independentemente, chame de *externas* as casas das linhas 1 e 4 e de *internas* as das linhas 2 e 3. Um salto de cavalo sempre troca a cor; e de uma casa externa ele sempre vai para uma interna (anda uma ou duas linhas e, partindo da linha 1 ou 4, só alcança as linhas 2 ou 3). Há $2n$ casas externas e $2n$ internas. Num ciclo que visita todas as casas, cada externa é seguida de uma interna; como as quantidades são iguais, cada interna também é seguida de uma externa, e o ciclo alterna externa, interna, externa,... Ele também alterna as cores. Se a primeira casa é externa e branca, então todas as externas visitadas são brancas e todas as internas são pretas. Mas há externas pretas, que nunca seriam visitadas. Contradição.

Resolução do Exercício 3.6. Seja v de grau de saída máximo e suponha que algum w não é alcançado em até dois passos. Então $w \to v$ e $w \to u$ para todo u com $v \to u$ (senão $v \to u \to w$). Assim w vence v e todos os vencidos por v, e seu grau de saída é pelo menos $d^+(v) + 1$, contradição.

Resolução do Exercício 3.7. Acrescente a G um vértice novo z adjacente a todos os vértices. O grafo G' tem $n+1$ vértices; os graus originais aumentam em 1, ficando pelo menos $(n-1)/2+1 = (n+1)/2$, e $d(z) = n \geq (n+1)/2$ para $n \geq 1$. Pelo teorema de Dirac (se $n+1 \geq 3$), G' tem um ciclo hamiltoniano; retirando z, sobra um caminho hamiltoniano de G.

Resolução do Exercício 3.8. Um ciclo hamiltoniano passa pelo centro c entrando por um vértice x do aro e saindo por outro y. O restante do ciclo é um caminho de y a x que cobre os $n-1$ vértices do aro usando só arestas do aro; no ciclo C_{n-1} isso só é possível se x e y são vizinhos no aro e o caminho dá a volta pelo outro lado. Assim cada ciclo hamiltoniano corresponde a uma aresta xy do aro (a que é trocada pelos dois raios), e há $n-1$ ciclos.

Resolução do Exercício 3.9. Verificamos a condição de Ore. Sejam u, v não adjacentes. Faltam a G pelo menos as arestas de u e de v para os outros vértices que não estão presentes, ou seja, $(n-1-d(u)) + (n-1-d(v)) - 1$ arestas (a aresta uv contada duas vezes). Por hipótese faltam no máximo $\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} - 2 = n-3$ arestas. Então $2n-3-d(u)-d(v) \leq n-3$, isto é, $d(u)+d(v) \geq n$, e o teorema de Ore se aplica.

Capítulo 4 — Emparelhamentos e caminhos disjuntos

Resolução do Exercício 4.1. O ciclo do tabuleiro (Gomory). As 64 casas, com adjacência por lado, admitem um ciclo hamiltoniano: percorra a primeira coluna de cima para baixo, depois serpenteie pelas colunas 2 a 8 nas linhas 8 até 1, subindo e descendo, e volte pela linha de cima. Ao longo do ciclo as cores alternam. Retirando duas casas de cores diferentes, o ciclo se parte em dois arcos (ou um só, se as casas forem vizinhas no ciclo). Como as casas retiradas têm

cores opostas, cada arco começa e termina em casas de cores opostas, e portanto tem número par de casas. Cada arco é coberto por dominós colocados em pares consecutivos de casas, que são adjacentes no tabuleiro.

Resolução do Exercício 4.2. Se M e M' fossem emparelhamentos perfeitos distintos, na diferença simétrica $M \triangle M'$ todo vértice teria grau 0 ou 2 (um vértice coberto por uma aresta de M fora de M' é coberto também por uma aresta de M' fora de M). Uma componente não trivial seria um ciclo, impossível numa árvore. Logo $M \triangle M' = \emptyset$.

Resolução do Exercício 4.3. Monte o multigrafo bipartido com os 13 montes de um lado e os 13 valores do outro, com uma aresta para cada carta, ligando seu monte ao seu valor. Cada monte tem grau 4 e cada valor também (há quatro naipes). A prova do Corolário 4.6 vale igualmente com arestas múltiplas: para um conjunto S de montes, as $4|S|$ cartas chegam a valores que, juntos, comportam $4|N(S)|$ cartas, logo $|N(S)| \geq |S|$. Pelo teorema de Hall há um emparelhamento perfeito: uma carta por monte, com valores distintos.

Resolução do Exercício 4.4. Tome K_4 e subdivida uma de suas arestas com um vértice w; o resultado tem 5 vértices, quatro de grau 3 e w de grau 2. Faça três cópias desse bloco e ligue os três vértices w a um vértice central c. O grafo tem 16 vértices e é cúbico. Em $G - c$ há três componentes, cada uma com 5 vértices, logo $o(G - c) = 3 > 1 = |\{c\}|$, e pelo teorema de Tutte (na direção fácil) não há emparelhamento perfeito. As três arestas em c são pontes, de acordo com o teorema de Petersen.

Resolução do Exercício 4.5. Sejam $a = \delta(A)$ e $b = \Delta(B)$, com $a \geq b$, $a \geq 1$. Para $S \subseteq A$, há pelo menos $a|S|$ arestas saindo de S, todas chegando a $N(S)$, onde cada vértice recebe no máximo b. Logo $b|N(S)| \geq a|S| \geq b|S|$, e $|N(S)| \geq |S|$ (note que $b \geq 1$ se há arestas). Hall garante o emparelhamento.

Resolução do Exercício 4.6. Sejam e, f as arestas. Subdivida-as, inserindo vértices novos a em e e b em f. O grafo G' obtido continua 2-conexo: remover a (ou b) resulta em $G-e$ (ou $G-f$) com um vértice pendurado, que é conexo porque e não é ponte; remover um vértice original v resulta em $G - v$, conexo, com as arestas subdivididas trocadas por caminhos ou por vértices pendentes. Pelo Teorema 2.15, a e b estão num ciclo de G'. Esse ciclo passa por a usando as duas arestas de a, isto é, percorre e subdividida; o mesmo para b. Desfazendo as subdivisões, obtemos um ciclo de G contendo e e f.

Resolução do Exercício 4.7. Dado um emparelhamento máximo M, há $n - 2\nu$ vértices descobertos, e cada um tem alguma aresta (não há vértice isolado); acrescentando uma aresta para cada um, cobrimos tudo com $\nu + (n - 2\nu) = n - \nu$ arestas. Logo $\rho \leq n - \nu$.

Seja agora F uma cobertura por arestas mínima. Se alguma aresta de F tivesse as duas extremidades cobertas por outras arestas de F, poderia ser retirada. Então F não contém caminho com três arestas nem ciclo, e cada componente de F é uma estrela. Se há c estrelas, cobrindo os n vértices, então $|F| = n - c$. Escolhendo uma aresta de cada estrela obtemos um emparelhamento de tamanho c, logo $\nu \geq c = n - \rho$. Juntando, $\nu + \rho = n$.

Resolução do Exercício 4.8. Cada vértice cobre no máximo Δ arestas, logo uma cobertura por vértices tem pelo menos m/Δ vértices: $\tau \geq m/\Delta$. Pelo teorema de König, $\nu = \tau \geq m/\Delta$.

Resolução do Exercício 4.9. Seja a_n o número de coberturas da faixa $2 \times n$. Olhe a primeira coluna: ou ela é coberta por um dominó vertical, e resta uma faixa $2 \times (n - 1)$; ou o canto de cima é coberto por um dominó horizontal, e então o de baixo também (não há outra opção para ele), e resta uma faixa $2 \times (n - 2)$. Logo $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, e portanto $a_n = F_{n+1}$.

Capítulo 5 — Coloração

Resolução do Exercício 5.1. Indução em n; para $n = 1$, $1 + 1 = 2$. Seja v um vértice, $G' = G - v$, e note que $\overline{G'} = \overline{G} - v$. Sempre $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$ e $\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G'}) + 1$. Se no máximo uma dessas desigualdades é atingida com aumento, a hipótese de indução dá $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq (n - 1 + 1) + 1 = n + 1$. Se as duas aumentam, então v precisa de cor nova nos dois casos, o que exige $d_G(v) \geq \chi(G')$ e $d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(\overline{G'})$ (senão sobraria cor livre para v). Somando, $n - 1 = d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq \chi(G') + \chi(\overline{G'})$, e então $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n - 1 + 2 = n + 1$.

Resolução do Exercício 5.2. Seja $k = \max_H \delta(H)$. Todo subgrafo tem vértice de grau no máximo k, ou seja, G é k-degenerado, e pelo guloso $\chi \leq k + 1$. Tome H com $\delta(H) = k$. Ele tem pelo menos $k + 1$ vértices, cada um de grau pelo menos k, logo pelo menos $k(k + 1)/2$ arestas, e $k(k + 1)/2 \leq m$. Resolvendo, $k \leq \frac{-1+\sqrt{1+8m}}{2}$, e

$$\chi(G) \leq k + 1 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \tfrac{1}{4}}.$$

Para $m = \binom{r}{2}$ a cota vale exatamente r, atingida por K_r.

Resolução do Exercício 5.3. Suponha $d(v) \leq k - 2$. Por criticalidade, $G - v$ tem uma $(k - 1)$-coloração. Os vizinhos de v usam no máximo $k - 2$ cores, então sobra uma das $k - 1$ cores para v, e $\chi(G) \leq k - 1$, contradição.

Resolução do Exercício 5.4. Para n par, escreva os vértices como ∞ e $0, 1, \ldots, n - 2$ (inteiros módulo $n - 1$). Na rodada i, $i = 0, \ldots, n - 2$, jogam $\infty \times i$ e $(i - j) \times (i + j)$ para $j = 1, \ldots, (n - 2)/2$. Os pares de cada rodada são disjuntos e cobrem todos os times. Cada par $\{a, b\}$ de inteiros aparece exatamente numa rodada: aquela com $2i \equiv a+b$, que tem solução única porque $n - 1$ é ímpar (e $a \neq b$ garante $j \not\equiv 0$). Assim são $n - 1$ rodadas, e $\chi'(K_n) = n - 1 = \Delta$. É a tabela usada em campeonatos de turno único.

Para n ímpar, cada cor é um emparelhamento com no máximo $(n-1)/2$ arestas, e $\binom{n}{2} = n \cdot \frac{n-1}{2}$; logo são necessárias pelo menos n cores. E n bastam: retire o vértice ∞ da coloração de K_{n+1}; cada rodada perde um jogo e continua sendo emparelhamento. Nesse caso, em cada rodada um time folga.

Resolução do Exercício 5.5. Um grafo cúbico tem n par (aperto de mãos). Um ciclo hamiltoniano tem n arestas, número par, e pode ser colorido alternando as cores 1 e 2. As arestas fora do ciclo formam um emparelhamento perfeito (cada vértice tem exatamente uma aresta fora do ciclo), que recebe a cor 3. Logo $\chi' = 3 = \Delta$. Como o grafo de Petersen é cúbico e de classe 2, ele não é hamiltoniano.

Resolução do Exercício 5.6. Indução em m. Sem arestas, $P = k^n > 0$ e $n - c = 0$. Seja e uma aresta.

e não é ponte. Então $G - e$ tem n vértices e c componentes, e G/e tem $n - 1$ vértices e c componentes. Pela hipótese, $P(G - e, k)$ tem o sinal de $(-1)^{n-c}$ e $P(G/e, k)$ o de $(-1)^{n-1-c}$. Logo $P(G, k) = P(G - e, k) - P(G/e, k)$ é a soma de dois números com o sinal de $(-1)^{n-c}$.

$e = uv$ é ponte. As colorações de $G - e$ são produtos de colorações independentes dos dois lados, e por simetria entre as cores exatamente uma fração $1/k$ delas dá a u e v a mesma cor. Assim $P(G, k) = P(G - e, k)\,\frac{k-1}{k}$. Agora $G - e$ tem $c + 1$ componentes, e $P(G - e, k)$ tem sinal $(-1)^{n-c-1}$; o fator $\frac{k-1}{k}$ é negativo em $(0, 1)$, e o produto tem sinal $(-1)^{n-c}$.

Em ambos os casos $(-1)^{n-c}P(G, k) > 0$; em particular, $P(G, k) \neq 0$ em $(0, 1)$.

Resolução do Exercício 5.7. Sejam $v_1, \dots, v_7$ os vértices do ciclo e v_1v_3 a aresta extra. O grafo é a colagem, ao longo da aresta v_1v_3, do triângulo $v_1v_2v_3$ com o ciclo $v_1v_3v_4v_5v_6v_7$ de comprimento 6. Colorações dos dois pedaços combinam-se exatamente quando concordam em v_1, v_3, e cada uma das $k(k-1)$ colorações dessa aresta se estende ao mesmo número de maneiras em cada pedaço (por simetria das cores). Logo

$$P(G,k) = \frac{P(C_3,k)\,P(C_6,k)}{k(k-1)}.$$

Com $k=3$: $P(C_3,3)=6$, $P(C_6,3)=2^6+2=66$, $k(k-1)=6$. Há 66 maneiras.

Resolução do Exercício 5.8. Basta tratar cada componente; suponha G conexo e faça uma busca em profundidade a partir de r, obtendo a árvore T. Cada caminho de r a um vértice em T é um caminho de G, então a profundidade de todo vértice é no máximo $k-1$. Pinte cada vértice com sua profundidade, uma cor em $\{0,\dots,k-1\}$. Uma aresta de T liga pai e filho, de profundidades distintas; uma aresta de G fora de T liga um vértice a um ancestral próprio (propriedade da busca em profundidade), também de profundidade distinta. A coloração é própria e usa no máximo k cores.

Resolução do Exercício 5.9. Sejam a, b os vértices da classe de tamanho 2. Se recebem a mesma cor (k modos), cada um dos três outros vértices tem $k-1$ opções; se recebem cores distintas ($k(k-1)$ modos), cada um tem $k-2$. Logo

$$P(K_{2,3},k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^3.$$

Para $k=2$ obtemos 2, as duas bicolorações; o polinômio tem grau 5, coeficiente de k^4 igual a $-6=-m$, como previsto.

Capítulo 6 — Teoria extremal e Ramsey

Resolução do Exercício 6.1. Para uma aresta uv, os conjuntos $N(u)$ e $N(v)$ estão contidos em V, logo $|N(u)\cup N(v)| \le n$ e

$$|N(u)\cap N(v)| = d(u)+d(v)-|N(u)\cup N(v)| \ge d(u)+d(v)-n.$$

Cada vértice de $N(u)\cap N(v)$ forma um triângulo com u e v, e cada triângulo é contado uma vez para cada uma das suas três arestas. Então o número T de triângulos satisfaz

$$3T = \sum_{uv\in E} |N(u)\cap N(v)| \ge \sum_{uv\in E} \big(d(u)+d(v)\big) - mn = \sum_{w} d(w)^2 - mn \ge \frac{4m^2}{n} - mn,$$

usando Cauchy–Schwarz como na prova de Mantel. Dividindo por 3, $T \ge \frac{m(4m-n^2)}{3n}$. Se $m > n^2/4$, o lado direito é positivo e há pelo menos um triângulo, que é o Teorema de Mantel.

Resolução do Exercício 6.2. A cota superior. Suponha uma coloração de K_9 sem K_3 vermelho e sem K_4 azul. Fixe v e sejam R e B os conjuntos de vizinhos vermelhos e azuis de v, com $|R|+|B|=8$. Dentro de R não há aresta vermelha (ela fecharia triângulo vermelho com v), então R é uma clique azul e, como não há K_4 azul, $|R|\le 3$. Dentro de B não há triângulo azul (ele formaria K_4 azul com v) nem triângulo vermelho, então $|B| \le R(3,3)-1 = 5$. Logo $|R|=3$ e $|B|=5$ para todo v: o grafo vermelho seria 3-regular com 9 vértices, com soma de graus 27, ímpar, o que contradiz o aperto de mãos. Portanto $R(3,4)\le 9$.

A cota inferior. Pinte de vermelho as arestas do grafo W com vértices $\mathbb{Z}_8$ e $i \sim j$ quando $i-j \in \{1,4,7\}$, e de azul as demais. Um triângulo vermelho exigiria três elementos de $\{1,4,7\}$ (com repetição) de soma 0 módulo 8 (as diferenças $j-i$, $k-j$, $i-k$ ao percorrer o triângulo i,j,k; o conjunto $\{1,4,7\}$ é simétrico módulo 8). Conferindo os dez casos ($1+1+1=3$, $1+1+4=6$, $1+1+7=9$, $1+4+4=9$, $1+4+7=12$, $1+7+7=15$, $4+4+4=12$, $4+4+7=15$, $4+7+7=18$, $7+7+7=21$) nenhum é múltiplo de 8. Um K_4 azul seria um conjunto independente I de tamanho 4 em W. Como $i \sim i+4$, I tem exatamente um elemento c_i de cada par $\{i, i+4\}$, $i=0,1,2,3$. Se $c_0=0$, então $c_1 \neq 1$, logo $c_1=5$; então $c_2 \neq 6$, logo $c_2=2$; então $c_3 \neq 3$, logo $c_3=7$, que é vizinho de 0. O caso $c_0=4$ é simétrico ($c_1=1$, $c_2=6$, $c_3=3$, vizinho de 4). Assim não há K_4 azul e $R(3,4)>8$.

Resolução do Exercício 6.3. Conte os pares $(a,\{b,b'\})$ com $a \in A$ e $b,b' \in B$ vizinhos distintos de a. Por a, há $\sum_{a\in A}\binom{d(a)}{2}$ pares. Cada par $\{b,b'\} \subseteq B$ aparece para no máximo um a, senão haveria C_4. Logo $\sum_{a\in A}\binom{d(a)}{2} \le \binom{n}{2}$. Com m arestas, o grau médio em A é $x=m/n$ e, por Jensen, $n\binom{x}{2} \le \binom{n}{2}$, isto é, $x^2-x-(n-1)\le 0$. Daí $x \le \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ e $m=nx \le \frac{n}{2}\big(1+\sqrt{4n-3}\big)$.

Resolução do Exercício 6.4. Chame de *ângulo bicolor* um par de arestas de cores diferentes com um vértice comum. Um vértice com r arestas vermelhas e $5-r$ azuis é vértice de $r(5-r)\le 6$ ângulos bicolores (o máximo ocorre em $r=2$ ou $r=3$). Há então no máximo $6\cdot 6=36$ ângulos bicolores. Um triângulo monocromático não tem ângulo bicolor, e um triângulo não monocromático tem exatamente dois (as três arestas têm duas de uma cor e uma de outra, e os dois ângulos que contêm a aresta isolada são bicolores). Portanto há no máximo $36/2=18$ triângulos não monocromáticos e pelo menos $\binom{6}{3}-18=2$ monocromáticos.

Resolução do Exercício 6.5. Fixe um vértice v de K_{17}. Das suas 16 arestas, pela casa dos pombos, pelo menos $\lceil 16/3\rceil = 6$ têm a mesma cor, digamos a cor 1, ligando v a seis vértices S. Se alguma aresta dentro de S tem cor 1, ela fecha um triângulo de cor 1 com v. Caso contrário, as arestas de S usam só as outras duas cores e, como $|S|=6=R(3,3)$, há um triângulo monocromático dentro de S.

Resolução do Exercício 6.6. Um grafo r-partido completo com partes de tamanhos $n_1,\dots,n_r$ (admitindo partes vazias) tem $\binom{n}{2}-\sum_i\binom{n_i}{2}$ arestas. Se duas partes satisfazem $n_i \ge n_j+2$, passar um vértice da parte i para a parte j troca $\binom{n_i}{2}+\binom{n_j}{2}$ por $\binom{n_i-1}{2}+\binom{n_j+1}{2}$, que é menor por $(n_i-1)-n_j \ge 1$. Logo o número de arestas aumenta estritamente. Num máximo, portanto, quaisquer duas partes diferem em no máximo 1, e essa condição determina os tamanhos a menos de ordem: o grafo é $T(n,r)$. Em particular, $t(n,r-1)\le t(n,r)$, pois $T(n,r-1)$ é r-partido completo com uma parte vazia.

Resolução do Exercício 6.7. Considere o grafo G cujos vértices são as antenas e cujas arestas são os pares que interferem. Vamos mostrar que G não contém K_4.

Entre quatro pontos quaisquer A,B,C,D, algum triângulo formado por três deles tem um ângulo de pelo menos 90°. De fato, se os quatro estão em posição convexa, os ângulos do quadrilátero somam 360° e um deles, digamos o de vértice B entre A e C, mede pelo menos 90°. Se um deles, digamos D, está dentro do triângulo ABC (ou sobre ele), os ângulos $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{CDA}$ somam 360° e um deles mede pelo menos 120°. Pontos alinhados dão ângulo de 180°.

Se o ângulo em B do triângulo ABC é pelo menos 90°, a lei dos cossenos dá $AC^2 \ge AB^2+BC^2$. Se AB e BC interferissem, teríamos $AC^2 > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, contra a hipótese de distâncias no máximo 1. Logo, entre quaisquer quatro antenas, algum par não interfere, e G não contém K_4. Pelo Teorema de Turán com $r=3$, G tem no máximo $t(n,3)\le \frac{n^2}{3}$ arestas, e como o número é inteiro, no máximo $\lfloor n^2/3\rfloor$.

Capítulo 7 — Grafos planares e a fórmula de Euler

Resolução do Exercício 7.1. Como $\delta \geq 3$, temos $n \geq 4$ e vale $\sum_v \big(6 - d(v)\big) \geq 12$ (Corolário 7.11). Vértices de grau pelo menos 6 contribuem com parcelas não positivas. Um vértice de grau entre 3 e 5 contribui com no máximo $6 - 3 = 3$. Para que a soma chegue a 12, são necessários pelo menos $12/3 = 4$ vértices de grau no máximo 5.

Resolução do Exercício 7.2. Se G e $\overline{G}$ fossem planares, com $n \geq 3$, teríamos $|E(G)|+|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} \leq 2(3n-6)$, isto é, $n^2-13n+24 \leq 0$. As raízes de $x^2-13x+24$ são $\frac{13\pm\sqrt{73}}{2}$, e como $\sqrt{73} < 9$, a maior raiz é menor que 11. Logo $n \leq 10$. Para $n \geq 11$, pelo menos um dos dois não é planar.

Resolução do Exercício 7.3. Se $c \geq 2$, existe uma face cuja fronteira toca duas componentes diferentes (caso contrário, cada face veria uma só componente e as componentes não poderiam estar "lado a lado" no plano). Traçamos dentro dessa face um arco ligando um vértice de uma componente a um vértice da outra. Esse arco é uma aresta de corte do novo grafo, tem a mesma face dos dois lados e não divide nenhuma face; o número de faces não muda e o de componentes cai em 1. Repetindo $c-1$ vezes, obtemos um grafo plano conexo com n vértices, $m+c-1$ arestas e f faces. Pela fórmula de Euler, $n - (m + c - 1) + f = 2$, isto é, $n - m + f = 1 + c$.

Resolução do Exercício 7.4. A superfície da bola é uma esfera, e as costuras formam um grafo plano conexo. Sejam p e h os números de pentágonos e hexágonos, e V, A, $F = p + h$ os números de vértices, arestas e faces. Cada vértice tem grau 3, logo $3V = 2A$. Contando arestas pelas faces, $2A = 5p + 6h$. Pela fórmula de Euler,

$$2 = V - A + F = \frac{2A}{3} - A + F \quad \Longrightarrow \quad 6F - 2A = 12 \quad \Longrightarrow \quad 6p + 6h - 5p - 6h = 12,$$

e portanto $p = 12$, independentemente de h. A bola clássica tem 12 pentágonos e 20 hexágonos.

Resolução do Exercício 7.5. Se o grafo não tem ciclos, é uma floresta, e uma floresta tem vértice de grau no máximo 1. Caso contrário, a cintura g é finita e $g \geq 6$. Pelo Teorema 7.5, $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2) \leq \frac{6}{4}(n-2) < \frac{3n}{2}$, pois $\frac{g}{g-2}$ decresce com g. O grau médio $\frac{2m}{n}$ é menor que 3, e algum vértice tem grau no máximo 2.

Resolução do Exercício 7.6. Fixe uma imersão de G com todos os vértices na fronteira da face externa e coloque um vértice novo w dentro da face externa. Como cada vértice de G é acessível a partir da face externa, podemos ligar w a todos eles por arcos dentro dessa face, sem cruzamentos (os arcos saem de w em leque, na ordem em que os vértices aparecem ao longo da fronteira). O grafo $G + w$ é planar, com $n + 1 \geq 3$ vértices e $m + n$ arestas, logo

$$m + n \leq 3(n + 1) - 6 \quad \Longrightarrow \quad m \leq 2n - 3.$$

O mesmo argumento mostra mais: se G é exteriormente planar, $G+w$ é planar. Como $K_4+w = K_5$ e $K_{2,3}+w$ contém $K_{3,3}$ (com partes $\{a, b, w\}$ e os três vértices do outro lado), nem K_4 nem $K_{2,3}$ são exteriormente planares. Para K_4 basta também a contagem: $6 > 2 \cdot 4 - 3$.

Capítulo 8 — Kuratowski, Wagner, Fáry e coloração

Resolução do Exercício 8.1. Rotule o ciclo externo $o_0, \ldots, o_4$ (com $o_i \sim o_{i\pm1}$), o pentagrama interno $n_0, \ldots, n_4$ (com $n_i \sim n_{i\pm2}$) e os raios $o_i n_i$, índices módulo 5. Contraia os cinco raios,

obtendo vértices $w_0, \ldots, w_4$. Pelo ciclo externo, w_i é adjacente a $w_{i\pm1}$; pelo pentagrama, a $w_{i\pm2}$. Assim cada w_i é adjacente aos outros quatro, e o resultado é K_5.

Uma subdivisão de K_5 tem cinco vértices de grau 4 (os vértices originais), e um subgrafo de um grafo 3-regular só tem vértices de grau no máximo 3. Logo o grafo de Petersen não contém subdivisão de K_5. Como ele não é planar (Capítulo 7), pelo Teorema de Kuratowski contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

Resolução do Exercício 8.2. Indução em n; para $n \leq 4$ não há o que provar. Se G é planar sem triângulos e $n \geq 3$, o Teorema 7.5 dá $m \leq 2n-4$, logo o grau médio é $\frac{2m}{n} < 4$ e existe um vértice v de grau no máximo 3. O grafo $G - v$ continua planar e sem triângulos; pela hipótese de indução tem uma 4-coloração, e os no máximo três vizinhos de v deixam uma cor livre para v. (Grötzsch provou em 1959 que, na verdade, três cores bastam.)

Resolução do Exercício 8.3. Fixe um ponto p_0 fora das curvas. Para um ponto p fora das curvas, escolha um caminho poligonal σ de p_0 a p em posição geral (sem passar por pontos de cruzamento e cruzando as curvas transversalmente) e pinte p de azul se σ cruza as curvas um número ímpar de vezes, de branco caso contrário.

A cor está bem definida. Se σ e σ' são dois caminhos assim, σ seguido de σ' ao contrário é uma curva fechada τ, e precisamos ver que τ cruza o desenho um número par de vezes. As curvas desenhadas formam um grafo plano D cujos vértices são os pontos de cruzamento (cada um de grau 4); uma curva sem cruzamentos recebe um vértice fictício de grau 2. Todos os graus são pares, logo as arestas de D se decompõem em ciclos simples $Z_1, \ldots, Z_r$ (Teorema de Veblen). Cada Z_j é uma curva fechada simples, e τ a cruza um número par de vezes, pois, pela curva de Jordan, os cruzamentos alternam entradas e saídas do interior de Z_j. Somando, τ cruza D um número par de vezes.

Os pontos de uma mesma região recebem a mesma cor (ligue-os por um caminho dentro da região). Duas regiões vizinhas por um trecho de curva têm cores diferentes: estendendo um caminho de uma para a outra, atravessando o trecho comum, acrescenta-se exatamente um cruzamento.

Resolução do Exercício 8.4. Construa uma ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ retirando sucessivamente vértices: v_1 é um vértice de grau no máximo 5 em G, v_2 um vértice de grau no máximo 5 em $G - v_1$, e assim por diante. Isso é sempre possível, pois todo subgrafo de um grafo planar é planar e tem vértice de grau no máximo 5 (Corolário 7.11). Oriente cada aresta v_iv_j com $i < j$ de v_i para v_j. As arestas que saem de v_i vão para vizinhos de v_i que ainda estavam presentes quando v_i foi retirado, e eram no máximo 5.

Resolução do Exercício 8.5. Q_3 é o grafo do cubo: desenhe o quadrado $000, 100, 110, 010$ dentro do quadrado $001, 101, 111, 011$ e ligue os vértices correspondentes; não há cruzamentos. Q_4 tem 16 vértices e é 4-regular, logo tem 32 arestas. Ele é bipartido (as sequências com quantidade par de uns e as com quantidade ímpar formam as partes, pois cada aresta muda a paridade), portanto não tem triângulos. Se fosse planar, teríamos $32 \leq 2 \cdot 16 - 4 = 28$, absurdo.

Resolução do Exercício 8.6. Os centros de moedas distintas estão à distância pelo menos 2, e moedas tangentes têm centros à distância exatamente 2.

Segmentos sem cruzamentos. Suponha que os segmentos AB e CD, entre centros de moedas tangentes, com A, B, C, D distintos, se cruzem num ponto X interior a ambos. Pela desigualdade triangular,

$$AC + BD \leq (AX + XC) + (BX + XD) = AB + CD = 4.$$

Como $AC \geq 2$ e $BD \geq 2$, vale a igualdade, e então X está no segmento AC e no segmento

BD. Os pontos A, X, B são colineares, assim como A, X, C; logo A, B, C, X estão numa reta, e D também (pois está na reta CX). Quatro centros colineares com AB e CD de comprimento 2 se cruzando forçam dois centros a distância menor que 2, contradição. Segmentos com uma extremidade comum só se encontram nela, pelo mesmo motivo.

Grau no máximo 6. Se O é o centro de uma moeda, os centros das moedas tangentes estão na circunferência de raio 2 em torno de O e distam pelo menos 2 entre si. Para dois deles, P e Q, o triângulo OPQ tem $OP = OQ = 2 \leq PQ$, de modo que o ângulo em O é pelo menos $60°$. Cabem no máximo $360°/60° = 6$ vizinhos, e o valor 6 é atingido no arranjo hexagonal.

Capítulo 9 — Superfícies e gênero

Resolução do Exercício 9.1. Pela Proposição 9.3, um grafo simples imerso no toro ($\chi = 0$) tem $m \leq 3n$; para K_8, $28 > 24$. No plano projetivo ($\chi = 1$), $m \leq 3(n-1)$; para K_7, $21 > 18$. A Figura 9.2 imerge K_7 no toro, e qualquer K_n com $n \geq 8$ contém K_8, que não cabe. Logo K_7 é o maior grafo completo imersível no toro.

Resolução do Exercício 9.2. Como $\chi \leq 0$, o número $h = \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}$ é pelo menos 7, e $H = \lfloor h \rfloor \geq 7$. Suponha, por absurdo, que algum grafo imerso em S tenha número cromático maior que H, e tome um subgrafo G minimal com $\chi(G) = H+1$. Por minimalidade, todo vértice de G tem grau pelo menos H (se $d(v) \leq H-1$, uma H-coloração de $G - v$ se estenderia a v), e G tem $n \geq H+1$ vértices. O grafo G também está imerso em S, logo

$$nH \leq 2m \leq 6(n-\chi) \quad \Longrightarrow \quad n(H-6) \leq -6\chi.$$

Usando $n \geq H+1$ e $H-6 > 0$, obtemos $(H+1)(H-6) \leq -6\chi$, ou seja, $(H+1)^2 - 7(H+1) + 6\chi \leq 0$. Mas h é a maior raiz de $x^2 - 7x + 6\chi$, e $H+1 > h$; para $x > h$ esse trinômio é positivo. Contradição.

Resolução do Exercício 9.3. Considere uma imersão de $K_{m,n}$ em S_g, com $g = \gamma(K_{m,n})$. O grafo é conexo, tem $m+n$ vértices e mn arestas, e não tem triângulos; como tem ciclos ($m, n \geq 2$), cada face tem comprimento pelo menos 4 e o número de faces é no máximo $\frac{mn}{2}$. Pela fórmula de Euler generalizada,

$$2 - 2g \leq (m+n) - mn + \frac{mn}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2g \geq \frac{mn - 2m - 2n + 4}{2} = \frac{(m-2)(n-2)}{2},$$

isto é, $g \geq \frac{(m-2)(n-2)}{4}$.

Resolução do Exercício 9.4. Numa imersão de K_7 no toro, $n = 7$, $m = 21$, e $n - m + f \geq 0$ dá $f \geq 14$. Por outro lado, cada face tem comprimento pelo menos 3, logo $42 = 2m \geq 3f$ e $f \leq 14$. Então $f = 14$, todas as faces têm comprimento exatamente 3 e $n - m + f = 0 = \chi(S_1)$. Pela parte da igualdade da fórmula de Euler generalizada, a imersão é celular.

Resolução do Exercício 9.5. As fronteiras formam um grafo imerso no toro cujas faces são os 7 países. Como cada país é um disco, a imersão é celular (e o grafo é conexo). Sejam V o número de pontos de encontro e A o número de trechos de fronteira. Cada ponto de encontro é extremidade de exatamente 3 trechos, logo $3V = 2A$, e $V - A + 7 = 0$. Daí $\frac{2A}{3} - A + 7 = 0$, ou seja, $A = 21$ e $V = 14$.

Contando os trechos país a país, cada trecho é contado duas vezes, e a soma dos números de trechos das fronteiras é $2A = 42$. Cada país é vizinho dos outros seis, e precisa de pelo menos

um trecho para cada vizinho, então tem pelo menos 6 trechos. Como $7 \cdot 6 = 42$, cada país tem exatamente 6 trechos: é um hexágono. Um mapa assim existe: é o dual da imersão de K_7 da Figura 9.2.

Resolução do Exercício 9.6. O grafo $C_m \times C_n$ tem vértices $(i, j) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, e (i, j) é adjacente a $(i \pm 1, j)$ e a $(i, j \pm 1)$. Desenhando os vértices como uma grade $m \times n$ no quadrado do toro (Figura 9.1), as arestas que "saem" por um lado reentram pelo oposto e não há cruzamentos; logo $\gamma \leq 1$.

Para ver que não é planar, observe que o grafo não tem triângulos quando $m, n \geq 4$. Um triângulo seria um passeio fechado de 3 passos, cada um somando ± 1 a uma única coordenada. Se uma coordenada recebe exatamente um passo, ela muda de $\pm 1 \not\equiv 0$; então uma coordenada recebe os três passos, e $\pm 1 \pm 1 \pm 1 \equiv 0$ exigiria m ou n dividindo 1 ou 3, impossível para $m, n \geq 4$. O grafo tem mn vértices e $2mn$ arestas; se fosse planar, teríamos $2mn \leq 2mn - 4$, absurdo. Logo $\gamma(C_m \times C_n) = 1$.

Capítulo 10 — Desenhos e número de cruzamentos

Resolução do Exercício 10.1. O grafo $P - e$ tem $n = 10$ vértices e $m = 14$ arestas, contém ciclos e, sendo subgrafo do grafo de Petersen, tem cintura pelo menos 5. Se fosse planar, o Lema 10.5 daria $14 \leq \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$, o que é falso. Logo $\mathrm{cr}(P - e) \geq 1$.

Para a cota superior, observe que o grafo de Petersen é *aresta-transitivo*: para quaisquer duas arestas existe um automorfismo levando uma na outra. Assim todos os grafos $P - e$ são isomorfos, e basta exibir um desenho de um deles com um cruzamento. No desenho da Figura 10.5, cada cruzamento envolve duas arestas; apagando uma das arestas que passam pelo primeiro cruzamento, sobra um desenho de $P - e$ com um único cruzamento. Portanto $\mathrm{cr}(P - e) = 1$.

Resolução do Exercício 10.2. **Bipartição.** Pinte u_i com a cor $i \bmod 2$ e w_i com a cor $(i + 1) \bmod 2$. A aresta $u_i u_{i+1}$ liga cores i e $i + 1$; a aresta $u_i w_i$ liga i e $i + 1$; a aresta $w_i w_{i+3}$ liga $i + 1$ e $i + 4$, que têm paridades diferentes. Como 8 é par, a regra é coerente módulo 8, e toda aresta liga cores distintas.

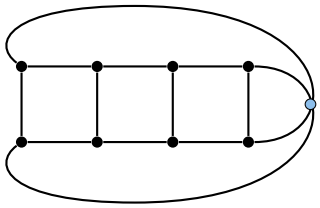
Ausência de C_4. Chame de *raios* as arestas $u_i w_i$. Um ciclo atravessa raios um número par de vezes, e os raios formam um emparelhamento, de modo que um ciclo de comprimento 4 usa 0 ou 2 raios. Com 0 raios, ele estaria no ciclo externo $u_0 u_1 \cdots u_7$ ou no ciclo interno formado pelas arestas $w_i w_{i+3}$ (como $\gcd(3, 8) = 1$, essas arestas formam um único ciclo de comprimento 8); nenhum dos dois tem C_4. Com 2 raios $u_i w_i$ e $u_j w_j$, as outras duas arestas formam um caminho de u_i a u_j pelo ciclo externo e um de w_i a w_j pelo interno, com comprimentos somando 2. Se for $1 + 1$, teríamos $j \equiv i \pm 1$ e $j \equiv i \pm 3 \pmod 8$, impossível. Se for $2 + 0$ ou $0 + 2$, então $i = j$ e os dois raios coincidem. Logo não há C_4 e, como o grafo é bipartido, não há ciclos ímpares: a cintura é pelo menos 6.

A cota. Com $n = 16$ e $m = 24$, o Teorema 10.6 dá $\mathrm{cr} \geq 24 - \frac{6}{4} \cdot 14 = 3$.

Resolução do Exercício 10.3. **Não planaridade.** Tome os vértices $\{v_0, v_2, v_5\}$ de um lado e $\{v_1, v_4, v_6\}$ do outro. As ligações são: v_0v_1, v_0v_4, e v_0v_6 pelo caminho $v_0v_7v_6$; v_2v_1, v_2v_6, e v_2v_4 pelo caminho $v_2v_3v_4$; v_5v_1, v_5v_4 e v_5v_6. Os caminhos usam vértices internos distintos (v_7 e v_3), de modo que V_8 contém uma subdivisão de $K_{3,3}$ e $\mathrm{cr}(V_8) \geq 1$.

Um desenho com um cruzamento. Renomeie o ciclo como $u_0u_1u_2u_3w_0w_1w_2w_3$; as diagonais longas são então u_iw_i. Desenhe $u_0, \ldots, u_3$ numa linha superior e $w_0, \ldots, w_3$ logo abaixo, com os "degraus" u_iw_i verticais e os trilhos u_iu_{i+1}, w_iw_{i+1} horizontais. Faltam u_3w_0 e w_3u_0: a primeira

sai de u_3 pela direita e contorna a figura por baixo até w_0; a segunda sai de w_3 pela direita e contorna a figura por cima até u_0. Elas se cruzam uma única vez, à direita da figura, e nada mais se cruza.



Logo $\mathrm{cr}(V_8) = 1$.

Resolução do Exercício 10.4. Num desenho bom só se cruzam arestas independentes, e cada par no máximo uma vez. Em K_n, cada conjunto de quatro vértices $\{a, b, c, d\}$ determina exatamente três pares de arestas independentes ($ab|cd$, $ac|bd$, $ad|bc$), e todo par de arestas independentes surge assim de um único conjunto. Logo há $3\binom{n}{4}$ pares independentes, e essa é uma cota para o número de cruzamentos.

Num desenho retilíneo, considere quatro vértices. Se estão em posição convexa, os lados do quadrilátero não se cruzam e as diagonais se cruzam: um cruzamento. Se um deles está dentro do triângulo dos outros três, nenhum dos três pares independentes se cruza (os três segmentos que saem do ponto interior ficam dentro do triângulo e cada um deles é disjunto do lado oposto, exceto pela extremidade no vértice). Assim cada quádrupla contribui com no máximo um cruzamento, e o total é no máximo $\binom{n}{4}$. Em posição convexa todas as quádruplas contribuem, e o valor $\binom{n}{4}$ é atingido.

Resolução do Exercício 10.5. O grafo $P - v$ tem 9 vértices, $15 - 3 = 12$ arestas, contém ciclos e tem cintura pelo menos 5. Se fosse planar, o Lema 10.5 daria $12 \leq \frac{5}{3} \cdot 7 = \frac{35}{3}$, o que é falso.

Resolução do Exercício 10.6. Seja D um desenho ótimo, com $k = \mathrm{cr}(G)$ cruzamentos. Para cada cruzamento, escolha uma extremidade de uma das duas arestas envolvidas e coloque-a num conjunto S; então $|S| \leq k$. Ao remover os vértices de S, em cada cruzamento ao menos uma das duas arestas some, porque perdeu uma extremidade. Assim o desenho restante de $G - S$ não tem cruzamentos, e $G - S$ é planar. Pelo teorema das quatro cores, $G - S$ admite uma coloração própria com 4 cores. Dando a cada vértice de S uma cor nova e exclusiva, obtemos uma coloração própria de G com no máximo $4 + k$ cores.

Resolução do Exercício 10.7. Para $k = 0$, qualquer triangulação plana serve. Para $k \geq 1$, tome $r = 2k + 2$ e a *bipirâmide* B_r: um ciclo $c_1 c_2 \cdots c_r c_1$ e dois polos N e S, cada um ligado a todos os c_i. Desenhando o ciclo como polígono regular, N no centro e S no exterior, obtemos uma triangulação: $n = r + 2$ vértices e $3r = 3n - 6$ arestas, cujas faces são os triângulos Nc_ic_{i+1} e Sc_ic_{i+1}.

Para $j = 1, \ldots, k$, as faces $Nc_{2j-1}c_{2j}$ e $Nc_{2j}c_{2j+1}$ formam o quadrilátero $Nc_{2j-1}c_{2j}c_{2j+1}$, cuja diagonal já desenhada é Nc_{2j}. Acrescente a outra diagonal $c_{2j-1}c_{2j+1}$, traçada dentro desse quadrilátero. Ela não é aresta de B_r, pois c_{2j-1} e c_{2j+1} não são consecutivos no ciclo (já que $r \geq 4$), e as k diagonais novas são distintas e estão em quadriláteros com interiores disjuntos (os índices $2j - 1, 2j, 2j + 1$ dos quadriláteros consecutivos só compartilham o vértice c_{2j+1}, e $2k + 1 \leq r$). Cada diagonal nova cruza apenas Nc_{2j}.

O grafo G resultante é simples, tem $m = 3n - 6 + k$ arestas e um desenho com k cruzamentos. Pelo Teorema 10.6, $\mathrm{cr}(G) \geq m - 3n + 6 = k$. Logo $\mathrm{cr}(G) = k = m - 3n + 6$.

Resolução do Exercício 10.8. Com $n = 8$ e $m = 15$, a versão bipartida dá $\operatorname{cr}(K_{3,5}) \geq 15 - 2(8-2) = 3$. O Lema 12.5, aplicado à classe de tamanho 5, dá $\operatorname{cr}(K_{3,5}) \geq \frac{5}{3}\operatorname{cr}(K_{3,4}) = \frac{10}{3}$; como o número de cruzamentos é inteiro, $\operatorname{cr}(K_{3,5}) \geq 4$. O desenho de Zarankiewicz tem $Z(3,5) = 1\cdot 4 = 4$ cruzamentos. Logo $\operatorname{cr}(K_{3,5}) = 4$. Observe que a contagem, partindo de um valor exato pequeno, supera a cota obtida da fórmula de Euler.

Capítulo 11 — O lema do cruzamento

Resolução do Exercício 11.1. Toda triangulação plana com $n \geq 3$ vértices (por exemplo, a bipirâmide sobre um ciclo de $n-2$ vértices) tem $m = 3n-6$ arestas e $\operatorname{cr} = 0$. Para ela, $\frac{m^3}{64n^2} = \frac{(3n-6)^3}{64n^2} > 0$, e a desigualdade $\operatorname{cr} \geq m^3/(64n^2)$ seria falsa. Isso não contradiz o lema, porque $3n-6 < 4n$. Na demonstração, a hipótese entra na escolha $p = 4n/m$, que precisa ser no máximo 1: para grafos esparsos não há como "afinar" o grafo, e a cota fraca $\operatorname{cr} \geq m - 3n$ (negativa aqui) é tudo o que se tem.

Resolução do Exercício 11.2. Para K_n, $m = \binom{n}{2} \geq 4n$ equivale a $n \geq 9$. Então

$$\operatorname{cr}(K_n) \;\geq\; \frac{1}{64n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^3 = \frac{n(n-1)^3}{512},$$

que é assintoticamente $n^4/512$. A contagem de cópias de K_5 dá $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$, assintoticamente $n^4/120$, mais de quatro vezes melhor. A conjectura de Hill prevê $n^4/64$. A lição: o lema é imbatível na generalidade (vale para qualquer grafo, e a ordem m^3/n^2 é a correta), mas para uma família específica e muito simétrica a contagem a partir de um caso pequeno conhecido é mais eficiente.

Resolução do Exercício 11.3. Seja L o conjunto das retas k-ricas e $\ell = |L|$. Cada uma contém pelo menos k pontos, logo $k\ell \leq I(P,L) \leq 2\sqrt[3]{4}(n\ell)^{2/3} + 4n + \ell$. A maior das três parcelas é pelo menos $k\ell/3$.

- Se é a primeira: $k\ell \leq 6\sqrt[3]{4}(n\ell)^{2/3}$, isto é, $\ell^{1/3} \leq 6\sqrt[3]{4}\,n^{2/3}/k$, e $\ell \leq 864\,n^2/k^3$.
- Se é a segunda: $k\ell \leq 12n$, e $\ell \leq 12n/k$.
- Se é a terceira: $k\ell \leq 3\ell$, isto é, $k \leq 3$. Nesse caso usamos a cota trivial $\ell \leq \binom{n}{2} < \frac{n^2}{2} \leq \frac{27}{2}\cdot\frac{n^2}{k^3}$.

Em todos os casos $\ell = O(n^2/k^3 + n/k)$.

Resolução do Exercício 11.4. Fixada a reta $y = ax + b$, cada $x \in \{1, \dots, t\}$ dá $y = ax + b$ com $2 \leq y \leq t \cdot t + t^2 = 2t^2$; logo o ponto (x, y) está em P, e esses são os únicos pontos de P na reta (um para cada abscissa). As retas são distintas, pois são determinadas por (a, b). Temos $n = |P| = 2t^3$ pontos, $\ell = t^3$ retas e $I = t \cdot t^3 = t^4$ incidências.

Suponha que valesse uma cota $I \leq C(n\ell)^{\alpha} + C(n+\ell)$ com $\alpha < \frac{2}{3}$. Neste exemplo o lado direito é $C\,2^{\alpha}t^{6\alpha} + 3Ct^3$, que para t grande é menor que t^4, pois $6\alpha < 4$. Contradição. Portanto o expoente $2/3$ é ótimo. Note que $(n\ell)^{2/3} = 2^{2/3}t^4$, de modo que a cota de Szemerédi–Trotter é justa a menos de constante neste exemplo.

Resolução do Exercício 11.5. Parta de um desenho bom ótimo D de G. Enquanto o desenho atual não for 1-planar, existe uma aresta cruzada pelo menos duas vezes; apague-a. Cada remoção elimina pelo menos dois cruzamentos. Suponha que paramos depois de r remoções, com um desenho 1-planar D' de um subgrafo G' com $m - r$ arestas. Então:

- $m - r \le 4n - 8$, pela cota dos 1-planares, isto é, $r \ge m - 4n + 8$;
- $\operatorname{cr}(D') \ge \operatorname{cr}(G') \ge (m - r) - 3n + 6$, pelo Teorema 10.6;
- $\operatorname{cr}(D) \ge 2r + \operatorname{cr}(D')$.

Juntando,

$$\operatorname{cr}(G) = \operatorname{cr}(D) \ge 2r + m - r - 3n + 6 = m + r - 3n + 6 \ge m + (m - 4n + 8) - 3n + 6 = 2m - 7n + 14.$$

Resolução do Exercício 11.6. Para todo grafo simples H vale $\operatorname{cr}(H) \ge 2m_H - 7n_H$: se $n_H \ge 3$, pelo exercício anterior; se $n_H \le 2$, o lado direito é negativo. Repetindo o sorteio com probabilidade p,

$$p^4 \operatorname{cr}(G) \ge 2p^2 m - 7pn, \qquad \operatorname{cr}(G) \ge \frac{2m}{p^2} - \frac{7n}{p^3}.$$

A função $f(p) = 2mp^{-2} - 7np^{-3}$ tem derivada $-4mp^{-3} + 21np^{-4}$, que se anula em $p = \frac{21n}{4m}$; essa escolha é admissível ($p \le 1$) exatamente quando $m \ge \frac{21}{4}n$. Substituindo,

$$\operatorname{cr}(G) \ge 2m \cdot \frac{16m^2}{441n^2} - 7n \cdot \frac{64m^3}{9261n^3} = \frac{32m^3}{441n^2} - \frac{448m^3}{9261n^2} = \frac{672 - 448}{9261} \cdot \frac{m^3}{n^2} = \frac{32}{1323} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

Como $\frac{32}{1323} > \frac{1}{64}$ (pois $32 \cdot 64 = 2048 > 1323$), a constante melhorou.

Resolução do Exercício 11.7. Ligue por um segmento cada par de pontos a distância δ. Nenhum ponto de P está no interior de um desses segmentos pq, pois estaria a distância menor que δ de p. Suponha que dois segmentos pq e rs, com quatro extremidades distintas, se cruzem num ponto x interior a ambos. Pela desigualdade triangular,

$$|pr| + |qs| \;\le\; (|px| + |xr|) + (|qx| + |xs|) = |pq| + |rs| = 2\delta,$$

com igualdade só se x está nos segmentos pr e qs, o que forçaria p, q, r, s a estarem todos na mesma reta; nesse caso os dois segmentos se sobrepõem e alguma extremidade de um estaria no interior do outro, o que já excluímos. Logo a desigualdade é estrita e $\min\{|pr|, |qs|\} < \delta$, contradizendo a minimalidade de δ. Portanto os segmentos formam um desenho plano de um grafo simples com $n \ge 3$ vértices, que tem no máximo $3n - 6$ arestas.

Resolução do Exercício 11.8. Suponha, por absurdo, que $m > 4n$. Pelo lema do cruzamento, $\operatorname{cr}(G) \ge \frac{m^3}{64n^2} > \frac{64n^3}{64n^2} = n$, contradizendo $\operatorname{cr}(G) \le n$. Logo $m \le 4n$. Em palavras: um grafo com n vértices e mais de $4n$ arestas tem necessariamente mais cruzamentos do que vértices.

Capítulo 12 — Grafos completos e bipartidos completos

Resolução do Exercício 12.1. Seja D um desenho bom ótimo de K_n. Cada conjunto S de cinco vértices induz um desenho de K_5, que tem pelo menos $\operatorname{cr}(K_5) = 1$ cruzamento. Um cruzamento de D envolve quatro vértices e aparece no subdesenho de S exatamente quando S contém esses quatro, o que acontece para $n - 4$ conjuntos S. Contando os pares (cruzamento, S) de duas maneiras,

$$(n - 4)\operatorname{cr}(K_n) \;\ge\; \binom{n}{5}, \qquad \text{logo} \qquad \operatorname{cr}(K_n) \;\ge\; \frac{1}{n-4}\binom{n}{5} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}.$$

Resolução do Exercício 12.2. Num desenho bom ótimo de $K_{m,n}$, cada cópia de $K_{3,3}$ (escolha de 3 vértices em cada classe) tem pelo menos um cruzamento, e cada cruzamento, que envolve 2 vértices de cada classe, pertence a $(m-2)(n-2)$ cópias. Assim

$$\operatorname{cr}(K_{m,n}) \;\geq\; \frac{\binom{m}{3}\binom{n}{3}}{(m-2)(n-2)} = \frac{m(m-1)}{6}\cdot\frac{n(n-1)}{6} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{36}.$$

Para $m=n$ grande, isso é assintoticamente $n^4/36$, enquanto $Z(n,n)\sim n^4/16$: a razão tende a $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

Resolução do Exercício 12.3. Temos $H(2k)=\frac{1}{4}k(k-1)(k-1)(k-2)$ e $H(2k-1)=\frac{1}{4}(k-1)(k-1)(k-2)(k-2)$, de modo que, para $k\geq 3$,

$$\frac{H(2k)}{H(2k-1)} = \frac{k}{k-2} = \frac{2k}{2k-4}.$$

Pelo Lema 12.14, $\operatorname{cr}(K_{2k}) \geq \frac{2k}{2k-4}\operatorname{cr}(K_{2k-1}) = \frac{2k}{2k-4}H(2k-1) = H(2k)$. Como $\operatorname{cr}(K_{2k})\leq H(2k)$ pelo desenho de Hill, vale a igualdade.

Resolução do Exercício 12.4. Sejam $a_1<a_2$ dois vértices da reta de cima e $b_1<b_2$ dois da de baixo (ordenados da esquerda para a direita). Os segmentos a_1b_1 e a_2b_2 não se cruzam, pois a ordem dos extremos é a mesma nas duas retas; os segmentos a_1b_2 e a_2b_1 se cruzam, pois a ordem se inverte. Como dois segmentos com extremidade comum não se cruzam, todo cruzamento envolve dois vértices de cima e dois de baixo, e cada escolha desses quatro dá exatamente um cruzamento. O total é $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$. Para $m=n$ grande, isso é assintoticamente $n^4/4$, cerca de quatro vezes $Z(n,n)\sim n^4/16$: dividir cada classe entre os dois lados de um eixo, como faz o desenho de Zarankiewicz, economiza três quartos dos cruzamentos.

Resolução do Exercício 12.5. O Lema 12.5, aplicado à classe de tamanho 4, dá $\operatorname{cr}(K_{4,n}) \geq \frac{4}{4-2}\operatorname{cr}(K_{3,n}) = 2\,Z(3,n)$, pelo Teorema 12.6. Como $\lfloor 4/2\rfloor\lfloor 3/2\rfloor = 2$, temos $Z(4,n) = 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor = 2Z(3,n)$. Logo $\operatorname{cr}(K_{4,n})\geq Z(4,n)$, e a igualdade vem da Proposição 12.1.

Resolução do Exercício 12.6. Defina $f(m,n)=\operatorname{cr}(K_{m,n})/\left(\binom{m}{2}\binom{n}{2}\right)$. Pelo Lema 12.5, aplicado a cada uma das classes, f é não decrescente em cada variável; em particular $a_n=f(n,n)$ é não decrescente. Além disso $a_n\leq 2$, porque num desenho bom cada escolha de dois vértices de cada classe gera no máximo dois cruzamentos (há apenas dois pares de arestas independentes entre esses quatro vértices). Logo a_n converge para algum a. Como

$$\frac{Z(n,n)}{\binom{n}{2}^2} \;\longrightarrow\; \frac{n^4/16}{n^4/4} = \frac{1}{4},$$

segue que $\operatorname{cr}(K_{n,n})/Z(n,n) = a_n\cdot\binom{n}{2}^2/Z(n,n)\to 4a$, e o limite L existe.

Resolução do Exercício 12.7. Pelo Lema 12.14, $\operatorname{cr}(K_n)/\binom{n}{4}$ é não decrescente; para $n\geq 13$ ela é pelo menos $\operatorname{cr}(K_{13})/\binom{13}{4}\geq 219/715$, pois $\binom{13}{4}=715$. Dividindo por $3/8$,

$$\frac{219/715}{3/8} = \frac{219\cdot 8}{715\cdot 3} = \frac{584}{715}.$$

Com o valor $\operatorname{cr}(K_{13})=225$ anunciado por Aichholzer, a constante sobe para $\frac{225}{715}=\frac{45}{143}$, e a razão com $\frac{3}{8}$ passa a $\frac{120}{143}$.

Resolução do Exercício 12.8. Escreva $N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, de modo que $Z(4,n) = 2N$ e $Z(5,n) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \lfloor \frac{4}{2} \rfloor N = 4N$. O Lema 12.5, aplicado à classe de tamanho 5, dá

$$\operatorname{cr}(K_{5,n}) \;\geq\; \frac{5}{3}\operatorname{cr}(K_{4,n}) = \frac{10}{3}N = \frac{5}{6}\cdot 4N = \frac{5}{6}Z(5,n).$$

A contagem perde um sexto. Kleitman recupera a diferença com uma análise detalhada dos desenhos de $K_{5,n}$ e com a paridade (Teorema 12.9).

Capítulo 13 — Número de cruzamentos retilíneo

Resolução do Exercício 13.1. Considere o fecho convexo dos cinco pontos. Se ele tem 5 ou 4 vértices, quatro deles estão em posição convexa. Resta o caso em que o fecho é um triângulo abc e os pontos d, e estão no seu interior. A reta de passa pelo interior do triângulo e, como nenhum vértice está nela (posição geral), corta exatamente dois lados; assim ela deixa dois vértices do triângulo, digamos b e c, de um mesmo lado, e a do outro. Além disso, d e e estão do mesmo lado da reta bc, o lado do interior do triângulo. Afirmamos que b, c, d, e estão em posição convexa. Caso contrário, um deles estaria no interior do triângulo dos outros três. Uma observação simples resolve todos os casos: a reta que passa por um vértice de um triângulo e por um ponto do seu interior separa os outros dois vértices. Se d estivesse no triângulo bce, a reta ed separaria b de c; o mesmo se e estivesse no triângulo bcd. Se b estivesse no triângulo cde, a reta cb separaria d de e; o mesmo para c no triângulo bde. Todas essas conclusões contradizem o que vimos.

Resolução do Exercício 13.2. A monotonia do Teorema 13.8 diz que $\overline{\operatorname{cr}}(K_n) \geq \frac{n}{n-4}\,\overline{\operatorname{cr}}(K_{n-1})$. Assim $\overline{\operatorname{cr}}(K_9) \geq \frac{9}{5}\cdot 19 = \frac{171}{5}$, que não é inteiro: $\overline{\operatorname{cr}}(K_9) \geq 35$. Em seguida, $\overline{\operatorname{cr}}(K_{10}) \geq \frac{10}{6}\cdot 35 = \frac{175}{3}$, logo $\overline{\operatorname{cr}}(K_{10}) \geq 59$. Os valores verdadeiros são 36 e 62.

Resolução do Exercício 13.3. Numere os vértices do n-ágono convexo de v_0 a v_{n-1}. O segmento v_iv_{i+s}, com $1 \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor$, deixa $s-1$ vértices de um lado e $n-1-s$ do outro, logo é uma $(s-1)$-aresta. Para $s < n/2$ há n segmentos com esse s; para $s = n/2$ (n par) há $n/2$. Portanto $E_k = n$ para $0 \leq k < \frac{n-2}{2}$, e $E_{(n-2)/2} = \frac{n}{2}$ quando n é par.

Seja $n = 2t+2$. O peso da classe $k = t$ é zero, e a identidade dá

$$\sum_{k=0}^{t-1}(t-k)^2\,n - \frac{3}{4}\binom{n}{3} = n\cdot\frac{t(t+1)(2t+1)}{6} - \frac{3}{4}\binom{n}{3}.$$

Com $n = 2t+2$, o primeiro termo é $\frac{(2t+2)(2t+1)t(t+1)}{6}$ e $\binom{n}{4} = \frac{(2t+2)(2t+1)(2t)(2t-1)}{24}$. A diferença entre eles é

$$(2t+2)(2t+1)t\left[\frac{t+1}{6} - \frac{2t-1}{12}\right] = \frac{(2t+2)(2t+1)t}{4},$$

que é exatamente $\frac{3}{4}\binom{n}{3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2t+2)(2t+1)(2t)}{6}$. Logo a identidade dá $\binom{n}{4}$, como esperado.

Resolução do Exercício 13.4. Seja h o número de vértices do fecho convexo; então $E_0 = h$.

As 1-arestas que saem do fecho. Seja p um vértice do fecho. Os outros $n-1$ pontos estão num ângulo menor que π com vértice p; ordene-os angularmente, $q_1, \ldots, q_{n-1}$, de modo que q_1 e q_{n-1} são os vizinhos de p no fecho. A reta pq_2 deixa apenas q_1 de um lado, e a reta pq_{n-2} deixa apenas q_{n-1}: ambas são 1-arestas, e são distintas porque $n \geq 6$. Obtemos $2h$ incidências (vértice do fecho, 1-aresta que sai dele).

A contagem. Uma 1-aresta é contada duas vezes apenas se suas duas extremidades estão no fecho; seja t o número dessas. Então $E_1 \geq 2h - t$, e como cada uma consome duas das $2h$ incidências, $t \leq h$.

- Se $h = 3$, um segmento entre dois vértices do fecho é lado do triângulo, logo 0-aresta, e $t = 0$: $E_1 \geq 6$ e $E_0 + E_1 \geq 9$.
- Se $h = 4$, só as duas diagonais do quadrilátero podem ser 1-arestas entre vértices do fecho, logo $t \leq 2$: $E_1 \geq 6$ e $E_0 + E_1 \geq 10$.
- Se $h \geq 5$, $E_1 \geq 2h - h = h$ e $E_0 + E_1 \geq 2h \geq 10$.

Em todos os casos $E_{\leq 1} \geq 9 = 3\binom{3}{2}$, de acordo com o Teorema 13.13.

Resolução do Exercício 13.5. Seja P com n pontos em posição geral. Cada um dos $\binom{n}{5}$ subconjuntos de cinco pontos contém uma quádrupla convexa (Esther Klein), e cada quádrupla convexa está em $n-4$ desses subconjuntos. Logo $\square(P) \geq \binom{n}{5}/(n-4) = \frac{1}{5}\binom{n}{4}$, e pela Proposição 13.4 o mesmo vale para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$. Para o número de cruzamentos topológico, o papel do teorema de Klein é desempenhado por $\mathrm{cr}(K_5) = 1$: todo desenho de K_5 tem um cruzamento, e a mesma contagem (Exercício 12.1) dá $\mathrm{cr}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$.

Resolução do Exercício 13.6. Sorteie n pontos independentes e uniformes num triângulo. Com probabilidade 1 eles estão em posição geral. Para cada um dos $\binom{n}{4}$ subconjuntos de quatro índices, os quatro pontos correspondentes são uniformes e independentes no triângulo, e pelo resultado de Blaschke estão em posição convexa com probabilidade $\frac{2}{3}$. Pela linearidade da esperança, o número esperado de quádruplas convexas é $\frac{2}{3}\binom{n}{4}$. Uma variável aleatória assume, com probabilidade positiva, um valor menor ou igual à sua esperança; logo existe uma configuração em posição geral com no máximo $\frac{2}{3}\binom{n}{4}$ quádruplas convexas. (Essa cota, $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \leq \frac{2}{3}\binom{n}{4}$, está longe de q^*, que é pouco maior que $\frac{3}{8}$: pontos uniformes numa região convexa são "convexos demais". As boas configurações têm estrutura hierárquica, com aglomerados de pontos dentro de aglomerados.)

Resolução do Exercício 13.7. O desenho de Zarankiewicz usa segmentos, de modo que $\overline{\mathrm{cr}}(K_{m,n}) \leq Z(m,n)$; seus vértices não estão em posição geral (há vértices colineares nos eixos), mas uma perturbação pequena dos vértices não altera quais pares de segmentos se cruzam, pois nenhum cruzamento do desenho ocorre num vértice e nenhum par de segmentos é tangente ou sobreposto. Por outro lado, $\overline{\mathrm{cr}}(K_{m,n}) \geq \mathrm{cr}(K_{m,n})$, e pelo teorema de Kleitman $\mathrm{cr}(K_{m,n}) = Z(m,n)$ quando $\min\{m,n\} \leq 6$. Logo $\overline{\mathrm{cr}}(K_{m,n}) = Z(m,n)$ nesses casos.

Capítulo 14 — Variantes do número de cruzamentos

Resolução do Exercício 14.1. Seja D um desenho de G com $\mathrm{cr}(D) = \mathrm{cr}(G)$.

Arestas que se cruzam duas vezes. Suponha que e e f se cruzem em dois pontos p e q, escolhidos consecutivos ao longo de e (entre eles, o trecho $e[p,q]$ não encontra f). Troque os trechos: e passa a seguir $f[p,q]$ e f passa a seguir $e[p,q]$, e afaste ligeiramente as duas curvas perto de p e de q, de modo que ali elas apenas se aproximem sem se cruzar. Toda outra aresta que cortava um dos dois trechos continua cortando exatamente um trecho, então o número de cruzamentos com terceiras arestas não muda; os dois cruzamentos em p e q desaparecem. Se a troca criar um laço numa aresta (a nova e cruzando a si mesma), corte o laço, o que só diminui cruzamentos. O resultado tem pelo menos 2 cruzamentos a menos, contradizendo a minimalidade.

Arestas adjacentes que se cruzam. Se $e = vx$ e $f = vy$ se cruzam num ponto p, troque os trechos de v até p das duas arestas e afaste-as perto de p. O cruzamento em p some e nenhum outro é criado. Novamente contradição.

Logo todo desenho ótimo é bom, e $\mathrm{cr}(G)$ é o mínimo sobre desenhos bons.

Por que isso não prova $\mathrm{pcr} = \mathrm{cr}$. Num desenho que minimiza pcr, a troca de trechos mantém o total de cruzamentos com terceiras arestas, mas muda *quem* cruza com quem: a aresta e passa a percorrer o trecho de f e herda os cruzamentos de $f[p,q]$ com outras arestas. Se uma aresta g cruzava $f[p,q]$ e não cruzava e, o par $\{e,g\}$ passa a contar para pcr. Assim a troca pode aumentar o número de pares cruzantes, e o argumento não se aplica.

Resolução do Exercício 14.2. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Movimento (v, f). Seja $f = a_k b_l$ e v um vértice fora de f; por simetria, $v = a_i$ com $i \neq k$. As arestas incidentes a v são $a_i b_1, a_i b_2, a_i b_3$; a aresta $a_i b_l$ é adjacente a f (compartilha b_l) e as outras duas são independentes de f. O movimento altera a paridade de exatamente 2 coordenadas da soma, e $S(D)$ não muda módulo 2.

Passar uma aresta por cima de outra. Empurrar um trecho de e por cima de f cria (ou destrói) dois cruzamentos entre e e f, sem mudar a paridade de nenhum par. Passar um trecho por cima de um cruzamento de duas outras arestas não altera nenhuma paridade.

Como dois desenhos quaisquer estão ligados por uma sequência desses movimentos (o fato topológico citado no texto), $S(D)$ é o mesmo para todos os desenhos de $K_{3,3}$.

Cálculo. No desenho em duas linhas da Figura 14.3(a), os segmentos $a_i b_j$ e $a_k b_l$ com $i < k$ se cruzam se e só se $j > l$; há $3 \cdot 3 = 9$ cruzamentos, todos entre arestas independentes, e $S(D) = 9 \equiv 1$. Portanto, em *todo* desenho de $K_{3,3}$, $S(D) = 1$, e algum par independente se cruza um número ímpar de vezes.

Resolução do Exercício 14.3. Se todo par de arestas se cruza um número par de vezes, em particular todo par de arestas independentes se cruza um número par de vezes. Pelo Teorema 14.3, G é planar, isto é, $\mathrm{cr}(G) = 0$. O enunciado é mais fraco porque sua hipótese é mais forte: ele exige paridade par também para os pares de arestas adjacentes, enquanto o teorema de Hanani–Tutte não impõe condição alguma sobre eles.

Resolução do Exercício 14.4. K_7 tem $\binom{7}{2} = 21$ arestas. Pelo Teorema 14.15, um grafo 1-planar com 7 vértices tem no máximo $4 \cdot 7 - 8 = 20$ arestas. Logo K_7 não é 1-planar.

Para K_6, tome o octaedro: vértices a, b, c (triângulo externo) e d, e, f (triângulo interno), com d oposto a a, e oposto a b e f oposto a c; cada vértice é adjacente a todos menos ao seu oposto. Esse grafo é planar, com 12 arestas e 8 faces triangulares. Faltam as arestas ad, be e cf. Desenhe ad saindo de a pela face externa, cruzando bc e chegando a d pela face bcd; be pela face bdf, cruzando df, até e pela face def; cf pela face ace, cruzando ae, até f pela face aef. Os seis pares de faces usados são distintos, de modo que as três curvas novas não se cruzam entre si, e cada uma cruza uma única aresta do octaedro, cada uma diferente. O desenho é 1-planar (Figura 14.4).

Resolução do Exercício 14.5. *C_4 não é thrackle.* Sejam ab, bc, cd, da as arestas. Num thrackle, ab e cd se cruzam exatamente uma vez, num ponto x, e bc e da se cruzam exatamente uma vez; pares adjacentes só se encontram na extremidade comum. Considere a curva fechada J formada pelo trecho de ab de a a x, pelo trecho de cd de x a d e pela aresta da. Esses três arcos só se encontram nas extremidades (ab e cd só em x; ab e da só em a; cd e da só em d), logo J é uma curva de Jordan.

Em x, o cruzamento é próprio: os quatro raios que saem de x alternam entre as duas arestas, na ordem cíclica (raio para a, raio para c ou d, raio para b, raio para o restante). Os raios para a e para d são consecutivos e pertencem a J; os raios para b e para c saem portanto para o mesmo lado de J. O trecho de ab de x até b não encontra J: não cruza ab, não volta a cruzar cd e só encontraria da em a. Da mesma forma o trecho de cd de x até c não encontra J. Logo b e c

estão do mesmo lado de J.

A aresta bc não encontra ab nem cd fora das extremidades b e c, e cruza da exatamente uma vez. Então bc cruza J exatamente uma vez, o que coloca b e c em lados opostos de J. Contradição.

Ciclos ímpares. Tome os vértices $p_0, \dots, p_{2k}$ de um $(2k+1)$-ágono regular e as arestas $p_i p_{i+k}$ (índices módulo $2k+1$). Como $\mathrm{mdc}(k, 2k+1) = 1$, o passeio $p_0, p_k, p_{2k}, \dots$ visita todos os vértices e fecha um ciclo C_{2k+1}. Duas cordas $p_i p_{i+k}$ e $p_j p_{j+k}$ com $j \notin \{i, i \pm k\}$: por simetria, $j = i + t$ com $1 \le t \le k-1$ ou $k+1 \le t \le 2k$; no primeiro caso j está estritamente entre i e $i+k$ e $j + k = i + k + t$ está estritamente entre $i + k$ e $i + 2k + 1 \equiv i$, logo as cordas se entrelaçam no círculo e os segmentos se cruzam exatamente uma vez; o segundo caso é o primeiro com os papéis trocados. Se $j = i \pm k$, as cordas compartilham um vértice. Portanto o polígono estrelado $\{(2k+1)/k\}$ é um thrackle retilíneo.

Resolução do Exercício 14.6. Gire o plano para que os pontos tenham abscissas distintas. Seja p o ponto mais à esquerda e q o mais à direita, e ℓ a reta pq. Pela posição geral, nenhum outro ponto está em ℓ. Seja U o conjunto dos pontos acima de ℓ, ordenados por abscissa crescente, e L o dos pontos abaixo, ordenados por abscissa decrescente. O ciclo é p, depois os pontos de U da esquerda para a direita, depois q, depois os pontos de L da direita para a esquerda, voltando a p.

Os segmentos da parte superior ligam pontos consecutivos em abscissa, logo ocupam intervalos de abscissas com interiores disjuntos e não se cruzam entre si; o mesmo vale na parte inferior. Cada segmento superior tem ambas as extremidades no semiplano fechado acima de ℓ, tocando ℓ no máximo em p ou q, e cada segmento inferior está no semiplano fechado abaixo de ℓ; segmentos de lados opostos só podem se encontrar em p ou q, que são extremidades comuns. O ciclo hamiltoniano é plano.

Resolução do Exercício 14.7. Suponha que três segmentos s_1, s_2, s_3 se cruzem dois a dois num desenho RAC. Então $s_2 \perp s_1$ e $s_3 \perp s_1$, logo $s_2 \parallel s_3$. Dois segmentos paralelos só se encontram se forem colineares e se sobrepuserem, o que não é um cruzamento próprio. Logo s_2 e s_3 não se cruzam, contradição. Um desenho sem três arestas duas a duas cruzantes é, por definição, 3-quase-planar; logo todo grafo com desenho RAC é quase-planar.

Resolução do Exercício 14.8. Num desenho k-planar, cada aresta está em no máximo k cruzamentos e cada cruzamento envolve 2 arestas, logo o desenho tem no máximo $km/2$ cruzamentos e $\mathrm{cr}(G) \le km/2$. Se $m \le 4n$, nada a provar. Se $m > 4n$, o lema do cruzamento dá $m^3/(64n^2) \le \mathrm{cr}(G) \le km/2$, isto é, $m^2 \le 32kn^2$ e $m \le \sqrt{32k}\, n$. Em qualquer caso, $m \le \max\{4n, \sqrt{32k}\, n\}$.

Capítulo 15 — Complexidade e algoritmos

Resolução do Exercício 15.1. Pelo Exercício 14.1, um desenho ótimo é bom: cada par de arestas se cruza no máximo uma vez, e só pares independentes se cruzam. Logo $\mathrm{cr}(G) \le \binom{m}{2}$, e se $k \ge \binom{m}{2}$ a resposta é sim sem certificado algum. Podemos então supor $k < \binom{m}{2}$, e k é polinomial em m.

O certificado. Uma lista de no máximo k pares de arestas independentes e, para cada aresta e, a ordem em que e atravessa os pares em que aparece; mais um mergulho plano (sistema de rotação) do grafo $G^\times$ obtido trocando cada cruzamento por um vértice de grau 4. $G^\times$ tem $n + k$ vértices e $m + 2k$ arestas, tamanho polinomial em $n + m$.

A verificação. Construa $G^\times$ a partir de G, da lista e das ordens; verifique que é planar (tempo

linear) e que, em cada vértice de cruzamento, as quatro meias-arestas alternam entre as duas arestas originais, o que garante um cruzamento próprio. Tudo em tempo polinomial. Logo o problema está em NP.

Resolução do Exercício 15.2. Primeiro teste se G é planar; se for, $\mathrm{cr}(G) = 0 \le 1$. Caso contrário, para cada par $\{e, f\}$ de arestas independentes, $e = ab$, $f = cd$, forme $G_{e,f}$: retire e e f e acrescente um vértice novo x ligado a a, b, c, d. Afirmamos: $\mathrm{cr}(G) \le 1$ se e só se algum $G_{e,f}$ é planar. Se um desenho de G tem um único cruzamento, entre e e f, trocar o cruzamento por x dá um desenho plano de $G_{e,f}$. Reciprocamente, suponha $G_{e,f}$ planar e olhe a ordem cíclica dos vizinhos de x no mergulho. Se a e b forem consecutivos nessa ordem (e portanto c e d também), dá para separar x em dois vértices próximos, um ligado a a, b e outro a c, d, sem cruzamentos, e depois apagá-los religando a a b e c a d: obteríamos um desenho plano de G, contradizendo a não planaridade. Logo a ordem é alternada (a, c, b, d ou a, d, b, c) e, desfazendo x, as curvas $a\,x\,b$ e $c\,x\,d$ se cruzam propriamente em x: um desenho de G com um cruzamento. Há $O(m^2)$ pares e cada teste de planaridade leva $O(n + m)$; o tempo total é $O(m^2(n + m))$.

Resolução do Exercício 15.3. Seja G^* o grafo dual do mergulho, F_u o conjunto das faces incidentes a u e F_v o das incidentes a v, e δ a distância em G^* entre F_u e F_v.

Cota inferior. Uma curva de u a v que não passa por outros vértices começa numa face de F_u, termina numa face de F_v e, cada vez que passa de uma face para outra, atravessa uma aresta, o que corresponde a uma aresta de G^*. A sequência de faces visitadas é um passeio em G^* de F_u a F_v; seu comprimento, que é o número de cruzamentos, é pelo menos δ.

Cota superior. Tome um caminho mínimo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\delta$ em G^* com $\varphi_0 \in F_u$, $\varphi_\delta \in F_v$, e sejam $e_1, \ldots, e_\delta$ as arestas primais atravessadas. Desenhe a curva saindo de u dentro de φ_0, atravessando e_1 num ponto interior para entrar em φ_1, e assim por diante até chegar a v dentro de φ_δ. Dentro de cada face a curva não cruza nada (faces são regiões conexas abertas). O total é δ cruzamentos.

Resolução do Exercício 15.4. Tome três triângulos disjuntos $T_i = x_i y_i z_i$ ($i = 1, 2, 3$), um vértice u e um vértice v, e as arestas ux_1, y_1x_2, y_2x_3 e y_3v. O grafo é planar e tem dois mergulhos naturais.

Mergulho 1. Desenhe os três triângulos lado a lado, ligados em cadeia, sem nenhum dentro do outro. Então u e v estão na face externa e uv entra com 0 cruzamentos.

Mergulho 2. Desenhe T_1 envolvendo u (a aresta ux_1 por dentro de T_1), T_2 envolvendo T_1 (a aresta y_1x_2 entre eles), T_3 envolvendo T_2, e v fora de T_3. É um mergulho plano válido. Agora u está no interior de cada T_i e v no exterior, e cada T_i é uma curva de Jordan; pelo teorema de Jordan, qualquer curva de u a v cruza cada T_i pelo menos uma vez, num total de pelo menos 3 cruzamentos.

Com t triângulos aninhados o custo vai a t: o custo da inserção num mergulho fixo pode ser arbitrariamente maior que o ótimo sobre todos os mergulhos, e a escolha do mergulho é parte essencial do problema (é exatamente onde mora a dificuldade no resultado de Cabello e Mohar).

Resolução do Exercício 15.5. Seja $e = uv$ e $H = G - e$, planar. Se u e v estão em componentes distintas de H, desenhe cada componente com u (respectivamente v) na face externa e coloque os desenhos lado a lado: e entra sem cruzamentos. Caso contrário, seja H_0 a componente que contém u e v, com $n_0 \le n$ vértices e m_0 arestas; desenhe as demais componentes longe. Fixe um mergulho de H_0. Se $n_0 \le 2$, H_0 é uma aresta e G teria aresta múltipla; logo $n_0 \ge 3$ e $m_0 \le 3n_0 - 6$, e o número de faces é $f = m_0 - n_0 + 2 \le 2n_0 - 4$. Pelo Exercício 15.3, inserir e custa a distância dual entre as faces de u e as de v; um caminho mínimo no dual visita faces distintas, logo tem no máximo $f - 1 \le 2n_0 - 5 \le 2n - 5$ arestas. Portanto $\mathrm{cr}(G) \le 2n - 5$.

Resolução do Exercício 15.6. Dado um grafo G_w com n vértices, m arestas e pesos em $\{1,\dots,W\}$, construa G como na Proposição 15.5: cada aresta de peso w vira w caminhos de comprimento 2. G tem no máximo $n+mW$ vértices e $2mW$ arestas, polinomial em n e W, e pode ser construído nesse tempo. Pela proposição, o número ponderado de G_w é $\mathrm{cr}(G)$. Se cr de grafos simples fosse polinomial, aplicá-lo a G calcularia o valor ponderado em tempo polinomial em n e W.

Nas reduções de NP-dificuldade isso é usado no sentido contrário: prova-se que a versão ponderada é NP-difícil com pesos polinomialmente limitados (o que é mais fácil, porque pesos grandes funcionam como paredes rígidas), e a construção acima transfere a dificuldade para grafos simples. É por isso que a restrição a pesos polinomiais é essencial: com pesos exponenciais, G teria tamanho exponencial.

Capítulo 16 — Grafos críticos, produtos e Albertson

Resolução do Exercício 16.1. *Existência.* Seja G com $\mathrm{cr}(G)\geq k$. Enquanto existir uma aresta e com $\mathrm{cr}(G-e)\geq k$, retire-a. O processo termina (o número de arestas diminui) num subgrafo H com $\mathrm{cr}(H)\geq k$ e $\mathrm{cr}(H-e)<k$ para toda aresta e de H: H é k-cruzamento-crítico.

Pontes. Seja $e=uv$ uma ponte e $G_1\ni u$, $G_2\ni v$ as componentes de $G-e$ que contêm u e v (as demais componentes não interferem e podem ser desenhadas longe). Primeiro, $\mathrm{cr}(G_1\cup G_2)=\mathrm{cr}(G_1)+\mathrm{cr}(G_2)$: num desenho da união disjunta, os cruzamentos internos a G_1 são pelo menos $\mathrm{cr}(G_1)$ e os internos a G_2 pelo menos $\mathrm{cr}(G_2)$; e desenhos ótimos de cada um, colocados longe um do outro, atingem a soma. Agora tome um desenho ótimo de G_1; escolhendo uma face que contém u e aplicando uma inversão da esfera, podemos supor que u está na face externa. Faça o mesmo com G_2 e v. Coloque os dois desenhos lado a lado e ligue u a v pela região externa, sem cruzamentos. Então $\mathrm{cr}(G)\leq\mathrm{cr}(G_1)+\mathrm{cr}(G_2)=\mathrm{cr}(G-e)\leq\mathrm{cr}(G)$, e vale a igualdade.

Num grafo k-cruzamento-crítico com $k\geq 1$, uma ponte e daria $\mathrm{cr}(G-e)=\mathrm{cr}(G)\geq k$, contrariando a criticidade. Logo não há pontes.

Resolução do Exercício 16.2. $\mathrm{cr}(K_5)=\mathrm{cr}(K_{3,3})=1$. Retirando uma aresta de K_5 obtém-se um grafo planar (Figura 16.1), e retirando uma aresta de $K_{3,3}$ obtém-se uma subdivisão de K_4 (exemplo do texto), também planar; por simetria vale para toda aresta. Logo ambos são 1-cruzamento-críticos.

Subdividir uma aresta não altera o número de cruzamentos: um desenho de G dá um desenho da subdivisão com os mesmos cruzamentos, e num desenho da subdivisão as duas metades de uma aresta formam uma curva que pode ter laços, removíveis sem aumentar cruzamentos. Retirar uma aresta de uma subdivisão S de K_5 (ou $K_{3,3}$) dá um subgrafo de uma subdivisão de K_5-e, mais caminhos pendentes, que é planar. Logo toda subdivisão é crítica, e há infinitas.

Seja agora G 1-cruzamento-crítico, sem vértices isolados nem de grau 2. Como G não é planar, pelo teorema de Kuratowski contém um subgrafo S que é subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Se houvesse uma aresta $e\notin E(S)$, $G-e$ ainda conteria S e não seria planar, contra a criticidade. Logo $E(G)=E(S)$; sem vértices isolados, $G=S$. Sem vértices de grau 2, a subdivisão é trivial e $G\in\{K_5,K_{3,3}\}$.

Resolução do Exercício 16.3. *O desenho.* Use três triângulos concêntricos $C^{(1)},C^{(2)},C^{(3)}$ com vértices nas mesmas três direções, e ligue os vértices de mesma direção por raios: são as três cópias de C_3 na outra direção, cada uma como um caminho $x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}$. A aresta que fecha cada um desses caminhos, $x^{(3)}x^{(1)}$, vai do triângulo externo ao interno dentro de um setor entre dois raios, cruzando só o triângulo do meio. São 3 cruzamentos, e $\mathrm{cr}(C_3\,\square\,C_3)\leq 3$.

Não planaridade. $G = C_3 \,\square\, C_3$ tem $n = 9$ e $m = 18$; a cota $m \le 3n - 6 = 21$ não exclui planaridade. Use os triângulos: cada triângulo de G é uma das 3 linhas ou das 3 colunas (dois vértices em linhas e colunas diferentes não são adjacentes), então há exatamente 6 triângulos. Num mergulho plano, haveria $f = m - n + 2 = 11$ faces, das quais no máximo 6 triangulares. Contando lados, $2m = 36 \ge 3t + 4(11 - t) = 44 - t$, isto é, $t \ge 8$, contradição. Logo G não é planar.

Resolução do Exercício 16.4. Disponha os vértices (i, j), $0 \le i < m$, $0 \le j < n$, numa grade no quadrado e identifique os lados opostos (Figura 16.5): as arestas $(m-1, j)(0, j)$ e $(i, n-1)(i, 0)$ atravessam a identificação. O resultado é um mergulho no toro em que cada face é um quadrado da grade: $V = mn$, $E = 2mn$, $F = mn$, e $V - E + F = 0$, a característica de Euler do toro.

Para o gênero exato, falta ver que $G = C_m \,\square\, C_n$ não é planar. Contraia, simultaneamente para todo i, as arestas $(i, j)(i, j + 1)$ com $j = 2, \ldots, n - 2$: cada ciclo de comprimento n vira um triângulo, e o resultado é $C_m \,\square\, C_3$. Fazendo o mesmo na outra direção, chega-se a $C_3 \,\square\, C_3$ como menor de G. Menores de grafos planares são planares, e $C_3 \,\square\, C_3$ não é planar (Exercício 16.3). Logo G tem gênero 1.

Resolução do Exercício 16.5. Seja D um desenho ótimo de G sem triângulos. Retirando uma aresta de cada cruzamento, obtém-se um grafo plano sem triângulos com pelo menos $m - \mathrm{cr}(G)$ arestas. Pelo Teorema 7.5, ele tem no máximo $2n - 4$ arestas (para $n \ge 3$). Logo $m - \mathrm{cr}(G) \le 2n - 4$, isto é, $\mathrm{cr}(G) \ge m - 2n + 4$.

Q_4 tem $n = 16$ vértices, é 4-regular e logo tem $m = 32$ arestas, e não tem triângulos (é bipartido, pela paridade do número de uns). Então $\mathrm{cr}(Q_4) \ge 32 - 32 + 4 = 4$. A cota geral daria $32 - 48 + 6 = -10$, que não informa nada: ela desperdiça a ausência de triângulos.

Resolução do Exercício 16.6. Seja G r-crítico. Se um vértice v tivesse grau no máximo $r-2$, uma $(r-1)$-coloração de $G-v$ (que existe, pois $G-v$ é subgrafo próprio) usaria no máximo $r-2$ cores na vizinhança de v, sobrando uma cor para v: G seria $(r-1)$-colorível. Logo $\delta(G) \ge r - 1$.

Para $r \ge 3$, G é conexo: caso contrário, cada componente seria $(r-1)$-colorível e a união também. Suponha que v seja um vértice de corte, com $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \{v\}$, ambos com mais de um vértice. Cada G_i é subgrafo próprio, logo tem uma $(r-1)$-coloração; permutando as cores de G_2, podemos supor que v recebe a mesma cor nas duas. Juntando, temos uma $(r-1)$-coloração de G, contradição. Logo G é 2-conexo.

Resolução do Exercício 16.7. *Implicação.* A conjectura para $r = 6$ diz: $\chi(G) \ge 6$ implica $\mathrm{cr}(G) \ge \mathrm{cr}(K_6) = 3$. Pela contrapositiva, $\mathrm{cr}(G) \le 2$ implica $\chi(G) \le 5$.

Prova direta. Tome um desenho ótimo (bom) de G com $\mathrm{cr}(G) \le 2$. Com 0 cruzamentos, G é planar e 4-colorível. Com 1 cruzamento, retire uma extremidade x de uma das arestas cruzadas: $G - x$ é planar, receba uma 4-coloração, e x recebe a quinta cor. Com 2 cruzamentos, sejam X e Y os conjuntos de 4 extremidades das arestas envolvidas no primeiro e no segundo cruzamento (em desenho bom, as arestas que se cruzam são independentes). Basta achar $x \in X$ e $y \in Y$ iguais ou não adjacentes: então $G - \{x, y\}$ é planar, recebe 4 cores, e x, y recebem ambos a quinta cor. Se $X \cap Y \ne \emptyset$, tome $x = y$ na interseção. Caso contrário, se todo $x \in X$ fosse adjacente a todo $y \in Y$, G conteria $K_{4,4}$ como subgrafo, e $\mathrm{cr}(G) \ge \mathrm{cr}(K_{4,4}) = 4 > 2$, contradição. Logo existe o par desejado, e $\chi(G) \le 5$.

Capítulo 17 — Panorama 2006–2026

Resolução do Exercício 17.1. *A contagem dupla.* Num desenho bom de K_n, cada cruzamento envolve duas arestas independentes, isto é, exatamente 4 vértices. Ao apagar um vértice v, o cruzamento sobrevive em $D-v$ se e só se v não é um desses 4; isso acontece para $n-4$ escolhas de v. Somando sobre v, $\sum_v \operatorname{cr}(D-v) = (n-4)\operatorname{cr}(D)$.

Cada $D-v$ é um desenho de K_{n-1}, logo $\operatorname{cr}(D-v) \geq \operatorname{cr}(K_{n-1})$. Tomando D ótimo, $(n-4)\operatorname{cr}(K_n) \geq n\,\operatorname{cr}(K_{n-1})$ e, como $\operatorname{cr}(K_n)$ é inteiro, $\operatorname{cr}(K_n) \geq \left\lceil \frac{n}{n-4}\operatorname{cr}(K_{n-1}) \right\rceil$.

O caso par. Com $n=2k$: $H(2k-1) = \frac{1}{4}(k-1)^2(k-2)^2$ e

$$\frac{2k}{2k-4}H(2k-1) = \frac{k}{k-2}\cdot\frac{(k-1)^2(k-2)^2}{4} = \frac{k(k-1)^2(k-2)}{4} = H(2k).$$

Se $\operatorname{cr}(K_{2k-1}) = H(2k-1)$, então $\operatorname{cr}(K_{2k}) \geq H(2k)$; como sempre $\operatorname{cr}(K_{2k}) \leq H(2k)$ (desenho cilíndrico), vale a igualdade.

Resolução do Exercício 17.2. Pelo exercício anterior, $\operatorname{cr}(K_n) \geq \frac{n}{n-4}\operatorname{cr}(K_{n-1})$. Como $\binom{n}{4} = \frac{n}{n-4}\binom{n-1}{4}$, dividindo obtemos $\frac{\operatorname{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}} \geq \frac{\operatorname{cr}(K_{n-1})}{\binom{n-1}{4}}$: a sequência é não decrescente.

Logo, para $n \geq 13$, $\operatorname{cr}(K_n) \geq \frac{\operatorname{cr}(K_{13})}{\binom{13}{4}}\binom{n}{4} = \frac{225}{715}\binom{n}{4} = \frac{45}{143}\binom{n}{4}$, e $\alpha = \frac{45}{143}$ serve.

Como $H(n)$ é um polinômio de grau 4 com coeficiente líder $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{64}$ e $\binom{n}{4}$ tem coeficiente líder $\frac{1}{24}$, $H(n)/\binom{n}{4} \to \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$. A cota obtida corresponde à fração $\frac{45}{143}/\frac{3}{8} = \frac{120}{143}$ do valor conjecturado. As cotas por álgebras de flags (fração 0,9855) são bem melhores, o que mostra o quanto a contagem elementar perde.

Resolução do Exercício 17.3. Seja D um desenho bom de $K_{m,n}$ com $m = 2k+2$, partes A ($|A| = m$) e B. Cada cruzamento envolve duas arestas independentes, logo exatamente 2 vértices de A e 2 de B. Apagando um vértice $a \in A$, o cruzamento sobrevive se e só se a não é um dos seus 2 vértices em A: isso ocorre para $m-2 = 2k$ escolhas. Portanto $\sum_{a\in A}\operatorname{cr}(D-a) = 2k\,\operatorname{cr}(D)$, e cada $D-a$ desenha $K_{2k+1,n}$. Se $\operatorname{cr}(K_{2k+1,n}) = Z(2k+1,n)$,

$$2k\,\operatorname{cr}(D) \geq (2k+2)\,Z(2k+1,n) = (2k+2)\,k^2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\tfrac{n-1}{2}\right\rfloor,$$

pois $\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor = k\cdot k$. Daí $\operatorname{cr}(D) \geq (k+1)k\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor = Z(2k+2,n)$, já que $\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor = (k+1)k$. Com a cota superior $\operatorname{cr}(K_{m,n}) \leq Z(m,n)$ (desenho em duas retas), vale a igualdade.

Resolução do Exercício 17.4. *Cinco pontos.* Se a envoltória convexa dos 5 pontos tem 4 ou 5 vértices, quaisquer 4 deles estão em posição convexa. Suponha que a envoltória seja um triângulo abc, com p, q no interior. Pela posição geral, a reta pq não passa por a, b, c, e dois deles, digamos a e b, estão do mesmo lado dela. Afirmamos que a, b, p, q estão em posição convexa. Nem a nem b está no triângulo formado pelos outros três, pois a, b são vértices da envoltória dos 5 pontos. Se p estivesse no triângulo abq, a semirreta de q passando por p sairia desse triângulo pelo lado ab, e a reta pq separaria a de b, contradição; o mesmo para q no triângulo abp. Logo nenhum dos quatro está no triângulo dos outros três: posição convexa.

A cota. Num desenho retilíneo de K_n, cada 4 pontos em posição convexa produzem exatamente um cruzamento (o das diagonais), e 4 pontos em posição não convexa não produzem nenhum. Logo $\overline{\operatorname{cr}}$ do desenho é o número de quádruplas convexas. Cada um dos $\binom{n}{5}$ conjuntos de 5 pontos contém pelo menos uma quádrupla convexa, e cada quádrupla está em exatamente $n-4$ conjuntos de 5. Portanto o número de quádruplas convexas é pelo menos $\binom{n}{5}/(n-4) = \frac{1}{5}\binom{n}{4}$, e $\overline{\operatorname{cr}}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$.

Referências

[1] B. M. Ábrego, S. Fernández-Merchant. A lower bound for the rectilinear crossing number. *Graphs and Combinatorics* 21 (2005), 293–300.

[2] B. M. Ábrego, S. Fernández-Merchant, J. Leaños, G. Salazar. A central approach to bound the number of crossings in a generalized configuration. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 30 (2008), 273–278.

[3] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, G. Salazar. The 2-page crossing number of K_n. *Discrete & Computational Geometry* 49 (2013), 747–777 (versão de conferência: SoCG 2012).

[4] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, G. Salazar. Shellable drawings and the cylindrical crossing number of K_n. *Discrete & Computational Geometry* 52 (2014), 743–753.

[5] B. M. Ábrego, S. Fernández-Merchant, G. Salazar. The rectilinear crossing number of K_n: closing in (or are we?). Em: *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, 2013, 5–18.

[6] E. Ackerman. On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges. *Discrete & Computational Geometry* 41 (2009), 365–375.

[7] E. Ackerman. On topological graphs with at most four crossings per edge. *Computational Geometry* 85 (2019), 101574.

[8] E. Ackerman, G. Tardos. On the maximum number of edges in quasi-planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 114 (2007), 563–571.

[9] J. Adamsson, R. B. Richter. Arrangements, circular arrangements and the crossing number of $C_7 \times C_n$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 90 (2004), 21–39.

[10] P. K. Agarwal, B. Aronov, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir. Quasi-planar graphs have a linear number of edges. *Combinatorica* 17 (1997), 1–9.

[11] O. Aichholzer. Another small but long step for crossing numbers: $cr(13) = 225$ and $cr(14) = 315$. *Proceedings of the 33rd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2021)*, 72–77.

[12] O. Aichholzer, A. García, J. Tejel, B. Vogtenhuber, A. Weinberger. Twisted ways to find plane structures in simple drawings of complete graphs. *Discrete & Computational Geometry* (2023/2024); versão de conferência: SoCG 2022.

[13] O. Aichholzer, F. Duque, R. Fabila-Monroy, O. E. García-Quintero, C. Hidalgo-Toscano. An ongoing project to improve the rectilinear and the pseudolinear crossing constants. *Journal of Graph Algorithms and Applications* 24 (2020), 421–432.

[14] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, E. Szemerédi. Crossing-free subgraphs. *Annals of Discrete Mathematics* 12 (1982), 9–12.

[15] M. O. Albertson, D. W. Cranston, J. Fox. Crossings, colorings, and cliques. *Electronic Journal of Combinatorics* 16 (2009), #R45.

[16] K. Appel, W. Haken. Every planar map is four colorable. *Illinois Journal of Mathematics* 21 (1977), 429–567.

[17] A. Arroyo, D. McQuillan, R. B. Richter, G. Salazar. Convex drawings of the complete graph: topology meets geometry. *Ars Mathematica Contemporanea* 22 (2022).

[18] M. Balko, R. Fulek, J. Kynčl. Crossing numbers and combinatorial characterization of monotone drawings of K_n. *Discrete & Computational Geometry* 53 (2015), 107–143.

[19] J. Balogh, B. Lidický, G. Salazar. Closing in on Hill's conjecture. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 33 (2019), 1261–1276.

[20] J. Balogh, B. Lidický, S. Norin, F. Pfender, G. Salazar, S. Spiro. Crossing numbers of complete bipartite graphs. *Procedia Computer Science* 223 (2023), 78–87 (LAGOS 2023).

[21] J. Barát, G. Tóth. Towards the Albertson conjecture. *Electronic Journal of Combinatorics* 17 (2010), #R73.

[22] L. W. Beineke, F. Harary. The thickness of the complete graph. *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965), 850–859.

[23] L. W. Beineke, R. D. Ringeisen. On the crossing numbers of products of cycles and graphs of order four. *Journal of Graph Theory* 4 (1980), 145–155.

[24] H. Bergold, S. Felsner, M. M. Reddy, J. Orthaber, M. Scheucher. Plane Hamiltonian cycles in convex drawings. *40th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2024)*; arXiv 2403.12898.

[25] D. Bienstock. Some provably hard crossing number problems. *Discrete & Computational Geometry* 6 (1991), 443–459.

[26] D. Bienstock, N. Dean. Bounds for rectilinear crossing numbers. *Journal of Graph Theory* 17 (1993), 333–348.

[27] D. Bokal. Infinite families of crossing-critical graphs with prescribed average degree and crossing number. *Journal of Graph Theory* 65 (2010), 139–162.

[28] D. Bokal, Z. Dvořák, P. Hliněný, J. Leaños, B. Mohar, T. Wiedera. Bounded degree conjecture holds precisely for c-crossing-critical graphs with $c \leq 12$. *Combinatorica* 42 (2022); versão de conferência: SoCG 2019.

[29] D. Bokal, B. Oporowski, R. B. Richter, G. Salazar. Characterizing 2-crossing-critical graphs. *Advances in Applied Mathematics* 74 (2016).

[30] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics 244, Springer, 2008.

[31] D. Brosch, S. C. Polak. New lower bounds on crossing numbers of $K_{m,n}$ from semidefinite programming. *Mathematical Programming* (2024).

[32] C. Buchheim, M. Chimani, D. Ebner, C. Gutwenger, M. Jünger, G. W. Klau, P. Mutzel, R. Weiskircher. A branch-and-cut approach to the crossing number problem. *Discrete Optimization* 5 (2008), 373–388.

[33] A. Büngener, M. Kaufmann. Improving the crossing lemma by characterizing dense 2-planar and 3-planar graphs. *GD 2024*, LIPIcs 320, 29:1–29:22; versão de periódico: *Journal of Graph Algorithms and Applications* 29 (2025), 143–174.

[34] S. Cabello. Hardness of approximation for crossing number. *Discrete & Computational Geometry* 49 (2013), 348–358.

[35] S. Cabello, B. Mohar. Adding one edge to planar graphs makes crossing number and 1-planarity hard. *SIAM Journal on Computing* 42 (2013), 1803–1829.

[36] G. Cairns, Y. Nikolayevsky. Bounds for generalized thrackles. *Discrete & Computational Geometry* 23 (2000), 191–206.

[37] P. A. Catlin. Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 26 (1979), 268–274.

[38] M. Chimani. *Computing Crossing Numbers*. Tese de doutorado, TU Dortmund, 2008.

[39] R. Christian, R. B. Richter, G. Salazar. Zarankiewicz's conjecture is finite for each fixed m. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 103 (2013), 237–247.

[40] J. Chuzhoy. An algorithm for the graph crossing number problem. *Proceedings of STOC 2011*, 303–312.

[41] J. Chuzhoy, S. Mahabadi, Z. Tan. Towards better approximation of graph crossing number. *Proceedings of FOCS 2020*, 73–84.

[42] J. Chuzhoy, Z. Tan. A subpolynomial approximation algorithm for graph crossing number in low-degree graphs. *Proceedings of STOC 2022*, 303–316.

[43] K. Clancy, M. Haythorpe, A. Newcombe. A survey of graphs with known or bounded crossing numbers. *Australasian Journal of Combinatorics* 78 (2020), 209–296; arXiv 1901.05155 (2019).

[44] K. Clancy, M. Haythorpe, A. Newcombe, E. Pegg Jr. There are no cubic graphs on 26 vertices with crossing number 10 or 11. *Graphs and Combinatorics* 36 (2020), 1713–1721.

[45] D. W. Cranston. Progress on Albertson's conjecture. Preprint, arXiv 2512.08020 (2025).

[46] E. de Klerk, J. Maharry, D. V. Pasechnik, R. B. Richter, G. Salazar. Improved bounds for the crossing numbers of $K_{m,n}$ and K_n. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 20 (2006), 189–202.

[47] E. de Klerk, D. V. Pasechnik, A. Schrijver. Reduction of symmetric semidefinite programs using the regular $*$-representation. *Mathematical Programming* 109 (2007), 613–624.

[48] A. M. Dean, R. B. Richter. The crossing number of $C_4 \times C_4$. *Journal of Graph Theory* 19 (1995), 125–129.

[49] W. Didimo, P. Eades, G. Liotta. Drawing graphs with right angle crossings. *Theoretical Computer Science* 412 (2011), 5156–5166.

[50] R. Diestel. *Graph Theory*. 5.ª ed., Graduate Texts in Mathematics 173, Springer, 2017.

[51] Z. Dvořák, P. Hliněný, B. Mohar. Structure and generation of crossing-critical graphs. *34th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2018)*, LIPIcs 99, 33:1–33:14.

[52] Z. Dvořák, B. Mohar. Crossing-critical graphs with large maximum degree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100 (2010), 413–417.

[53] R. B. Eggleton, R. K. Guy. The crossing number of the n-cube. *Notices of the American Mathematical Society* 17 (1970), 757.

[54] P. Erdős, R. K. Guy. Crossing number problems. *American Mathematical Monthly* 80 (1973), 52–58.

[55] R. Fabila-Monroy, J. López. Computational search of small point sets with small rectilinear crossing number. *Journal of Graph Algorithms and Applications* 18 (2014), 393–399.

[56] L. Faria, C. M. H. de Figueiredo. On Eggleton and Guy's conjectured upper bound for the crossing number of the n-cube. *Mathematica Slovaca* 50 (2000), 271–287.

[57] L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, O. Sýkora, I. Vrťo. An improved upper bound on the crossing number of the hypercube. *Journal of Graph Theory* 59 (2008), 145–161.

[58] I. Fáry. On straight line representation of planar graphs. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 11 (1948), 229–233.

[59] S. Fiorini, J. B. Gauci. The crossing number of the generalized Petersen graph $P[3k, k]$. *Mathematica Bohemica* 128 (2003), 337–347.

[60] J. Fox, J. Pach, A. Suk. The number of edges in k-quasi-planar graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 27 (2013), 550–561.

[61] J. Fox, J. Pach, A. Suk. Approximating the rectilinear crossing number. *Graph Drawing 2016*, LNCS 9801, 413–426; *Computational Geometry* 111 (2023).

[62] R. Fulek, J. Kynčl. Counterexample to an extension of the Hanani–Tutte theorem on the surface of genus 4. *Combinatorica* 39 (2019), 1267–1279.

[63] R. Fulek, J. Kynčl. The $\mathbb{Z}_2$-genus of Kuratowski minors. *Discrete & Computational Geometry* 68 (2022), 425–447; versão de conferência: SoCG 2018.

[64] R. Fulek, J. Pach. A computational approach to Conway's thrackle conjecture. *Computational Geometry* 44 (2011), 345–355.

[65] R. Fulek, J. Pach. Thrackles: an improved upper bound. *Discrete Applied Mathematics* 259 (2019), 226–231.

[66] R. Fulek, A. J. Ruiz-Vargas. Topological graphs: empty triangles and disjoint matchings. *Proceedings of SoCG 2013*, 259–266.

[67] M. R. Garey, D. S. Johnson. Crossing number is NP-complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 4 (1983), 312–316.

[68] E. Gethner, L. Hogben, B. Lidický, F. Pfender, A. Ruiz, M. Young. On crossing numbers of complete tripartite and balanced complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory* 84 (2017), 552–565.

[69] L. Y. Glebsky, G. Salazar. The crossing number of $C_m \times C_n$ is as conjectured for $n \geq m(m+1)$. *Journal of Graph Theory* 47 (2004), 53–72.

[70] A. Grigoriev, H. L. Bodlaender. Algorithms for graphs embeddable with few crossings per edge. *Algorithmica* 49 (2007), 1–11.

[71] M. Grohe. Computing crossing numbers in quadratic time. *Journal of Computer and System Sciences* 68 (2004), 285–302.

[72] C. Gutwenger, P. Mutzel, R. Weiskircher. Inserting an edge into a planar graph. *Algorithmica* 41 (2005), 289–308.

[73] L. Guth, N. H. Katz. On the Erdős distinct distances problem in the plane. *Annals of Mathematics* 181 (2015), 155–190.

[74] R. K. Guy. A combinatorial problem. *Nabla (Bulletin of the Malayan Mathematical Society)* 7 (1960), 68–72.

[75] H. Hanani (C. Chojnacki). Über wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume. *Fundamenta Mathematicae* 23 (1934), 135–142.

[76] F. Harary, A. Hill. On the number of crossings in a complete graph. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 13 (1963), 333–338.

[77] F. Harary, P. C. Kainen, A. J. Schwenk. Toroidal graphs with arbitrarily high crossing numbers. *Nanta Mathematica* 6 (1973), 58–67.

[78] P. Hliněný. Crossing-number critical graphs have bounded path-width. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 88 (2003), 347–367.

[79] P. Hliněný. Crossing number is hard for cubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 96 (2006), 455–471.

[80] P. Hliněný, L. Khazaliya. Crossing number is NP-hard for constant path-width (and tree-width). *35th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2024)*, LIPIcs 322, 40:1–40:15.

[81] P. Hliněný, G. Salazar. On the crossing number of almost planar graphs. *Graph Drawing 2006*, LNCS 4372, 162–173.

[82] J. Hopcroft, R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM* 21 (1974), 549–568.

[83] K. Kawarabayashi, B. Reed. Computing crossing number in linear time. *Proceedings of STOC 2007*, 382–390.

[84] D. J. Kleitman. The crossing number of $K_{5,n}$. *Journal of Combinatorial Theory* 9 (1970), 315–323.

[85] M. Klešč, R. B. Richter, I. Stobert. The crossing number of $C_5 \times C_n$. *Journal of Graph Theory* 22 (1996), 239–243.

[86] M. Kochol. Construction of crossing-critical graphs. *Discrete Mathematics* 66 (1987), 311–313.

[87] V. P. Korzhik, B. Mohar. Minimal obstructions for 1-immersions and hardness of 1-planarity testing. *Journal of Graph Theory* 72 (2013), 30–71.

[88] T. Kővári, V. T. Sós, P. Turán. On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Mathematicum* 3 (1954), 50–57.

[89] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930), 271–283.

[90] J. R. Lee. Separators in region intersection graphs. *Proceedings of ITCS 2017*; arXiv 1608.01612 (2016).

[91] F. T. Leighton. *Complexity Issues in VLSI*. MIT Press, 1983.

[92] L. Lovász, J. Pach, M. Szegedy. On Conway's thrackle conjecture. *Discrete & Computational Geometry* 18 (1997), 369–376.

[93] L. Lovász, K. Vesztergombi, U. Wagner, E. Welzl. Convex quadrilaterals and k-sets. Em: *Towards a Theory of Geometric Graphs*, Contemporary Mathematics 342, AMS, 2004, 139–148.

[94] T. Madej. Bounds for the crossing number of the n-cube. *Journal of Graph Theory* 15 (1991), 81–97.

[95] A. Mansfield. Determining the thickness of graphs is NP-hard. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 93 (1983), 9–23.

[96] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 212, Springer, 2002.

[97] J. Matoušek. Near-optimal separators in string graphs. *Combinatorics, Probability and Computing* 23 (2014), 135–139.

[98] D. McQuillan, S. Pan, R. B. Richter. On the crossing number of K_{13}. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115 (2015), 224–235.

[99] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001.

[100] B. Oporowski, D. Zhao. Coloring graphs with crossings. *Discrete Mathematics* 309 (2009), 2948–2951.

[101] J. Pach, P. K. Agarwal. *Combinatorial Geometry*. Wiley, 1995.

[102] J. Pach, R. Radoičić, G. Tardos, G. Tóth. Improving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graphs. *Discrete & Computational Geometry* 36 (2006), 527–552.

[103] J. Pach, F. Shahrokhi, M. Szegedy. Applications of the crossing number. *Algorithmica* 16 (1996), 111–117.

[104] J. Pach, J. Solymosi, G. Tóth. Unavoidable configurations in complete topological graphs. *Discrete & Computational Geometry* 30 (2003), 311–320.

[105] J. Pach, J. Spencer, G. Tóth. New bounds on crossing numbers. *Discrete & Computational Geometry* 24 (2000), 623–644.

[106] J. Pach, G. Tóth. Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica* 17 (1997), 427–439.

[107] J. Pach, G. Tóth. Which crossing number is it anyway? *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 80 (2000), 225–246.

[108] S. Pan, R. B. Richter. The crossing number of K_{11} is 100. *Journal of Graph Theory* 56 (2007), 128–134.

[109] E. Pegg Jr., G. Exoo. Crossing number graphs. *The Mathematica Journal* 11 (2009), 161–170.

[110] M. J. Pelsmajer, M. Schaefer, D. Štefankovič. Odd crossing number and crossing number are not the same. *Discrete & Computational Geometry* 39 (2008), 442–454.

[111] M. J. Pelsmajer, M. Schaefer, D. Štefankovič. Removing even crossings. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 97 (2007), 489–500.

[112] M. J. Pelsmajer, M. Schaefer, D. Štefankovič. Removing independently even crossings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 24 (2010), 379–393.

[113] M. J. Pelsmajer, M. Schaefer, D. Štefankovič. Crossing numbers of graphs with rotation systems. *Algorithmica* 60 (2011), 679–702.

[114] M. J. Pelsmajer, M. Schaefer, D. Stasi. Strong Hanani–Tutte on the projective plane. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23 (2009), 1317–1323.

[115] N. H. Rafla. *The good drawings D_n of the complete graph K_n*. Tese de doutorado, McGill University, 1988.

[116] R. B. Richter, G. Salazar. The crossing number of $C_6 \times C_n$. *Australasian Journal of Combinatorics* 23 (2001), 135–143.

[117] R. B. Richter, G. Salazar. The crossing number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics* 18 (2002), 381–394.

[118] R. B. Richter, C. Thomassen. Minimal graphs with crossing number at least k. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 58 (1993), 217–224.

[119] R. B. Richter, C. Thomassen. Relations between crossing numbers of complete and complete bipartite graphs. *American Mathematical Monthly* 104 (1997), 131–137.

[120] G. Ringel, J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 60 (1968), 438–445.

[121] R. D. Ringeisen, L. W. Beineke. The crossing number of $C_3 \times C_n$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24 (1978), 134–136.

[122] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70 (1997), 2–44.

[123] A. Sadhu. A proof of Albertson's conjecture. Preprint, arXiv 2609.01682 (2026).

[124] M. Schaefer. *Crossing Numbers of Graphs*. CRC Press, 2018.

[125] M. Schaefer. The graph crossing number and its variants: a survey. *Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey DS21 (atualizado periodicamente).

[126] M. Schaefer. Complexity of some geometric and topological problems. *Graph Drawing 2009*, LNCS 5849, 334–344.

[127] F. Shahrokhi, O. Sýkora, L. A. Székely, I. Vrťo. On k-planar crossing numbers. *Discrete Applied Mathematics* 155 (2007), 1106–1115.

[128] J. Širáň. Infinite families of crossing-critical graphs with a given crossing number. *Discrete Mathematics* 48 (1984), 129–132.

[129] A. Suk, J. Zeng. Unavoidable patterns in complete simple topological graphs. *Graph Drawing 2022*, LNCS 13764, 3–15.

[130] O. Sýkora, I. Vrťo. On crossing numbers of hypercubes and cube connected cycles. *BIT* 33 (1993), 232–237.

[131] L. A. Székely. Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics, Probability and Computing* 6 (1997), 353–358.

[132] E. Szemerédi, W. T. Trotter. Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica* 3 (1983), 381–392.

[133] J. Spencer, E. Szemerédi, W. T. Trotter. Unit distances in the Euclidean plane. Em: *Graph Theory and Combinatorics*, Academic Press, 1984, 293–303.

[134] G. Tóth. Note on the pair-crossing number and the odd-crossing number. *Discrete & Computational Geometry* 39 (2008), 791–799.

[135] G. Tóth. A better bound for the pair-crossing number. Em: *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, 2013, 563–567.

[136] P. Turán. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941), 436–452.

[137] P. Turán. A note of welcome. *Journal of Graph Theory* 1 (1977), 7–9.

[138] W. T. Tutte. Toward a theory of crossing numbers. *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970), 45–53.

[139] P. Valtr. On the pair-crossing number. Em: *Combinatorial and Computational Geometry*, MSRI Publications 52, 2005, 569–575.

[140] K. Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Mathematische Annalen* 114 (1937), 570–590.

[141] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2.ª ed., Prentice Hall, 2001.

[142] D. R. Woodall. Thrackles and deadlock. Em: *Combinatorial Mathematics and its Applications*, Academic Press, 1971, 335–347.

[143] D. R. Woodall. Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture. *Journal of Graph Theory* 17 (1993), 657–671.

[144] Y. Yang, G. Wang, H. Wang, Y. Zhou. Disproof of a conjecture by Erdős and Guy on the crossing number of hypercubes. Preprint, arXiv 1201.4700 (2012).

[145] K. Zarankiewicz. On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fundamenta Mathematicae* 41 (1954), 137–145.